KARL STUMPFF

HIMMELSMECHANIK

BAND II



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

K. STUMPFF · HIMMELSMECHANIK II

HOCHSCHULBÜCHER FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN VON OTTO LUCKE UND ROBERT ROMPE

BAND 40

HIMMELSMECHANIK

BAND II

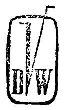
DAS DREIKÖRPERPROBLEM

VON

KARL STUMPFF

Dr. phil., a. o. emer. Professor
für Sphärische Astronomie, Bahnbestimmung und Himmelsmechanik
an der Georg-August-Universität zu Göttingen

MIT 90 ABBILDUNGEN



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

BERLIN 1965

1. Auflage
Verantwortlicher Verlagslektor: R. Sube

Printed in the German Democratic Republic · Lizenz-Nr. 206 · 435/47/65
ES 18 B 2, D 1
Satz und Druck: VEB Leipziger Druckhaus, Leipzig (III/18/203)

ZUM GEDÄCHTNIS AN MEINE MUTTER
BERTHA ELLINE CHRISTIANE STUMPFF
GEBORENE NIELSEN (1863–1931)
IN DANKBARKEIT AN IHREM HUNDERTSTEN
GEBURTSTAG

VORWORT

Nach langer, durch äußere Umstände bedingter Verzögerung liegt nun der zweite Band der „Himmelsmechanik" vor. Sein Hauptthema, das Dreikörperproblem, bestimmt nicht nur den Inhalt dieses Bandes an sich, sondern auch Form und Anlage der Darstellung eines schwierigen und in seiner Ganzheit durchaus noch unbewältigten Stoffes. Während das Zweikörperproblem, dessen Theorie und Praxis der erste Band gewidmet war, noch als in sich geschlossene, vollständig lösbare und gelöste Aufgabe eine streng gegliederte Darstellung erlaubte, die lehrbuchmäßig von den geschichtlichen Anfängen bis zu den modernen Formulierungen und Anwendungsmethoden in der theoretischen und praktischen Astronomie reicht, wird eine entsprechende Darstellung des Drei- und Mehrkörperproblems immer ein Torso bleiben, dessen Vollendung zwar fortlaufend durch die Entwicklung neuer Methoden angenähert, aber niemals erreicht werden kann.

Jeder Versuch, diesen gewaltigen Stoff, der nun fast dreihundert Jahre intensiver Bemühungen um seine Durchdringung erlebt hat, in eine seiner Eigenart gemäße Form zu bringen, wird daher anders ausfallen, je nach den Gesichtspunkten, unter denen sein Gestalter ihn betrachtet, und je nach den zeitbedingten Umständen, die das Interesse der Wissenschaft diesem oder jenem der vielgestaltigen Aspekte zuwenden, die das Problem in großer Mannigfaltigkeit darbietet. In der Tat läßt sich seit dem Erscheinen von NEWTONS „Philosophiae naturalis principia mathematica" ein mehrfacher Wechsel in Art und Gegenstand des speziellen Interesses beobachten, das Wissenschaft, Forschung und Lehre diesem fundamentalen Problem der Himmelsmechanik dargebracht haben. Im 18. Jahrhundert haben immer noch die ungestörte Zweikörperbewegung und die einer befriedigenden Lösung noch harrenden Bemühungen um praktische Methoden der Bahnbestimmung im Vordergrund gestanden. Dagegen erlebte die Himmelsmechanik im 19. Jahrhundert ihre große Zeit, in der von LAPLACE bis POINCARÉ die bedeutendsten Männer nicht nur die von der astronomischen Praxis her gestellten Aufgaben (nämlich die Bewegung der Planeten, Kometen und Satelliten durch Theorien darzustellen, die mit den Beobachtungen innerhalb der erreichbaren Genauigkeitsgrenzen im Einklang standen) gelöst, sondern auch die mathematischen Grundlagen, auf denen jene Theorien ihre Stütze fanden, so weit vertieft haben, wie es die verfügbaren mathematischen Hilfsmittel gestatteten.

Diese mathematischen Schöpfungen, die in der HAMILTON-JACOBIschen Theorie ihre großartigste und fruchtbarste Gestalt gefunden haben, bilden denn auch mit allen ihren Folgerungen den wesentlichen und grundlegenden Inhalt aller Lehrbücher der klassischen Himmelsmechanik, die seit Ende des vorigen Jahrhunderts erschienen sind, und auch der vorliegende Band wird an diesen Dingen nicht vorbeigehen dürfen, trotz der starken Verschiebung der Akzente des Interesses, die seit dem Beginn des 20. Jahrhunderts wiederum stattgefunden und den Blick auf andere Teilprobleme unseres Themas abgelenkt hat.

Diese Verschiebung ist in mehreren Etappen oder Schichten erfolgt, die deutlich voneinander unterschieden werden können, obwohl sie nicht unabhängig voneinander gewesen sind. Seit BRUNS und POINCARÉ bemächtigte sich die reine Mathematik erneut des Gegenstandes der Himmelsmechanik, mit neuen Methoden und Hilfsmitteln, und trug ihre Problematik weit über die Grenzen hinaus, die das Interesse des praktischen Astronomen beschränken. Die Fragen nach der Existenz allgemeiner und für alle Zeiten gültiger Lösungen des Drei- und Mehrkörperproblems und nach der Konvergenz der Reihenentwicklungen der Himmelsmechanik beschäftigten seit den achtziger Jahren die Mathematiker intensiv und fanden um 1913 in den Untersuchungen von K. SUNDMAN ihren vorläufigen Abschluß durch den Beweis, daß formale Lösungen des Dreikörperproblems durch konvergente Reihen und deren analytische Fortsetzungen existieren, deren Konvergenz allerdings im allgemeinen so schwach ist, daß sie – ausgenommen unter speziellen Bedingungen, wie denen des planetaren Störungsproblems – praktisch nicht verwendbar sind. Inzwischen hatte sich, nach den grundlegenden Arbeiten von HILL, G. H. DARWIN und anderen, das Interesse den periodischen Lösungen des eingeschränkten Dreikörperproblems zugewandt, deren theoretische Grundlagen von POINCARÉ in seinen „Méthodes nouvelles de la mécanique céleste" geschaffen wurden und die ab 1906, seit der Entdeckung des ersten „Trojaners", aktuelle Bedeutung erlangten. Diese Dinge sind dann der dominierende Gegenstand zahlreicher Arbeiten in den ersten Jahrzehnten dieses Jahrhunderts gewesen und haben der Ausarbeitung, Vervollkommnung und Anwendung der Methoden der numerischen Integration der Differentialgleichungen des allgemeinen wie des eingeschränkten Dreikörperproblems großen Auftrieb gegeben. Diese Entwicklung hält heute nicht nur an, sondern wurde nach zeitweiliger Stagnation neuerdings durch zwei Umstände sehr beschleunigt und gefördert: erstens durch neue Probleme, die der Himmelsmechanik seit der Schaffung künstlicher Erdsatelliten und Raumgeschosse erwachsen sind, zweitens durch die Konstruktion programmgesteuerter elektronischer Rechenanlagen, mit denen nicht nur die alten Aufgaben der praktischen Himmelsmechanik (Bahnbestimmung, Berechnung gestörter Ephemeriden, Aufsuchen periodischer Lösungen usw.) mit bis dahin unvorstellbarer Schnelligkeit, Genauigkeit und Sicherheit gelöst werden können, sondern die auch für die numerische Bewältigung der Probleme der Raumfahrt unentbehrlich geworden sind.

Die Entscheidung, unter den alten, neueren und neuesten Gedankengängen, auf die sich der Verfasser eines modernen Werkes über das Dreikörperproblem verwiesen sieht, eine Auswahl zu treffen, die sowohl den vorgebildeten Leser als auch den studierenden Anfänger befriedigt, ist nicht leicht gewesen. Es waren zwei Möglichkeiten gegeben: entweder den Stoff um einer letztlich doch unerreichbaren Vollständigkeit willen eng zusammenzudrängen oder ihn in aufgelockerter Form unter Beschränkung auf Wesentliches so darzustellen, daß sich auch der auf diesem Gebiet noch unerfahrene Leser, ohne durch allzu hohe Anforderungen an spezielle Vorkenntnisse und eigene Mitarbeit rasch ermüdet und entmutigt zu werden, mit Ausdauer und gutem Willen leicht durch die Kapitel des Buches durcharbeiten kann. Diese letztere Möglichkeit, die schon

Stil und Anlage des ersten Bandes bestimmt hat, wurde auch hier bevorzugt. Daß ich damit den rechten Weg beschritten habe, scheint mir durch manche sachverständige, kritische Beurteilung des ersten Bandes bestätigt zu werden, in der als ansprechend und nützlich hervorgehoben wurde, daß der Leser an keiner Stelle über Begründung und logischen Zusammenhang des Dargebotenen im Zweifel gelassen wird.

Die Auswahl des Stoffes für den zweiten Band wurde erschwert durch die schier unübersehbare Fülle des Schrifttums, das sich in den letzten Jahrzehnten angesammelt hat und von dem selbst das sehr ausführliche Literaturverzeichnis am Schluß dieses Bandes nur eine schwache Vorstellung vermittelt. Hier war eine strenge Sichtung vonnöten, um nicht die große Linie durch Verzettelung in allzu viele Einzelheiten verlorengehen zu lassen. Eine bevorzugte Behandlung der klassischen Themen schien mir für ein einführendes Lehrbuch unerläßlich zu sein, und so hält sich auch die Grobeinteilung des Stoffes im wesentlichen an die auch in älteren Werken gewählte Gliederung. Die Zählung der Kapitel sowie die durchlaufende Numerierung der einzelnen Abschnitte schließt sich an die des ersten Bandes an, um die häufig notwendigen Hinweise auf dessen Abschnitte und Formeln zu erleichtern. So beginnt dieser Band mit dem elften Kapitel und dem 91. Abschnitt des Gesamtwerks.

Das Anfangskapitel bringt eine erste Übersicht über die wichtigsten der im vorliegenden Band zu behandelnden Themen und kann als eine erste Einführung in die Begriffsbildung und die Problematik der Drei- und Mehrkörperbewegung dienen. Das zweite (12.) Kapitel beschäftigt sich mit den LAGRANGEschen Untersuchungen über das Dreikörperproblem, die hier aber, eleganter als in den klassischen Werken, mit Hilfe der Vektoralgebra und -analysis formuliert werden, wobei sich zwangsläufig interessante Parallelen zu der im ersten Band versuchten Analyse des Zweikörperproblems mit Hilfe der „lokalen Invarianten" ziehen lassen. Das nächste (13.) Kapitel behandelt dann, als natürliche Fortsetzung der LAGRANGEschen Theorie, die Librationsbewegungen im eingeschränkten Dreikörperproblem um die LAGRANGEschen Librationszentren, jenes Thema also, das, von HILL zuerst diskutiert, von CHARLIER mathematisch durchdacht wurde und dessen weitere Bearbeitung schließlich unter anderem auch zu den Theorien der Trojanerbewegung von BROWN bis THÜRING geführt hat.

Die nächsten beiden Kapitel sind der HAMILTON-JACOBIschen Theorie und der aus ihr entwickelten Methode der Variation der Konstanten gewidmet. Ihnen schließt sich folgerichtig ein weiteres, das 15., über das planetare Dreikörperproblem an, in dem die Grundlagen der Störungsrechnung, vor allem die säkularen und langperiodischen Störungen der Planeten des Sonnensystems, mit Hilfe dieser klassischen Methoden behandelt werden. Hier werden also aus dem weiten Gebiet der Störungstheorie gewisse Themen herausgegriffen, die dem Anfänger noch in verhältnismäßig einfacher und durchsichtiger Form wesentliche und besonders hervorstechende Züge in den Eigenschaften gestörter Planetenbahnen erkennbar werden lassen. Im übrigen gehört ja das Problem der allgemeinen Störungen in den dritten Band, dessen Hauptthema es bilden wird.

Für den Problemkreis des zweiten Bandes von grundsätzlicher Bedeutung sind hingegen die Methoden der numerischen Integration und der Berechnung spezieller Störungen, denen an zentraler Stelle die umfangreichen Kapitel 17 und 18 gewidmet sind; denn diese mathematischen Verfahren sind es ja, die unsere Kenntnisse um die vielgestaltigen Bahnformen des Dreikörperproblems (insbesondere auch der periodischen Lösungen) entscheidend vermehrt haben und heute, dank der Erfindung der elektronischen Rechenanlagen, zu einem unentbehrlichen und äußerst ergiebigen Hilfsmittel der Himmelsmechanik geworden sind. In diesen beiden Kapiteln wird der Leser neben den klassischen Methoden der numerischen Lösung von Differentialgleichungen im allgemeinen und der Berechnung spezieller Störungen im besonderen auch neuere und neueste behandelt finden.

Im folgenden (19.) Kapitel wird dem Leser ein kurz gefaßter, aber alles für den Astronomen Interessante umfassender Bericht über die Bemühungen um Klassifizierung und Theorie der periodischen Lösungen des eingeschränkten Dreikörperproblems dargeboten. Was die Klassifizierung dieser Bahnscharen oder Bahnfamilien anbelangt, so mußte es genügen, die noch mit alten rechnerischen Hilfsmitteln erzielten Ergebnisse der Kopenhagener Untersuchungen zusammenzustellen, da eine durchgreifende und systematische Fortsetzung dieser verdienstvollen Arbeiten mit den modernen elektronischen Rechenmaschinen heute noch unvollendet geblieben ist. Immerhin konnten einige Teilergebnisse in dieser Richtung schon mitgeteilt werden: so die schönen Arbeiten von E. Rabe über die periodischen Bahnen vom Trojaner- und Transtrojanertyp im Anschluß an die theoretischen Untersuchungen von B. Thüring sowie eine vom Verfasser gemeinsam mit J. Schubart durchgeführte numerische Studie über das Hecuba-Problem im Zusammenhang mit Ideen von Poincaré, die in früheren Lehrbüchern kaum Beachtung gefunden haben. Weitere, sehr aufschlußreiche Untersuchungen auf diesem Gebiet sind erst nach Abschluß des Manuskripts bekannt geworden und werden, soweit erforderlich, im dritten Band Berücksichtigung finden.

Die letzten drei Kapitel sind dem Mond- und Satellitenproblem gewidmet. Was die Theorie des Mondes anbelangt, so gehört sie, als wichtiges und besonders schwieriges Teilgebiet der Theorie der allgemeinen Störungen, zweifellos in den Themenkreis des dritten Bandes. Der vorliegende zweite Band würde aber eine empfindliche Lücke aufweisen, wenn dieser Gegenstand ganz unberücksichtigt geblieben wäre. Ebenso wie es recht war, aus der allgemeinen Theorie der Planeten die Untersuchungen über säkulare und langperiodische Störungen vorwegzunehmen, um dem Leser schon hier eine gewisse Übersicht über besonders auffällige Eigenschaften gestörter Planetenbahnen zu verschaffen, wird ähnliches auch in bezug auf die Theorie des Mondes billig sein. Ich glaube, daß der Gedanke, die am meisten ins Auge fallenden „Ungleichheiten" der Mondbewegung – insbesondere die Evektion, die Variation, die jährliche und die parallaktische Gleichung, die säkulare Bewegung der Apsiden und Knoten sowie die wichtigsten Breitenstörungen und die säkulare Beschleunigung des Mondes in Länge – auf möglichst unkomplizierte und konkrete Weise zu begründen und numerisch abzuschätzen, den Beifall des Lesers

(und nicht nur des Anfängers) finden wird. Nach einer solchen ersten Orientierung über die Bahneigenschaften des Erdtrabanten darf man wohl wegen der exakten Behandlung des Mondproblems, insbesondere der Theorien von DELAUNAY, HANSEN und E. W. BROWN, getrost auf den dritten Band verweisen.

Nur das „HILLsche Mondproblem", jene stark vereinfachte und spezialisierte Variante des allgemeinen Mondproblems, die auch als Ausgangsbasis für die BROWNsche Theorie Bedeutung hat, konnte hier nicht übergangen werden. Im vorletzten Kapitel wurde es wenigstens insoweit ausführlich behandelt, wie es seine einfach-periodischen Lösungen, die Schar der „Variationsbahnen", betrifft. Ausblicke auf einen eigenen Lösungsversuch des Verfassers beschließen die Darstellung dieser interessanten, seit TISSERANDS „Traité" in fast keinem Lehrbuch der Himmelsmechanik fehlenden Studie.

Die Fülle des Stoffes hat es mit sich gebracht, daß für den aktuellsten Gegenstand der Himmelsmechanik, die Theorie der Bewegung künstlicher Erdsatelliten und Raumproben, nur noch der Raum eines einzigen Kapitels von allerdings beträchtlichem Umfang zur Verfügung stand. Das mag bedauert werden. Andererseits sind, erst sechs Jahre, nachdem der erste „Sputnik", der erste „Explorer" und der erste „Vanguard" in ihre Umlaufsbahnen um die Erde gebracht wurden, die theoretischen Bemühungen um diese technisch-astronomischen Dinge noch so sehr im Fluß und im Aufbau begriffen, daß es noch viel zu zeitig sein dürfte, sie in ein System zu bringen und lehrbuchmäßig darzustellen. Ich glaube, daß es in diesem Stadium der Entwicklung dieser neuen Disziplin unserer Wissenschaft ausreichend und befriedigend ist, die Probleme selbst aufzuzeigen, die im Laufe der Zeit aufgetaucht sind, die wichtigsten Ansätze zu ihrer Lösung zu beschreiben und die wichtigsten Ergebnisse dieser Bemühungen aufzuzählen, soweit sie schon mehr oder weniger gesichert vorliegen.

Sicherlich wird der dritte Band, der das in diesem Buch fortgesetzte Werk vollenden soll, auch in bezug auf dieses aktuellste Thema der Himmelsmechanik vieles ergänzen und manches abschließen können, was heute noch Gegenstand der Forschung ist und erst in Zukunft zum Gegenstand der Lehre werden wird.

Göttingen, im Oktober 1963 KARL STUMPFF

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort 7

Kapitel XI: Einführung in die Probleme

91. Die zehn bekannten Integrale des Problems der n Körper 17
92. Das Dreikörperproblem. Relative Koordinaten 23
93. Der Satz vom Kräftezentrum 30
94. Der freie Fall 32
95. Die LAGRANGEsche Funktion 34
96. Transformation der Koordinaten. Die LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen 37
97. Die Elimination der Knoten. JACOBIsche Koordinaten 41
98. JACOBIsche Koordinaten im n-Körperproblem 45
99. Das eingeschränkte Dreikörperproblem. Das JACOBIsche Integral 49
100. Das HILLsche Mondproblem 56
101. Störungen 60
102. Einflußbereiche der Himmelskörper im Sonnensystem 64
103. Anziehung eines beweglichen Körpers von zwei festen Zentren aus 69
104. Der MACMILLANsche Spezialfall des Dreikörperproblems 73

Kapitel XII: Die LAGRANGEsche Theorie

105. Das reduzierte Dreikörperproblem 80
106. Die lokalen Invarianten des Dreikörperproblems 84
107. Der Satz von LAGRANGE 86
108. Die Invariante ϱ 88
109. Die Differentialgleichungen des reduzierten Problems 92
110. Die Differentialgleichungen für die Dreiecksseiten 96
111. Abgeleitete Invarianten 98
112. Das BOHLINsche Problem 101
113. Die LAGRANGEschen speziellen Lösungen des Dreikörperproblems 104

Kapitel XIII: Librationsbewegungen im eingeschränkten Dreikörperproblem

114. Eigenschaften der Potentialfunktion des eingeschränkten Dreikörperproblems 115
115. Die HILLschen Grenzkurven 122
116. Enge Bahnen um die LAGRANGEschen Dreieckspunkte 125
117. Räumliche infinitesimale Bahnen um L_4 und L_5 138
118. Enge Bahnen um die kollinearen Librationszentren 142
119. Periodische Bahnen um die kollinearen Librationszentren. Theorie von PLUMMER 148
120. Die Bewegung der Trojaner. Theorie von E. W. BROWN 156

Kapitel XIV: Die HAMILTON-JACOBIsche Theorie

121. Das Prinzip der kleinsten Wirkung 170
122. Kanonische Differentialgleichungssysteme 174
123. Kanonische Transformationen 177
124. Die HAMILTON-JACOBIsche partielle Differentialgleichung 183

125. Anwendung auf das Zweikörperproblem ... 186
126. Lösungen und Integrale von Differentialgleichungssystemen. Die POISSONschen und die LAGRANGEschen Klammerausdrücke ... 196

Kapitel XV: Die Methode der Variation der Konstanten

127. Die Methode der Variation der Konstanten ... 203
128. Form der Klammerausdrücke für die elliptischen Elemente einer Planetenbahn ... 209
129. Kanonische und halbkanonische Differentialgleichungssysteme ... 216
130. Oskulierende und nichtoskulierende intermediäre Bahnen ... 221
131. Die DELAUNAYschen kanonischen Elemente ... 230
132. Die POINCARÉschen kanonischen Elemente ... 236
133. Störungsgleichungen für die klassischen Kegelschnittselemente ... 238

Kapitel XVI: Das planetare Dreikörperproblem.
Säkulare und langperiodische Störungen

134. Gestalt der Störungsfunktion ... 245
135. Entwicklung der Störungsfunktion ... 249
136. Elimination der bekannten Integrale ... 257
137. Säkulare Störungen. Allgemeiner Überblick ... 263
138. Entwicklung der säkularen Störungsfunktion ... 267
139. Integration der säkularen Störungsgleichungen ... 279
140. Störungen sehr langer Periode. Die säkulare Gleichung ... 286
141. Säkulare Störungen der mittleren Länge ... 293

Kapitel XVII: Numerische Integration von Differentialgleichungen

142. Übersicht über das Problem ... 296
143. Interpolation von Funktionswerten mit gleichabständigen Argumenten. Differenzenschemata. Die NEWTONsche Interpolationsformel ... 299
144. Einführung neuer Symbole. Neuer Beweis der NEWTONschen Interpolationsformeln ... 308
145. Interpolation nach zentralen Differenzen. Die STIRLINGsche Interpolationsformel ... 312
146. Die BESSELsche Interpolationsformel. Interpolation auf Intervallmitte. Varianten ... 320
147. Genauigkeit und Konvergenz der Interpolationsformeln ... 326
148. Ableitungen einer durch äquidistante Stützwerte gegebenen Funktion .. 331
149. Mechanische Quadratur. Einfache Integrale ... 337
150. Mechanische Quadratur. Doppelintegrale ... 350
151. Anlaufs- und Fortführungsrechnung bei Differentialgleichungen erster Ordnung ... 356
152. Anlaufs- und Fortführungsrechnung bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung ... 363

Kapitel XVIII: Spezielle Störungen

153. Numerische Integration der Differentialgleichungen für ungestörte und gestörte rechtwinklige Koordinaten ... 369
154. Das COWELLsche Integrationsverfahren ... 372
155. Das NUMEROVsche Integrationsverfahren ... 376

156. Spezielle Störungen der rechtwinkligen Koordinaten. Methode von ENCKE 378
157. Spezielle Störungen der Kegelschnittselemente 383
158. Spezielle Störungen der Zylinderkoordinaten. Methode von BRÜNNOW .. 395
159. Spezielle Störungen der Zylinderkoordinaten. Methode von HANSEN und TIETJEN 403
160. Spezielle Störungen der vektoriellen Bahnelemente. Methoden von HERRICK und MUSEN 407
161. Das TISSERANDsche Kriterium. Integralinvarianten 417

Kapitel XIX: Das eingeschränkte Dreikörperproblem. Periodische und asymptotische Lösungen

162. Periodische Lösungen 423
163. Intermediäre Lösungen des Trojanerproblems. Theorie von B. THÜRING .. 430
164. Periodische Trojaner- und Transtrojanerbahnen 440
165. Ejektionsbahnen. Die THIELEsche Transformation 448
166. Die Kopenhagener Durchmusterung 461
167. Periodische Bahnen um die kollinearen Librationszentren 464
168. Periodische Bahnen um die endlichen Massen 467
169. Asymptotische Bahnen 476
170. POINCARÉS Untersuchungen über periodische Bahnen 481
171. Periodische Lösungen erster Gattung 489
172. Periodische Lösungen zweiter Gattung. Das Hecuba-Problem 498

Kapitel XX: Die Bewegung des Mondes

173. Vorbemerkungen und Geschichtliches 511
174. Die Variationsbahn des Mondes 516
175. Die Evektion 522
176. Die Apsidenbewegung des Mondes 531
177. Die parallaktische und die jährliche Gleichung 533
178. Störungen, die von der Neigung der Mondbahn herrühren. Die säkulare Bewegung der Knoten 538
179. Die säkulare Beschleunigung des Mondes 546

Kapitel XXI: Das HILLsche Mondproblem

180. Die Untersuchungen von HILL über das Variationsproblem 551
181. Der Skalenfaktor 561
182. Geometrische Eigenschaften der Variationsbahn 565
183. Die Differentialgleichung für den Radiusvektor 568
184. Formale Integration der Differentialgleichung für den Radiusvektor ... 573
185. Neue Lösung des Variationsproblems 578

Kapitel XXII: Künstliche Himmelskörper

186. Übersicht über die Probleme 589
187. Die Gestalt des Gravitationspotentials des Erdkörpers 592
188. Bewegung eines Satelliten im anisotropen Gravitationsfeld der Erde ... 601
189. Die intermediäre Lösung von VINTI 614
190. Einfluß des atmosphärischen Widerstandes auf die Bewegung erdnaher Satelliten 617
191. Der stationäre Satellit 627

192. Bahnbestimmung künstlicher Erdsatelliten. Methode von KUSTAANHEIMO 636
193. Der Flug zum Mond ... 643
194. Das Einfangproblem ... 649

Anhang

I. Berichtigungen zu Band I ... 656
II. Ergänzung zu Abschnitt 35 (Band I, S. 174): Auflösung der KEPLERschen Gleichung ... 657
III. LAPLACEsche Koeffizienten ... 658
IV. Säkulare Störungen im System Sonne–Jupiter–Saturn ... 658
V. Umformung der Differentialgleichungen für die elliptischen Bahnelemente nach DE SITTER ... 659
VI. Beweis der Formel (XXII; 10) ... 661
VII. ENCKEsche Reihe $3f = 3f(q)$ für $-0.03 \leqq q \leqq +0.03$ ... 662

Literaturverzeichnis ... 663

Namen- und Sachregister ... 674

KAPITEL XI

EINFÜHRUNG IN DIE PROBLEME

91. *Die zehn bekannten Integrale des Problems der n Körper*

Das NEWTONsche Gravitationsgesetz, über dessen Begründung und Formulierung im ersten Band dieses Werkes alles Nötige nachgelesen werden kann, bildet die Grundlage aller himmelsmechanischen Untersuchungen und reicht im allgemeinen aus, die Bewegungen der Himmelskörper im leeren Raum in Übereinstimmung mit der Erfahrung genau zu beschreiben. Eine Ausnahme bildet nur die zusätzliche Apsidenbewegung der Bahnen der sonnennahen Planeten, deren Darstellung durch die NEWTONsche Theorie nicht gelingt, wohl aber durch die allgemeine Relativitätstheorie EINSTEINS, in der das klassische Gravitationsgesetz als sehr nahe Approximation enthalten ist. Es mag hier noch besonders betont werden, daß das Gravitationsgesetz nicht unbedingt eine letzte und befriedigende *Erklärung* der Bewegungen der Himmelskörper in sich schließt. Es darf also nicht so verstanden werden, als werde mit ihm die Realität einer fernwirkenden (mit unendlich großer oder mit Lichtgeschwindigkeit sich ausbreitenden) „Anziehungskraft" zwischen den durch leere Räume getrennten Himmelskörpern behauptet oder gar bewiesen. In der Tat ist diese dem materialistischen Denken entsprungene, aber doch letzthin mit ihm in Widerspruch stehende Vorstellung oft genug Anlaß zu heftiger Kritik gewesen. In Wirklichkeit hat weder NEWTON selbst noch irgendeiner seiner Nachfahren im Ernst etwas anderes ausgesagt, als daß die Himmelskörper sich so bewegen, *als ob* zwischen ihnen eine Kraft wirksam sei, deren Größe dem Produkt der jeweils beteiligten Massen direkt und dem Quadrat ihres Abstandes umgekehrt proportional ist. Das aber ist eine Behauptung, die empirisch nachprüfbar ist und sich auch, von der oben erwähnten Ausnahme abgesehen, in den Grenzen der durch Beobachtung erreichbaren Genauigkeit bestätigt hat. Diese Auffassung der Sache ist um so richtiger, als ja die allgemeine Relativitätstheorie (für die auch die Perihelbewegung des Merkur keine Ausnahme mehr darstellt) den Kraftbegriff ganz vermeidet und statt dessen die Bahnen der Himmelskörper als „geodätische Linien" in einem durch die jeweilige Verteilung der Massen deformierten Raum-Zeit-Kontinuum auffaßt, die dynamische Vorstellung also durch eine geometrische ersetzt.

Schon bei der Analyse der Zweikörperbewegung haben wir die vereinfachende Annahme gemacht, daß die Himmelskörper als Massenpunkte im Raum anzusehen seien, und wir haben festgestellt, daß diese Annahme in sehr weiten Grenzen ohne Schaden für die Genauigkeit der Ergebnisse der praktischen Himmelsmechanik berechtigt ist. Sie ist es sicher überall da, wo die betrachteten Himmelskörper kugelförmig-symmetrisch aufgebaute Massen darstellen und im Laufe ihrer Bewegung nicht zusammenstoßen. Ist dagegen die Gestalt der Körper oder ihr Massenaufbau von der Kugelsymmetrie verschieden, so ist innerhalb gewisser Abstandsgrenzen diese Vereinfachung nicht mehr zulässig.

Das gleiche gilt natürlich in erhöhtem Maße, wenn die Körper nicht starr sind, sondern infolge ihrer Rotation und durch die Anziehungskräfte benachbarter Körper deformiert werden. Die Theorie der Bewegung der Satelliten abgeplatteter Planeten, insbesondere die des Erdmondes, erfordert daher besondere Formulierungen, da bei einer exakten Behandlung dieses Problems das in der Himmelsmechanik sonst gebräuchliche Schema der durch Gravitationskräfte bewegten Massenpunkte nicht mehr ausreicht. Was die Einbeziehung von Zusammenstößen in die Theorien der Himmelsmechanik anbetrifft, so ist zwischen dem mathematischen Problem der Kollision zweier Massenpunkte und dem physikalischen des Zusammenstoßes endlich ausgedehnter Körper wohl zu unterscheiden. Schon beim Zweikörperproblem haben wir feststellen können, daß die ideale Kollision zweier Massenpunkte einer Singularität der Bewegungsgleichungen entspricht und mit unendlich großer instantaner Geschwindigkeit erfolgt, während in Wirklichkeit solche Singularitäten wegen der endlichen Volumina der Himmelskörper unmöglich eintreten können. Das Problem des einfachen oder gleichzeitig-mehrfachen Zusammenstoßes der Massenpunkte, das Verhalten in der Singularität und in ihrer Umgebung, die Frage der analytischen Fortsetzung der Bewegung über die Singularität hinaus usw. nehmen daher in den himmelsmechanischen Untersuchungen der Mathematiker einen sehr breiten Raum ein, während diese Dinge für den Astronomen weniger interessant sind.

Wir werden in den folgenden Kapiteln die Himmelskörper durchweg als Massenpunkte ansehen und daher, mit Ausnahme einiger Abschnitte über die Bewegung der Satelliten, die Komplikationen außer acht lassen, die sich bei abgeplatteten Gestirnen ergeben. Auch der Fall des Zusammenstoßes, den wir erst im dritten Band kurz erörtern werden, wird demnach im mathematischen, nicht im physikalischen Sinne zu verstehen sein.

Der vorherrschende Gegenstand dieses Bandes ist das *Dreikörperproblem*, der einfachste Spezialfall des allgemeineren n-Körperproblems, wenn wir von der im ersten Band ausführlich behandelten Zweikörperbewegung absehen. Auf die Verhältnisse, die wir in unserem Planetensystem vorfinden, können wir allerdings die Bedingungen des Dreikörperproblems nicht vorbehaltlos anwenden; vielmehr ist dort die Zahl der gravitierenden Massen, deren Anziehungskräfte bei strenger Rechnung berücksichtigt werden müssen, mindestens zehn: die Sonne und neun große Planeten. Strenggenommen müßte auch die Mehrzahl der Satelliten hinzugenommen werden. Es genügt aber in den meisten Fällen, die den Planeten entsprechenden Massenpunkte in die Schwerpunkte (Massenmittelpunkte) der Systeme Planet–Satelliten zu verlegen und ihnen die Gesamtmasse dieser Systeme zuzuschreiben.

Gewisse Eigenschaften der Bewegungen in Systemen von diskreten Massenpunkten sind von der Zahl dieser Punkte unabhängig, so die Tatsache, daß es stets zehn allgemeine Integrale der Bewegungsgleichungen von algebraischer Form gibt. Um dies zu zeigen, nehmen wir an, daß n Massenpunkte mit den Massen m_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sich gegenseitig nach dem NEWTONschen Gravitationsgesetz anziehen. Ihre Örter in bezug auf ein Inertialsystem (d. h. auf ein Koordinatensystem, dessen Ursprung und dessen Achsen in ihrer räumlichen

Lage nicht durch „Kräfte“ beeinflußt werden) seien durch die Ortsvektoren

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

als Funktionen der Zeit t gegeben. Sofern keine Zusammenstöße stattfinden, sind die Funktionen $\mathfrak{p}_i(t)$ für alle Zeiten eindeutig definiert, überall stetig und beliebig oft differenzierbar; durch sie sind unter anderem auch die Bahnkurven der n Massenpunkte festgelegt. Bezeichnet man den Abstand der Örter $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_j$ mit $r_{ij} = r_{ji} = |\mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_i|$, so ist die Kraft, mit der die Masse m_i von der Masse m_j angezogen wird, durch den Ausdruck

$$\mathfrak{K}_{ij} = k^2 \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{\mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_i}{r_{ij}} = k^2 \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} (\mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_i)$$

gegeben, da der Faktor $k^2 m_i m_j / r_{ij}^2$ (mit k als Gravitationskonstante) die Größe der NEWTONschen Attraktionskraft, der Vektor $(\mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_i)/r_{ij}$ den Einheitsvektor darstellt, der vom angezogenen zum anziehenden Körper führt und daher die Richtung der Kraft versinnbildlicht. Die von allen anderen $n - 1$ Massen auf m_i ausgeübten Kräfte summieren sich vektoriell, so daß

$$\text{(XI; 1)} \qquad \mathfrak{K}_i = m_i \ddot{\mathfrak{p}}_i = k^2 m_i \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{r_{ij}^3} (\mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_i)$$

das System von n vektoriellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung darstellt, dem die Bewegungen der n Massen genügen. Die Summe rechts ist über alle Indizes $j = 1, 2, \ldots, n$ mit Ausnahme von $j = i$ zu erstrecken, enthält also jeweils $n - 1$ Summanden.

Die Lösung des Systems (XI; 1) erfordert $6n$ Integrale, da jede der n Gleichungen in drei voneinander unabhängige skalare Differentialgleichungen zweiter Ordnung zerfällt. Von diesen Integralen sind, wie gezeigt werden soll, zehn bekannt, für alle Fälle und für alle Zeiten gültig und von algebraischer Form.

Summiert man die Gleichungen (XI; 1) über i, so ergibt sich sofort

$$\text{(XI; 2)} \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\mathfrak{p}}_i = k^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} (\mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_i) = 0,$$

da jedem Glied $m_i m_j (\mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_i)/r_{ij}^3$ der Doppelsumme ein anderes der Form $m_j m_i (\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_j)/r_{ji}^3$ entspricht, das ihm entgegengesetzt gleich ist. Gleichung (XI; 2) läßt sich also zweimal integrieren:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \mathfrak{p}_i = \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}' t = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\, t) \sum m_i.$$

Die Vektoren $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' / \sum m_i$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}' / \sum m_i$ sind konstant. Dieser Satz besagt also, daß der Vektor

$$\text{(XI; 3)} \qquad \mathfrak{S} = \frac{\sum m_i \mathfrak{p}_i}{\sum m_i} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\, t$$

eine lineare Funktion der Zeit ist. Der durch $\mathfrak{S}$ dargestellte Ort heißt *Schwerpunkt* oder besser *Massenmittelpunkt* des Systems der n Körper. Der *Schwerpunktssatz* (XI; 3) besagt somit, daß sich der Massenmittelpunkt des Systems

in bezug auf ein beliebig gewähltes Inertialsystem geradlinig-gleichförmig bewegt. Die beiden konstanten Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ sind willkürlich; sie hängen lediglich von der speziellen Wahl des Inertialsystems ab. Ihre Koordinaten liefern also sechs willkürliche skalare Integrationskonstanten. Wählt man das Koordinatensystem so, daß $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = 0$ ist, so gelten in ihm die Beziehungen

$$\text{(XI; 4)} \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i\, \mathfrak{p}_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} m_i\, \dot{\mathfrak{p}}_i = 0,$$

und der Massenmittelpunkt des Systems ruht für alle Zeiten im Koordinatenursprung. Zwischen den $6n$ Anfangsbedingungen der Bewegung, die man durch die Koordinaten der Örter und der Geschwindigkeiten der n Massenpunkte zu irgendeinem Zeitpunkt $t = t_0$ ausdrücken kann, bestehen also zwei vektorielle, d.h. sechs skalare, lineare Beziehungen (XI; 4), so daß sich die Zahl der unabhängigen Integrationskonstanten um sechs vermindern läßt.

Drei weitere Integrale erhält man, indem man (XI; 1) vektoriell mit $\mathfrak{p}_i$ multipliziert und die Produkte über alle i summiert. Es ergibt sich dann

$$\sum_{i=1}^{n} m_i [\mathfrak{p}_i\, \ddot{\mathfrak{p}}_i] = k^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} \frac{m_i\, m_j}{r_{ij}^3} [\mathfrak{p}_i\, \mathfrak{p}_j],$$

da $[\mathfrak{p}_i\, \mathfrak{p}_i] = 0$ ist. Aber auch die Doppelsumme rechts verschwindet, weil $[\mathfrak{p}_i\, \mathfrak{p}_j] = -[\mathfrak{p}_j\, \mathfrak{p}_i]$ ist, also jedem Summanden ein anderer gleichen Betrags, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen entgegensteht. Die Integration läßt sich also ausführen und ergibt

$$\text{(XI; 5)} \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i [\mathfrak{p}_i\, \dot{\mathfrak{p}}_i] = \mathfrak{g},$$

wo $\mathfrak{g}$ einen konstanten Vektor darstellt, dessen Koordinaten drei unabhängige, willkürliche, skalare Integrationskonstanten liefern. Für $n = 2$ geht (XI; 5) in den *Flächensatz* der KEPLERschen Bewegung über. Verlegen wir nämlich den Koordinatenanfang in den Schwerpunkt und bezeichnen wir den von m_1 (Sonne) nach m_2 (Planet) führenden Vektor mit $\mathfrak{p}$, so ist in diesem Fall

$$\mathfrak{p}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\, \mathfrak{p}; \quad \mathfrak{p}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\, \mathfrak{p}, \qquad (\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1).$$

Setzt man dies für $n = 2$ in (XI; 5) ein, so ergibt sich

$$[\mathfrak{p}\, \dot{\mathfrak{p}}] = \frac{m_1 + m_2}{m_1\, m_2}\, \mathfrak{g} = \text{const},$$

also die Gleichung (III; 13).

Auch für $n > 2$ wird (XI; 5) häufig *Flächensatz* genannt, und wir werden uns dieser Bezeichnung ihrer Kürze wegen hier und da bedienen. Besser ist aber die auch in der Physik übliche Bezeichnung *Drehimpulssatz*, denn (XI; 5) besagt ja, daß die Summe der Drehimpulse $[\mathfrak{p}_i \times m_i\, \dot{\mathfrak{p}}_i]$ konstant ist. Der konstante *Drehimpulsvektor* $\mathfrak{g}$ definiert eine Ebene, deren Normale er ist und deren Lage also konstant ist bzw. sich selbst parallel bleibt. Man nennt sie die *Unveränderliche Ebene (UVE) des Systems der n Massenpunkte.*

Das letzte der zehn algebraischen Integrale liefert der Satz von der Erhaltung der Energie. Multipliziert man (XI; 1) skalar mit $\dot{\mathfrak{p}}_i$ und summiert wieder über alle i, so erhält man

(XI; 6) $$\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{\mathfrak{p}}_i\, \ddot{\mathfrak{p}}_i) = k^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} \frac{m_i\, m_j}{r_{ij}^3} (\dot{\mathfrak{p}}_i, \mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_i).$$

Die $n(n-1)$ Glieder dieser Doppelsumme lassen sich in eine quadratische Matrix mit n Spalten und Zeilen einordnen, deren Hauptdiagonalglieder $(i = j)$ fehlen. Die zur Hauptdiagonale symmetrisch liegenden Glieder haben die Form

$$\frac{m_i\, m_j}{r_{ij}^3} (\dot{\mathfrak{p}}_i, \mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_i) \quad \text{bzw.} \quad \frac{m_j\, m_i}{r_{ji}^3} (\dot{\mathfrak{p}}_j, \mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_j).$$

Ihre Summe ist also

$$-\frac{m_i\, m_j}{r_{ij}^3} (\mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_i, \dot{\mathfrak{p}}_j - \dot{\mathfrak{p}}_i).$$

Mithin kann man statt (XI; 6) auch

(XI; 7) $$\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{\mathfrak{p}}_i\, \ddot{\mathfrak{p}}_i) = -k^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{m_i\, m_j}{r_{ij}^3} (\mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_i, \dot{\mathfrak{p}}_j - \dot{\mathfrak{p}}_i)$$

schreiben. Nun ist aber $r_{ij}^2 = (\mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_i)$, also, wenn man dies nach der Zeit differenziert,

$$r_{ij}\, \dot{r}_{ij} = (\mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_i, \dot{\mathfrak{p}}_j - \dot{\mathfrak{p}}_i)$$

und daher

$$-\frac{(\mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_i, \dot{\mathfrak{p}}_j - \dot{\mathfrak{p}}_i)}{r_{ij}^3} = -\frac{\dot{r}_{ij}}{r_{ij}^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r_{ij}}\right).$$

Gleichung (XI; 7) läßt sich also integrieren, und man erhält, mit h als einer neuen Konstanten,

(XI; 8) $$T \equiv \frac{1}{2} \sum m_i\, \dot{\mathfrak{p}}_i^2 = k^2 \sum_{i \neq j} \frac{m_i\, m_j}{r_{ij}} + h = U + h.$$

T heißt die *kinetische Energie*, U das *Potential* oder die *Potentialfunktion* des Systems der n Massenpunkte, $-U$ die *potentielle Energie*. Gleichung (XI; 8) kann man daher auch

(XI; 9) $$T - U = h = \text{const}$$

schreiben; sie besagt, daß die Gesamtenergie $T - U$ des Systems während der gesamten Dauer der Bewegung konstant bleibt.

Das Energieintegral läßt sich auch auf folgende elegante Art finden: Führt man die rechtwinkligen Koordinaten

$$x_i, y_i, z_i; \quad u_i = m_i\, \dot{x}_i, \quad v_i = m_i\, \dot{y}_i, \quad w_i = m_i\, \dot{z}_i$$

der Ortsvektoren und der Impulse ein und setzt man nach (XI; 8)

$$H = T - U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathfrak{p}_i^2 - k^2 \sum_{j \neq k} \frac{m_j m_k}{r_{jk}}$$

mit

$$r_{jk}^2 = (x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2 + (z_k - z_j)^2,$$

$$m_i \mathfrak{p}_i^2 = m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = \frac{1}{m_i} (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2),$$

so ist offenbar

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = \frac{u_i}{m_i} = \dot{x}_i,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und wegen (XI; 1)

$$\frac{\partial H}{\partial x_k} = -k^2 \sum_{j \neq k} \frac{m_j m_k}{r_{jk}^3} (x_k - x_j) = -m_k \ddot{x}_k = -\dot{u}_k,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Man kann also die Differentialgleichungen (XI; 1) auch in der „kanonischen Form“

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{x}_i = \dfrac{\partial H}{\partial u_i}; & \dot{u}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}, \\ \dot{y}_i = \dfrac{\partial H}{\partial v_i}; & \dot{v}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial y_i}, \\ \dot{z}_i = \dfrac{\partial H}{\partial w_i}; & \dot{w}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial z_i} \end{array} \right.$$

schreiben. Multipliziert man nun das linke Tripel der Gleichungen (XI; 10) mit den Faktoren $\dot{u}_i, \dot{v}_i, \dot{w}_i$, das rechte mit $-\dot{x}_i, -\dot{y}_i, -\dot{z}_i$ und summiert über alle diese Gleichungen und über alle i, so erhält man

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial H}{\partial u_i} \dot{u}_i + \frac{\partial H}{\partial v_i} \dot{v}_i + \frac{\partial H}{\partial w_i} \dot{w}_i + \frac{\partial H}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial H}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial H}{\partial z_i} \dot{z}_i \right\} = \frac{dH}{dt},$$

da ja H eine Funktion der $6n$ Variablen $x_i, y_i, z_i; u_i, v_i, w_i$ allein ist und die Zeit t nicht explizit enthält. Das Integral dieser Gleichung ist aber der Energiesatz

(XI; 10a) $$H = h = \text{const.}$$

Daß die Gleichungen (XI; 10) den Gleichungen (XI; 1) äquivalent sind, kann man auch folgendermaßen zeigen: Es ist

$$\ddot{x}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u_i} \right),$$

also wegen $\dfrac{\partial H}{\partial u_i} = \dfrac{1}{m_i} u_i$

$$\ddot{x}_i = \frac{1}{m_i} \dot{u}_i = -\frac{1}{m_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{1}{m_i} \frac{\partial (T - U)}{\partial x_i}$$

und, da T von x_i unabhängig ist,

$$\text{(XI; 11)} \qquad \begin{cases} \ddot{x}_i = \dfrac{1}{m_i} \dfrac{\partial U}{\partial x_i}, & \text{und ebenso} \\ \ddot{y}_i = \dfrac{1}{m_i} \dfrac{\partial U}{\partial y_i}, \\ \ddot{z}_i = \dfrac{1}{m_i} \dfrac{\partial U}{\partial z_i}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind aber mit (XI; 1) identisch, wie man unmittelbar erkennt, wenn man, wie in (XI; 8),

$$U = k^2 \sum_{j \neq k} \frac{m_j m_k}{r_{jk}}; \quad r_{jk}^2 = (x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2 + (z_j - z_k)^2$$

setzt.

92. *Das Dreikörperproblem. Relative Koordinaten*

Wir werden später (Abschnitt 99) an einem einfachen Beispiel zeigen, daß das Problem der n Körper vollständig gelöst wäre, wenn es gelänge, $6n - 2$ Integrale zu finden. Nach einem Satz von JACOBI[1]) lassen sich dann die letzten zwei durch Integration bekannter Funktionen darstellen. Dieser Satz hat übrigens, ebenso wie die im vorigen Abschnitt bewiesenen, sehr allgemeine Gültigkeit, die weit über den Rahmen der speziellen Probleme der Himmelsmechanik hinausgeht. In Verbindung mit den Ergebnissen des vorigen Abschnitts macht es der JACOBIsche Satz ohne jede weitere Überlegung verständlich, daß das Zweikörperproblem vollständig lösbar ist. Wenn wir absolute, d.h. auf ein beliebiges Inertialsystem bezogene, Koordinaten einführen, so ist dieses Problem von der zwölften Ordnung. Da aber zehn Integrale bekannt sind, lassen sich die letzten beiden nach dem obengenannten Satz durch einfache Quadraturen ermitteln. Das Dreikörperproblem dagegen, in dem bereits die wesentlichsten Schwierigkeiten des allgemeinen n-Körperproblems zutage treten, erfordert 18 Integrale und läßt sich daher durch Berücksichtigung der zehn bekannten auf die achte Ordnung reduzieren, und es ist auch mit den schärfsten Methoden der mathematischen Analysis nicht gelungen, die Zahl der im allgemeinen unbekannten Integrale um mehr als eine weitere Einheit zu vermindern. Die Schwierigkeiten sind also bereits für $n = 3$ erheblich, und wir werden uns daher, um die Dinge nicht unnötig zu komplizieren, von gelegentlichen Ausnahmen abgesehen, in der Folge durchweg auf das Dreikörperproblem beschränken.

Die Ergebnisse dieser Untersuchungen werden trotz dieser Einschränkung für die astronomische Praxis stets wertvoll sein. In der Tat gibt es zahlreiche Aufgaben der praktischen Himmelsmechanik, bei deren Lösung die Erfahrungen nützlich verwendet werden können, die aus der mathematischen Analyse der Dreikörperbewegung hervorgegangen sind. Zwar ist, wie

[1]) Vorlesungen über Dynamik. Königsberg 1843.

schon im vorigen Abschnitt bemerkt wurde, die Zahl der Massenpunkte im Sonnensystem weit größer als drei, doch kann man in Einzelfällen durch Beschränkung auf $n = 3$ schon sehr gute Annäherung an den tatsächlichen Sachverhalt erzielen. Einen typischen Sonderfall dieser Art stellt das System Erde–Mond–Sonne dar: Die Bewegung des Mondes um die Erde wird durch die Anziehungskraft der weit entfernten, aber sehr massereichen Sonne erheblich gestört, während die störenden Kräfte der übrigen Körper des Sonnensystems im Vergleich dazu äußerst gering sind. Die Bedingungen für einen praktischen Fall des Dreikörperproblems sind also weitgehend erfüllt. Die strenge Theorie der Mondbewegung erfordert allerdings die Berücksichtigung der Planetenstörungen, außerdem aber noch die Berechnung jener Einflüsse, die von der dynamischen Abplattung des Erdkörpers und der durch sie bedingten, in der Mondentfernung noch merklichen Anisotropie des irdischen Gravitationspotentials herrühren.

Ein weiterer Anwendungsbereich betrifft die Bewegung eines Planetoiden oder Kometen um die Sonne unter dem störenden Einfluß eines großen Planeten, z. B. des Jupiter. Hier kann man die Masse des kleinen Körpers gegen die der Sonne und des Störplaneten ganz vernachlässigen und die heliozentrische Bewegung des letzteren als bekannt voraussetzen. Das Problem besteht dann nur noch aus der Frage nach der Bewegung der infinitesimalen Masse im Gravitationsfeld von Sonne und Planet. Es zeigt sich dann in praxi, daß die Ausdehnung der Untersuchung auf den Fall, daß mehrere Störplaneten vorhanden sind, also auf die im Sonnensystem tatsächlich gegebenen Verhältnisse, keine weiteren Schwierigkeiten grundsätzlicher Art mehr verursacht. Schließlich kann man als Spezialfall des Dreikörperproblems noch die Bewegung zweier großer Planeten mit Massen der gleichen Größenordnung um die Sonne betrachten, etwa die von Jupiter und Saturn. Die Bahnbewegung dieser beiden Planeten, deren wechselseitige Anziehungskräfte beträchtlich sind, wird durch die übrigen Planeten verhältnismäßig wenig gestört, so daß auch hier die Bedingungen des Dreikörperproblems mit guter Annäherung erfüllt sind.

Die eben genannten drei Fälle der Dreikörperbewegung unterscheiden sich durch die unterschiedliche Verteilung der Größenordnungen der drei Massen. Im ersten Fall (Sonne–Erde–Mond) sind die drei Massen (m_1, m_2, m_3) endlich, aber von verschiedener Größenordnung $(m_1 \gg m_2 \gg m_3)$. Im zweiten Fall (Sonne–Jupiter–Planetoid oder Komet) ist $m_1 \gg m_2$, aber $m_3 = 0$. Im letztgenannten Fall (Sonne–Jupiter–Saturn) ist $m_1 \gg m_2, m_1 \gg m_3$, aber m_2 und m_3 sind größenordnungsmäßig nicht sehr voneinander verschieden. Der mathematisch schwierigste Fall, daß alle drei Massen von gleicher Größenordnung sind, kommt im Sonnensystem nicht vor, wohl aber in dreifachen Sternsystemen. Aber dort liegen die Verhältnisse meist so, daß ein enges System von zwei großen Massen, etwa ein spektroskopischer Doppelstern, von einer dritten, ebenfalls großen Masse in sehr weitem Abstand umlaufen wird – ein Sonderfall, dessen mathematische Behandlung keine besonderen Schwierigkeiten bereitet, da man sowohl die Bewegung des engen Systems als auch die der dritten Masse um den Schwerpunkt des engen Systems mit sehr guter Annäherung als Zweikörperbewegung nach den KEPLERschen Gesetzen ansehen kann.

Wenn wir von dem letztgenannten Sonderfall, dem „stellaren Dreikörperproblem", absehen, uns also auf die im Sonnensystem anzutreffenden Verhältnisse beschränken, so ist eine der drei Massen (Sonne) stets überragend groß. Es ist dann vernünftig, den Koordinatenanfang in die Sonne zu verlegen, zumal der Massenmittelpunkt der drei Körper, den man bei Vernachlässigung der störenden Kräfte weiterer Himmelskörper als Ursprung eines Inertialsystems ansehen darf, der Beobachtung nicht unmittelbar zugänglich ist. Natürlich ist das „heliozentrische" Koordinatensystem mit dem Mittelpunkt der Sonne als Ursprung kein Inertialsystem mehr.

Auch wenn man sämtliche Körper des Sonnensystems berücksichtigt, deren Massen noch merkliche Störungskräfte ausüben, ist der Übergang von *absoluten* (auf den Schwerpunkt des Systems bezogenen) auf *relative* (auf die Sonne bezogene) Koordinaten von praktischem Nutzen. Es liegt dann ein n-Körperproblem vor (Sonne und $n-1$ Planeten), und es sei m_1, die Masse der Sonne, von der Größenordnung Null, während $m_2, m_3, \ldots, m_n$ von der ersten Ordnung sein mögen. Ferner seien

$$\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_1, \qquad (i = 2, 3, \ldots, n) \tag{XI; 12}$$

die relativen Ortsvektoren der Planeten in bezug auf die Sonne. Nach (XI; 1) kann man dann schreiben

$$\left\{\begin{aligned} \ddot{\mathfrak{p}}_i &= k^2 \left\{\frac{m_1}{r_{1i}^3}(\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_i) + \sum_{j=2}^{n}{}' \frac{m_j}{r_{ji}^3}(\mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_i)\right\}, \\ \ddot{\mathfrak{p}}_1 &= k^2 \left\{\frac{m_i}{r_{i1}}(\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_1) + \sum_{j=2}^{n}{}' \frac{m_j}{r_{j1}}(\mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_1)\right\}, \end{aligned}\right. \qquad (i = 2, 3, \ldots, n), \tag{XI; 13}$$

wobei das Symbol $\sum'$ bedeuten soll, daß der Summand $j = i$ auszulassen ist (in der ersten Gleichung fehlt dieser Summand eo ipso, in der zweiten ist er der Summe vorangestellt). Subtrahiert man nun die zweite Gleichung (XI; 13) von der ersten, berücksichtigt (XI; 12) und bedenkt, daß $\mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_j - \mathfrak{q}_i$ ist, so erhält man die Differentialgleichungen für die Relativbewegung der $n-1$ Planeten in der Form

$$\ddot{\mathfrak{q}}_i = k^2 \left\{-\frac{m_1 + m_i}{r_{i1}^3}\mathfrak{q}_i + \sum_{j=2}^{n}{}' m_j \left(\frac{\mathfrak{q}_j - \mathfrak{q}_i}{r_{ji}^3} - \frac{\mathfrak{q}_j}{r_{j1}^3}\right)\right\}, \quad (i = 2, 3, \ldots, n). \tag{XI; 14}$$

Nun ist aber die Summe, deren Summanden die Faktoren m_2 bis m_n (außer m_i) enthalten, gegen den ersten Term rechts, der $m_1 + m_i > m_1$ als Faktor enthält, klein von der Ordnung der Planetenmassen, die im Sonnensystem sämtlich kleiner als $10^{-3}\, m_1$ sind. Die Relativbewegung der Planeten genügt also in erster Näherung den Gleichungen des Zweikörperproblems

$$\ddot{\mathfrak{q}}_i = -k^2 \frac{m_1 + m_i}{r_{i1}^3}\mathfrak{q}_i, \qquad (r_{i1} = |\mathfrak{q}_i|), \tag{XI; 14a}$$

erfolgt also genähert in Kegelschnitten nach den KEPLERschen Gesetzen und erleidet durch die in (XI; 14) unter dem Summenzeichen zusammengefaßten,

von den Massen der übrigen Planeten bewirkten „Störungen" nur mehr oder weniger geringfügige Deformationen.

Beschränken wir uns auf den Fall $n = 3$, so kann man dem Gleichungssystem (XI; 14) eine sehr einfache symmetrische Form geben, die auch die Ableitung der bekannten Integrale äußerst einfach und elegant gestattet. Die drei (nunmehr beliebig großen) Massen seien m_i, m_j, m_k; die Indexfolge i, j, k soll irgendeine der drei zyklischen Permutationen der Folge 1, 2, 3 bedeuten. Sind dann $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j, \mathfrak{p}_k$ die absoluten, d.h. auf ein Inertialsystem, z.B. das des Schwerpunktes, bezogenen Ortsvektoren, so lauten nach (XI; 1) die Beschleunigungen von m_j und m_k

$$\text{(XI; 15)} \quad \left\{ \begin{aligned} \ddot{\mathfrak{p}}_j &= k^2 \left\{ \frac{m_k}{r_{kj}^3} (\mathfrak{p}_k - \mathfrak{p}_j) + \frac{m_i}{r_{ij}^3} (\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_j) \right\}, \\ \ddot{\mathfrak{p}}_k &= k^2 \left\{ \frac{m_i}{r_{ik}} (\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_k) + \frac{m_j}{r_{jk}^3} (\mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_k) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Ihre Differenz beträgt also

$$\text{(XI; 16)} \quad \begin{aligned} \ddot{\mathfrak{p}}_k - \ddot{\mathfrak{p}}_j &= -k^2 \left\{ \frac{m_j + m_k}{r_{kj}^3} (\mathfrak{p}_k - \mathfrak{p}_j) + m_i \left(\frac{\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_k}{r_{ik}^3} + \frac{\mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_i}{r_{ji}^3} \right) \right\} = \\ &= -k^2 \frac{m_i + m_j + m_k}{r_{kj}^3} (\mathfrak{p}_k - \mathfrak{p}_j) + \\ &\quad + m_i \left(\frac{\mathfrak{p}_k - \mathfrak{p}_j}{r_{kj}^3} + \frac{\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_k}{r_{ik}^3} + \frac{\mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_i}{r_{ji}^3} \right). \end{aligned}$$

Nun bezeichnen wir (Abb. 1) die Relativkoordinaten allgemein mit Hilfe der Vektoren

$$\text{(XI; 17)} \qquad \mathfrak{r}_i = \mathfrak{p}_k - \mathfrak{p}_j$$

und deren Beträge mit $r_i = r_{jk} = r_{kj}$. Sie sind so angeordnet, daß sie einen geschlossenen Vektorenzug bilden, und es ist daher

$$\text{(XI; 17a)} \qquad \mathfrak{r}_i + \mathfrak{r}_j + \mathfrak{r}_k = 0.$$

Ist (Abb. 1) S der Massenmittelpunkt und beziehen sich die $\mathfrak{p}_i$ auf S als Ursprung, so setze man

$$\text{(XI; 18)} \qquad \mathfrak{E}_i = [\mathfrak{p}_j \, \mathfrak{p}_k].$$

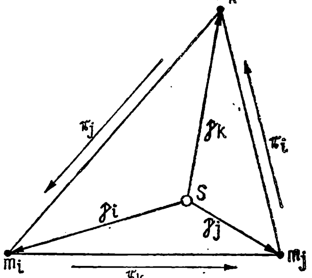


Abb. 1. Massendreieck und Schwerpunkt

Dann ist $|\mathfrak{E}_i| = E_i$ der doppelte Flächeninhalt des von $\mathfrak{p}_j$ und $\mathfrak{p}_k$ eingeschlossenen Dreiecks $\triangle \, S \, m_j \, m_k$, und der doppelte Inhalt des von den drei Massen selbst gebildeten Dreiecks (das wir kurz als „Massendreieck" bezeichnen wollen) ist $E = E_i + E_j + E_k$ und gleich dem Betrag von

$$\mathfrak{E} = \sum \mathfrak{E}_i = [\mathfrak{r}_j \, \mathfrak{r}_k] = [\mathfrak{r}_k \, \mathfrak{r}_i] = [\mathfrak{r}_i \, \mathfrak{r}_j].$$

Wegen des Schwerpunktssatzes (XI; 4) gilt statt (XI; 18) auch

$$m_j\, m_k\, \mathfrak{E}_i = [m_i\, \mathfrak{p}_i + m_k\, \mathfrak{p}_k,\, m_i\, \mathfrak{p}_i + m_j\, \mathfrak{p}_j] =$$
$$= m_i\, m_j\, [\mathfrak{p}_i\, \mathfrak{p}_j] + m_k\, m_i\, [\mathfrak{p}_k\, \mathfrak{p}_i] - m_j\, m_k\, [\mathfrak{p}_j\, \mathfrak{p}_k] =$$
$$= m_j\, m_k\, \mathfrak{E}_i + m_k\, m_i\, \mathfrak{E}_j + m_i\, m_j\, \mathfrak{E}_k - 2 m_j\, m_k\, \mathfrak{E}_i$$

oder

$$\text{(XI; 19)} \qquad \mathfrak{E}_i = m_i \frac{\sum m_j\, m_k\, \mathfrak{E}_i}{3 m_i\, m_j\, m_k} = m_i \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{\mathfrak{E}_i}{m_i} + \frac{\mathfrak{E}_j}{m_j} + \frac{\mathfrak{E}_k}{m_k}\right).$$

Die Inhalte der durch den Massenmittelpunkt erzeugten Teildreiecke des Massendreiecks verhalten sich also wie die ihnen gegenüberliegenden Massen: Es ist

$$\text{(XI; 20)} \qquad E_i : E_j : E_k = m_i : m_j : m_k$$

oder auch

$$\text{(XI; 20a)} \qquad E_i = m_i\, f(t); \quad E_j = m_j\, f(t); \quad E_k = m_k\, f(t),$$

wobei

$$f(t) = \frac{E}{m_i + m_j + m_k} = \frac{1}{\sum m}\, |\mathfrak{E}|$$

eine gewisse Funktion der Zeit bedeutet.

Wenn wir (XI; 17) in (XI; 16) einsetzen, lauten die Differentialgleichungen für die relativen Ortsvektoren (XI; 17)

$$\text{(XI; 21)} \qquad \ddot{\mathfrak{r}}_i = -k^2 \frac{M}{r_i^3}\, \mathfrak{r}_i + k^2\, m_i \left(\frac{\mathfrak{r}_i}{r_i^3} + \frac{\mathfrak{r}_j}{r_j^3} + \frac{\mathfrak{r}_k}{r_k^3}\right).$$

Das sind also drei vektorielle Differentialgleichungen, die man einzeln hinschreiben kann, wenn man die Indizes i, j, k zyklisch permutiert. Diese Gleichungen nehmen eine einfachere Form an, wenn man die Einheiten der Masse und der Zeit so festlegt, daß $M = \sum m_i = 1$ und $k = 1$ ist, und wenn man zur Abkürzung

$$\frac{1}{r_i^3} = \mu_i; \qquad \sum \frac{\mathfrak{r}_i}{r_i^3} = \sum \mu_i\, \mathfrak{r}_i = \mathfrak{R}$$

setzt. Dann erhält man (XI; 21) in der Form

$$\text{(XI; 22)} \qquad \boxed{\ddot{\mathfrak{r}}_i = -\mu_i\, \mathfrak{r}_i + m_i\, \mathfrak{R}}\,.$$

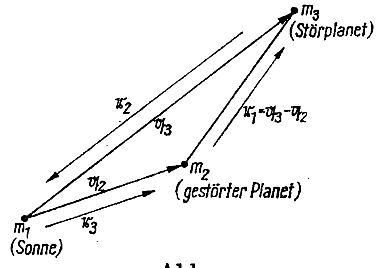


Abb. 2
Heliozentrische Relativkoordinaten

Daß die Gleichungen (XI; 21) bzw. (XI; 22) im Falle der gestörten Bewegung eines Planeten mit den Gleichungen (XI; 14) identisch sind, läßt sich leicht zeigen. Es seien m_1 die Sonne, m_2 der gestörte und m_3 der störende Planet (Abb. 2), also $\mathfrak{q}_2$ und $\mathfrak{q}_3$ die relativen (heliozentrischen) Ortsvektoren der beiden Planeten. Dann haben wir in (XI; 21) an Stelle der Vektoren $\mathfrak{r}_i$ und ihrer Beträge

$$\mathfrak{r}_2 = -\mathfrak{q}_3, \quad \mathfrak{r}_3 = \mathfrak{q}_2, \quad \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{q}_3 - \mathfrak{q}_2; \quad |\mathfrak{r}_2| = r_{13}, \quad |\mathfrak{r}_3| = r_{12}, \quad |\mathfrak{r}_1| = r_{23}$$

einzuführen und erhalten für $\mathfrak{q}_2$ die Differentialgleichung

$$\text{(XI; 23)} \qquad \ddot{\mathfrak{q}}_2 = -k^2 \frac{M - m_3}{r_{12}^3} + k^2 m_3 \left(\frac{\mathfrak{q}_3 - \mathfrak{q}_2}{r_{23}^3} - \frac{\mathfrak{q}_3}{r_{13}^3} \right),$$

die wegen $M - m_3 = m_1 + m_2$ in (XI; 14) übergeht, wenn man dort $i = 2$ setzt.

Von den drei Gleichungen (XI; 22) sind nur zwei voneinander unabhängig, da zwischen den $\mathfrak{r}_i$ die Beziehung (XI; 17a) besteht. Das System (XI; 22) erfordert also zwölf Integrale, übereinstimmend mit der Tatsache, daß von den 18 Integralen des allgemeinen Dreikörperproblems die sechs Schwerpunktsintegrale mittels der Gleichungen (XI; 16) eliminiert worden sind. Es enthält daher von den zehn bekannten Integralen nur noch vier.

Die Ableitung dieser Integrale gestaltet sich jetzt sehr einfach. Multipliziert man (XI; 22) vektoriell mit $\mathfrak{r}_i/m_i$ und summiert, so folgt

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{[\mathfrak{r}_i \ddot{\mathfrak{r}}_i]}{m_i} = - \sum_i \frac{[\mathfrak{r}_i \mathfrak{r}_i]}{m_i} \mu_i + \sum_i [\mathfrak{r}_i \mathfrak{R}] = 0,$$

da $[\mathfrak{r}_i \mathfrak{r}_i] = 0$ und $\sum \mathfrak{r}_i = 0$ ist. Durch Integration erhält man den *Drehimpulssatz* (Flächensatz) in der Form

$$\text{(XI; 24)} \qquad \sum_{i=1}^{3} \frac{[\mathfrak{r}_i \dot{\mathfrak{r}}_i]}{m_i} = \mathfrak{g}' = \text{const.}$$

Multipliziert man (XI; 22) skalar mit $\dot{\mathfrak{r}}_i/m_i$ und summiert, so ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{(\dot{\mathfrak{r}}_i \ddot{\mathfrak{r}}_i)}{m_i} = - \sum_i \frac{(\mathfrak{r}_i \dot{\mathfrak{r}}_i)}{m_i} \mu_i + \sum_i (\dot{\mathfrak{r}}_i \mathfrak{R}) = - \sum_i \frac{(\mathfrak{r}_i \dot{\mathfrak{r}}_i)}{m_i r_i^3},$$

da $\sum \dot{\mathfrak{r}}_i = 0$ ist. Da aber $(\mathfrak{r}_i \dot{\mathfrak{r}}_i)/r_i^3 = -d(1/r_i)/dt$ ist, folgt nach Integration der Energiesatz

$$\text{(XI; 25)} \qquad T' - U' = \frac{1}{2} \sum_i \frac{(\dot{\mathfrak{r}}_i \dot{\mathfrak{r}}_i)}{m_i} - \sum_i \frac{1}{m_i r_i} = h'.$$

Die Gleichungen (XI; 24) und (XI; 25) gelten unter der Voraussetzung, daß alle $m_i > 0$ sind, da andernfalls der eine oder andere Summand unendlich groß wird und das gleiche dann auch mit den Konstanten $\mathfrak{g}'$ und h' geschieht. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, die sich auch schon unangenehm bemerkbar macht, wenn eine der drei Massen gegen die anderen sehr klein ist, multipliziert man die Gleichungen mit $m_i m_j m_k = m_1 m_2 m_3$ und erhält dann

$$\text{(XI; 24a)} \qquad \sum m_j m_k [\mathfrak{r}_i \dot{\mathfrak{r}}_i] = m_1 m_2 m_3 \mathfrak{g}' = \mathfrak{g},$$

$$\text{(XI; 25a)} \qquad \frac{1}{2} \sum m_j m_k (\dot{\mathfrak{r}}_i \dot{\mathfrak{r}}_i) - \sum \frac{m_j m_k}{r_i} = m_1 m_2 m_3 h' = h.$$

Strebt etwa m_3 gegen 0 und streben gleichzeitig $\mathfrak{g}'$ und h' gegen ∞, so bleiben die Produkte $m_3 \mathfrak{g}'$ und $m_3 h'$ und daher auch $\mathfrak{g}$ und h endlich.

Die Bewegungsgleichungen (XI; 14) für die Koordinaten der heliozentrischen Ortsvektoren $\mathfrak{q}_i$ lassen sich nicht, wie dies für die auf den Schwerpunkt

des Systems bezogenen absoluten Örter der Fall war, in der einfachen Form (XI; 11) darstellen, so daß die Koordinaten

$$m_i \ddot{x}_i; \quad m_i \ddot{y}_i; \quad m_i \ddot{z}_i$$

der an den Massen m_i angreifenden Kräfte als partielle Ableitungen einer für das ganze System charakteristischen „Kräftefunktion" U nach den Koordinaten der Örter geschrieben werden können. Dagegen erkennt man leicht, daß man für jeden einzelnen Planeten m_i $(i = 2, 3, \ldots, n)$ ein Gleichungssystem

$$\text{(XI; 26)} \qquad m_i \ddot{x}_i = \frac{\partial U_i}{\partial x_i}; \quad m_i \ddot{y}_i = \frac{\partial U_i}{\partial y_i}; \quad m_i \ddot{z}_i = \frac{\partial U_i}{\partial z_i}$$

aufschreiben kann, in dem die U_i Funktionen der Relativkoordinaten sämtlicher $n - 1$ Planeten darstellen, die aber für jedes i verschiedene Gestalt haben. Wir zeigen dies am Beispiel des Dreikörperproblems. Die Differentialgleichungen für die x-Koordinaten (die für y und z haben die gleiche Form) lauten dann gemäß (XI; 14)

$$\text{(XI; 27)} \qquad \begin{cases} \ddot{x}_2 = k^2 \left\{ -\dfrac{m_1 + m_2}{r_{12}^3} x_2 + m_3 \left(\dfrac{x_3 - x_2}{r_{23}^3} - \dfrac{x_3}{r_{13}^3} \right) \right\}, \\[2ex] \ddot{x}_3 = k^2 \left\{ -\dfrac{m_1 + m_3}{r_{13}^3} x_3 + m_2 \left(\dfrac{x_2 - x_3}{r_{32}^3} - \dfrac{x_2}{r_{12}^3} \right) \right\}. \end{cases}$$

Setzt man[1])

$$\text{(XI; 27a)} \qquad \begin{cases} U_2 = k^2 m_2 \left\{ \dfrac{m_1 + m_2}{r_{12}} + m_3 \left(\dfrac{1}{r_{23}} - \dfrac{x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3}{r_{13}^3} \right) \right\}, \\[2ex] U_3 = k^2 m_3 \left\{ \dfrac{m_1 + m_3}{r_{13}} + m_2 \left(\dfrac{1}{r_{32}} - \dfrac{x_3 x_2 + y_3 y_2 + z_3 z_2}{r_{12}^3} \right) \right\} \end{cases}$$

mit

$$r_{12}^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2; \quad r_{13}^2 = x_3^2 + y_3^2 + z_3^2;$$
$$r_{23}^2 = r_{32}^2 = (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2,$$

so findet man bestätigt, daß

$$\text{(XI; 27b)} \qquad m_2 \ddot{x}_2 = \frac{\partial U_2}{\partial x_2}; \quad m_3 \ddot{x}_3 = \frac{\partial U_3}{\partial x_3}$$

ist und entsprechende Gleichungen für y_i und z_i gelten. Diese Differentialgleichungen lassen sich auch nicht in die kanonische Form (XI; 10) bringen. Denn führt man die Impulskoordinaten

$$u_i = m_i \dot{x}_i; \quad v_i = m_i \dot{y}_i; \quad w_i = m_i \dot{z}_i$$

und die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{3} \frac{u_i^2 + v_i^2 + w_i^2}{m_i}$$

[1]) U_2 geht in U_3 über, wenn man die Indizes 2 und 3 vertauscht.

ein, so ist

$$\dot{x}_i = \frac{\partial T}{\partial u_i}; \quad \dot{u}_i = m_i \ddot{x}_i = \frac{\partial U_i}{\partial x_i}$$

oder, mit $H_i = T - U_i$,

(XI; 28) $$\dot{x}_i = \frac{\partial H_i}{\partial u_i}; \quad \dot{u}_i = -\frac{\partial H_i}{\partial x_i};$$

Man bezeichnet das System (XI; 28) im Gegensatz zu (XI; 10) als *halbkanonisch*, da für jeden Körper eine besondere *charakteristische Funktion* H_i erforderlich ist.

93. *Der Satz vom Kräftezentrum*

Für das Dreikörperproblem gilt der merkwürdige Satz, daß die an den drei Massen m_i angreifenden Beschleunigungsvektoren stets nach einem gemeinsamen Zielpunkt streben, sich also so bewegen, als würden sie in jedem Augenblick von einem „Kräftezentrum" angezogen, das irgendwo im Innern des Massendreiecks oder auf seinem Rand liegt, aber im Gegensatz zum Schwerpunkt nicht „kräftefrei" ist, sondern eine im allgemeinen recht komplizierte Bewegung ausführt.

Es seien wie früher m_i, m_j, m_k die drei Massen, $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j, \mathfrak{p}_k$ die auf den Schwerpunkt bezogenen absoluten Ortskoordinaten, und es sei $|\mathfrak{r}_i| = |\mathfrak{p}_k - \mathfrak{p}_j| = r_i$. Dann lauten die Bewegungsgleichungen nach (XI; 15)

$$\begin{aligned} \ddot{\mathfrak{p}}_i &= k^2 \left\{ \frac{m_j}{r_k^3} (\mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_i) + \frac{m_k}{r_j^3} (\mathfrak{p}_k - \mathfrak{p}_i) \right\} = \\ &= \frac{k^2}{r_j^3 r_k^3} \{ m_j r_j^3 (\mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_i) + m_k r_k^3 (\mathfrak{p}_k - \mathfrak{p}_i) \} = \\ &= r_i^3 \frac{k^2}{(r_i r_j r_k)^3} \left\{ \sum_\nu m_\nu r_\nu^3 \mathfrak{p}_\nu - \mathfrak{p}_i \sum_\nu m_\nu r_\nu^3 \right\}. \end{aligned}$$

Führt man nun den symmetrisch gebauten Vektor

(XI; 29) $$\mathfrak{p}_0 = \frac{m_1 r_1^3 \mathfrak{p}_1 + m_2 r_2^3 \mathfrak{p}_2 + m_3 r_3^3 \mathfrak{p}_3}{m_1 r_1^3 + m_2 r_2^3 + m_3 r_3^3}$$

ein, der in derselben Ebene wie die Ortsvektoren liegt, so ist offenbar

(XI; 30) $$\ddot{\mathfrak{p}}_i = -k^2 r_i^3 \frac{\sum_\nu m_\nu r_\nu^3}{(r_1 r_2 r_3)^3} (\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_0).$$

Der Punkt $\mathfrak{p}_0$ hat also die Eigenschaft eines Kräftezentrums oder eines Zielpunktes der Beschleunigungsvektoren, und es gilt außerdem der Satz: Die Beschleunigung der Masse m_i ist proportional dem Produkt zwischen der dritten Potenz der m_i gegenüberliegenden Dreiecksseite und dem Abstand der Masse vom Kräftezentrum. Der Proportionalitätsfaktor

$$-k^2 \left\{ \frac{m_1}{r_2^3 r_3^3} + \frac{m_2}{r_3^3 r_1^3} + \frac{m_3}{r_1^3 r_2^3} \right\}$$

ist eine symmetrische Funktion der Massen und der dritten Potenzen der Dreiecksseiten und daher eine im allgemeinen recht komplizierte Funktion der Zeit.

Die auf das Kräftezentrum K bezogenen Ortsvektoren der drei Massen sind (Abb. 3)

$$\mathfrak{f}_i = \mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_0 = \frac{m_j r_j^3 (\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_j) + m_k r_k^3 (\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_k)}{m_i r_i^3 + m_j r_j^3 + m_k r_k^3}$$

oder

$$\mathfrak{f}_i = \frac{m_k r_k^3 \mathfrak{r}_j - m_j r_j^3 \mathfrak{r}_k}{\sum m_i r_i^3} = F_k \mathfrak{r}_j - F_j \mathfrak{r}_k,$$

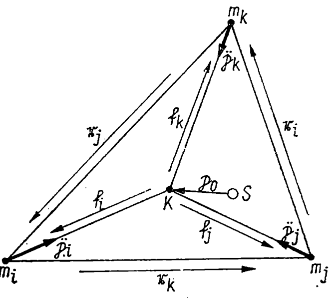


Abb. 3. Kräftezentrum

wo $F_i = m_i r_i^3 / \sum\limits_i m_i r_i^3$ gesetzt wird und $\sum\limits_i F_i = 1$ ist. Die doppelten Inhalte der von den $\mathfrak{f}_i$ gebildeten Dreiecke, also der durch das Kräftezentrum aus dem Massendreieck gebildeten Teildreiecke, sind die Beträge der Vektorprodukte

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_i = [\mathfrak{f}_j\, \mathfrak{f}_k] &= [F_i \mathfrak{r}_k - F_k \mathfrak{r}_i, F_j \mathfrak{r}_i - F_i \mathfrak{r}_j] = \\ &= F_i^2 [\mathfrak{r}_j\, \mathfrak{r}_k] + F_i F_j [\mathfrak{r}_k\, \mathfrak{r}_i] + F_i F_k [\mathfrak{r}_i\, \mathfrak{r}_j] = \\ &= F_i (F_i + F_j + F_k)\, \mathfrak{E} = - F_i\, \mathfrak{E},\end{aligned}$$

wo, wie in Abschnitt 92,

$$\mathfrak{E} = [\mathfrak{r}_j\, \mathfrak{r}_k] = [\mathfrak{r}_k\, \mathfrak{r}_i] = [\mathfrak{r}_i\, \mathfrak{r}_j]$$

der zur Ebene der drei Körper normale Vektor ist, dessen Betrag dem doppelten Inhalt des Massendreiecks gleich ist. Das Verhältnis der Inhalte der durch das Kräftezentrum gebildeten Teildreiecke ist demnach

$$\text{(XI; 31)} \qquad F_i : F_j : F_k = m_i r_i^3 : m_j r_j^3 : m_k r_k^3,$$

eine Gleichung, die ein bemerkenswertes Gegenstück zu (XI; 20) bildet.

Für $n > 3$ gilt der Satz vom Kräftezentrum nicht mehr. Das folgt aus einem Gegenbeispiel: Es seien m_1 und m_2 zwei endliche, m_3 eine unendlich kleine Masse. Dann liegt das Kräftezentrum offenbar auf der Verbindungsgeraden von m_1 und m_2, und zwar ist hier, wegen $m_3 = 0$, auch $F_3 = 0$. Es ist dann

$$\mathfrak{f}_1 = -F_2 \mathfrak{r}_3; \quad \mathfrak{f}_2 = F_1 \mathfrak{r}_3, \quad (F_1 + F_2 = 1),$$

und das Kräftezentrum teilt somit die Strecke $\overline{m_1 m_2}$ im Verhältnis

$$|\mathfrak{f}_1| : |\mathfrak{f}_2| = F_2 : F_1 = m_2 r_2^3 : m_1 r_1^3.$$

Die Lage des Kräftezentrums hängt demnach wesentlich vom Verhältnis $r_2 : r_1$ ab, d. h. vom Ort der infinitesimalen Masse m_3 in bezug auf die Lage der beiden endlichen. Tritt nun eine weitere unendlich kleine Masse m_4 hinzu, so ändert sich an den Kräften, die an m_1, m_2, m_3 angreifen, nichts. Der an m_4 angreifende Kraftvektor zielt aber nach einem Punkt der Strecke $\overline{m_1 m_2}$, der diese Strecke im Verhältnis $m_2 \varrho_2^3 : m_1 \varrho_1^3$ teilt, wenn $\varrho_2 : \varrho_1$ die Abstände der Masse m_4 von m_1 bzw. m_2 bezeichnen, und der im allgemeinen von dem ebenfalls auf

der Strecke $\overline{m_1 m_2}$ liegenden Zielpunkt der Beschleunigung von m_3 verschieden sein wird. Die vier Beschleunigungsvektoren werden sich also nur in dem ganz speziellen Fall in einem und demselben Punkte treffen, daß $\varrho_2 : \varrho_1 = r_2 : r_1$ ist.

94. *Der freie Fall*

Die Ergebnisse des vorigen Abschnitts regen zu der Frage an, ob oder unter welchen Bedingungen auch die Geschwindigkeitsvektoren $\dot{\mathfrak{p}}_i$ einen gemeinsamen Zielpunkt haben.

Hierzu ist zunächst zu bemerken, daß die an den m_i angreifenden Geschwindigkeitsvektoren im allgemeinen nicht in einer Ebene liegen, wie es für die Beschleunigungsvektoren und für die im Schwerpunkt angreifenden absoluten Ortsvektoren zutrifft. Sind aber zu irgendeinem Zeitpunkt $t = t_0$ die drei Vektoren $\dot{\mathfrak{p}}_i$ komplanar, so liegen sie in der gleichen Ebene wie die $\mathfrak{p}_i$ selbst. Dann folgt aber aus (XI; 1), wenn wir diese Gleichung fortgesetzt differenzieren, daß nicht nur die $\ddot{\mathfrak{p}}_i$ (was immer der Fall ist), sondern auch alle höheren Ableitungen der Ortsvektoren in derselben Ebene liegen. Ist dies aber für $t = t_0$ der Fall, so folgt aus der TAYLORschen Entwicklung

$$\mathfrak{p}_i(t) = \mathfrak{p}_i(0) + (t - t_0)\,\dot{\mathfrak{p}}_i(0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2\,\ddot{\mathfrak{p}}_i(0) + \frac{1}{6}(t - t_0)^3\,\dddot{\mathfrak{p}}_i(0) + \cdots,$$

daß die $\mathfrak{p}_i(t)$ und daher auch die $\dot{\mathfrak{p}}_i(t)$ beliebig lange in derselben Ebene bleiben, die dann wegen des Flächensatzes (XI; 5) mit der UVE identisch ist.

Wir dürfen uns also bei der Beantwortung der oben gestellten Frage auf das *ebene* Dreikörperproblem beschränken. Es seien die Örter der drei Massen durch die auf den Schwerpunkt bezogenen ebenen Vektoren $\mathfrak{p}_i(x_i, y_i)$ und die Geschwindigkeiten durch $\dot{\mathfrak{p}}_i(\dot{x}_i, \dot{y}_i)$ gegeben. Dann lauten die Gleichungen der drei Geraden, auf denen die in den Punkten $\mathfrak{p}_i$ angreifenden Vektoren $\dot{\mathfrak{p}}_i$ liegen,

$$y - y_i = \frac{\dot{y}_i}{\dot{x}_i}(x - x_i)$$

oder

$$\dot{y}_i x - \dot{x}_i y = x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i = g_i, \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{XI; 32}$$

Die Größen g_i kommen im Flächensatz (XI; 5) vor, der im Falle der ebenen Bewegung

$$\mathfrak{g} = \sum_{i=1}^{3} m_i[\mathfrak{p}_i\,\dot{\mathfrak{p}}_i] = \mathfrak{n}\sum_{i=1}^{3} m_i \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ \dot{x}_i & \dot{y}_i \end{vmatrix} = \mathfrak{n}\sum_i m_i g_i = \text{const}$$

geschrieben werden kann, wobei $\mathfrak{n}$ den zur Bewegungsebene normalen konstanten Einheitsvektor bezeichnet, und der daher in die skalare Gleichung

$$\sum m_i g_i = g = \text{const} \tag{XI; 33}$$

übergeht.

Die Bedingung dafür, daß sich die drei Geraden (XI; 32) in einem Punkt schneiden, ist

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_i & \dot{y}_i & g_i \\ \dot{x}_j & \dot{y}_j & g_j \\ \dot{x}_k & \dot{y}_k & g_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum m_i \dot{x}_i & \sum m_i \dot{y}_i & \sum m_i g_i \\ \dot{x}_j & \dot{y}_j & g_j \\ \dot{x}_k & \dot{y}_k & g_k \end{vmatrix} = 0 .$$

Berücksichtigt man die Schwerpunktssätze (XI; 4) und den Flächensatz (XI; 33), so folgt daraus

$$\text{(XI; 34)} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & g \\ \dot{x}_j & \dot{y}_j & g_j \\ \dot{x}_k & \dot{y}_k & g_k \end{vmatrix} = g(\dot{x}_j \dot{y}_k - \dot{x}_k \dot{y}_j) = 0 .$$

Diese Bedingung ist also erfüllt:

1. wenn $g = \sum m_i g_i = 0$ ist, also die Flächenkonstante verschwindet. Das tritt z.B. dann ein, wenn zu irgendeinem Zeitpunkt alle Geschwindigkeiten in bezug auf den Schwerpunkt des Systems Null sind, das System also in Ruhe ist. Die drei Körper beginnen dann, sich in freiem Fall aufeinander zu zu bewegen, und da $g = 0$ für alle Zeiten gilt, werden die Geschwindigkeitsvektoren für die ganze Dauer der Bewegung einen gemeinsamen Zielpunkt haben. Im Anfang der Bewegung ist dieser Zielpunkt, wie auch ohne Beweis einzusehen ist, mit dem Kräftemittelpunkt identisch. In der Tat ergibt sich folgendes: Der Schnittpunkt der drei Geraden (XI; 32) hat die Koordinaten

$$\text{(XI; 35)} \qquad x_0 = \frac{\dot{x}_j g_k - \dot{x}_k g_j}{\dot{x}_j \dot{y}_k - \dot{x}_k \dot{y}_j}; \quad y_0 = \frac{\dot{y}_j g_k - \dot{y}_k g_j}{\dot{x}_j \dot{y}_k - \dot{x}_k \dot{y}_j},$$

Ausdrücke, die unter den gegebenen Voraussetzungen unverändert bleiben, wenn man die Indizes j, k innerhalb der Folge i, j, k zyklisch vertauscht. Sind (im Zeitpunkt der Ruhe) alle Geschwindigkeiten Null, so nehmen diese Ausdrücke die unbestimmte Form $0:0$ an. Der Grenzwert von (XI; 35) für $\dot{\mathfrak{p}}_i \to 0$ ergibt sich, wenn man Zähler und Nenner so oft differenziert, bis sich von Null verschiedene Terme ergeben. Das ist aber nach zweimaliger Differentiation der Fall. Man erhält, da in dem angenommenen Fall auch die dritten Ableitungen der Koordinaten verschwinden, die Grenzwerte

$$x_0 \to \frac{\ddot{x}_j (x_k \ddot{y}_k - y_k \ddot{x}_k) - \ddot{y}_k (x_j \ddot{y}_j - y_j \ddot{x}_j)}{\ddot{x}_j \ddot{y}_k - \ddot{x}_k \ddot{y}_j}, \ \ldots,$$

die nach elementarer Rechnung, indem man die $\ddot{x}, \ddot{y}$ durch (XI; 14) ausdrückt, in die Koordinaten (XI; 29) des Kräftezentrums übergehen.

2. wenn die Flächenkonstante von Null verschieden ist, aber

$$\dot{x}_j \dot{y}_k - \dot{x}_k \dot{y}_j = 0$$

gilt. Da diese Beziehung, wenn überhaupt, wegen des Schwerpunktssatzes auch für die übrigen zyklischen Permutationen der Indizes erfüllt ist, ist sie gleichbedeutend mit

$$\frac{\dot{y}_i}{\dot{x}_i} = \frac{\dot{y}_j}{\dot{x}_j} = \frac{\dot{y}_k}{\dot{x}_k},$$

d. h., die drei Geschwindigkeiten haben gleiche oder entgegengesetzte Richtung. Der gemeinsame Zielpunkt liegt dann im Unendlichen. Aber dieser Fall ist uninteressant, da Parallelität der Geschwindigkeitsrichtungen, wenn überhaupt, immer nur für einzelne Zeitpunkte eintreten wird. Beständig wird dies nur zutreffen, wenn die Massenpunkte ständig auf einer Geraden liegen. Aber dann ist auch $g = 0$, und es gibt auch keinen besonders ausgezeichneten Geschwindigkeitszielpunkt, da die drei Geschwindigkeitsrichtungen ganz und für alle Zeiten zusammenfallen.

95. *Die Lagrangesche Funktion*

Multipliziert man die symmetrischen Differentialgleichungen (XI; 22) der Relativbewegung dreier Massen skalar mit $\mathfrak{r}_i/m_i$ und summiert über i, so erhält man

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{(\mathfrak{r}_i \ddot{\mathfrak{r}}_i)}{m_i} = -\sum_{i=1}^{3} \frac{(\mathfrak{r}_i \mathfrak{r}_i)}{m_i r_i^3} + \sum_{i=1}^{3} (\mathfrak{r}_i \mathfrak{R}) = -\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{m_i r_i} = -U'.$$

Andererseits ist aber

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{r}_i \mathfrak{r}_i) = 2(\mathfrak{r}_i \dot{\mathfrak{r}}_i),$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(\mathfrak{r}_i \mathfrak{r}_i) = \frac{1}{2}\frac{dr_i^2}{dt^2} = (\mathfrak{r}_i \ddot{\mathfrak{r}}_i) + (\dot{\mathfrak{r}}_i \dot{\mathfrak{r}}_i).$$

Setzt man also

$$J = \sum_{i=1}^{3} \frac{r_i^2}{m_i}, \tag{XI; 36}$$

so ist

$$\frac{1}{2}\ddot{J} = \sum_{i=1}^{3} \frac{(\dot{\mathfrak{r}}_i \dot{\mathfrak{r}}_i)}{m_i} - \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{m_i r_i} = 2T' - U', \tag{XI; 37}$$

wenn man – siehe (XI; 25) – mit T' die kinetische Energie und mit U' das Potential des Systems in Relativkoordinaten bezeichnet. Führt man nach (XI; 25) die Energiekonstante h' ein, so kann man statt (XI; 37) auch

$$\frac{1}{2}\ddot{J} = U' + 2h' = T' + h' \tag{XI; 38}$$

schreiben. Diese Gleichung ist schon von Lagrange angegeben worden, und man pflegt daher (XI; 36) auch die *Lagrangesche Funktion* zu nennen.

Die Lagrangesche Gleichung (XI; 38), deren Gültigkeit man auch für $n > 3$ leicht nachweisen kann, erlaubt wichtige Schlüsse über die Stabilität des Systems. Da nämlich U und T positive Größen sind (U ist immer > 0, solange nicht alle r_i unendlich groß sind; T kann gelegentlich Null werden, wenn alle Relativgeschwindigkeiten Null sind), so folgt, daß J niemals negativ beschleunigt wird, wenn $h' \geqq 0$ ist. In diesem Fall wächst J von einem gewissen Zeitpunkt an über alle Grenzen, d. h. aber, daß von den drei (oder n) Körpern mindestens einer ins Unendliche abwandert, so daß seine Abstände von den übrigen Körpern beliebig groß werden. Für die Stabilität eines Systems, d. h. dafür, daß

die in ihm enthaltenen Massenpunkte dauernd innerhalb einer Kugel von endlichem Radius um den Massenmittelpunkt verbleiben, ist also $h' < 0$ eine notwendige Bedingung. Andererseits ist diese Bedingung nicht hinreichend. Wenn nämlich nicht sämtliche r_i über alle Grenzen wachsen, sondern mindestens zwei Massen des Systems innerhalb gewisser Schranken beieinander verharren, also auch nur ein einziges r_i beständig kleiner als eine positive Konstante bleibt, so kann U' nicht beliebig klein werden, sondern es wird stets $U' > U'_0 > 0$ sein. Ist demnach h' negativ, aber $0 < |h'| < {}^1/_2 U'_0$, so bleibt das System instabil. Hingegen ist $h' < 0$ eine ausreichende Sicherung gegen *vollständige* Instabilität, d.h., es ist dann nicht möglich, daß sich *alle* Körper beliebig weit vom Massenmittelpunkt entfernen. Denn dann würde ja U' beliebig klein werden, von einem gewissen Zeitpunkt an also $U' + 2h'$ beständig negativ sein; $J(t)$ wäre von da ab also negativ gekrümmt und würde somit, entgegen der Annahme, irgendwann ein absolutes Maximum erreichen.

Führt man (nach LEVI-CIVITÀ und SUNDMAN) an Stelle der Zeit t eine neue unabhängige Variable u durch

$$\frac{du}{dt} = U' \tag{XI; 39}$$

ein, so läßt sich (XI; 38) in der Form

$$\frac{1}{2}\ddot{J} = \dot{u} + 2h'$$

schreiben. Diese Differentialgleichung besitzt das Integral

$$\frac{1}{2}\dot{J} = u + 2h'(t - t_0)$$

oder, da $\dot{J} = \frac{dJ}{du}\dot{u} = U'\frac{dJ}{du}$ ist,

$$\frac{1}{2}U'\frac{dJ}{du} = u + 2h'(t - t_0). \tag{XI; 40}$$

Für $n = 2$ geht die neue Variable in diejenige über, auf die wir bei der Analyse des Zweikörperproblems (s. Abschnitt 41) gestoßen waren und deren besondere Eigenschaften die elegante Lösung dieses Problems ermöglichten. Im Falle $n = 2$ wird, bis auf einen konstanten Faktor,

$$U' = \frac{1}{r},$$

wenn r den Abstand der beiden Massenpunkte bedeutet. Die Variable $u = u(t)$ ist also in diesem Fall durch

$$\dot{u} = \frac{1}{r}$$

definiert, also mit der in Abschnitt 41 eingeführten Variablen $q(t)$ identisch, die, wie dort gezeigt worden ist, der exzentrischen Anomalie E proportional

ist. Im elliptischen Fall der Zweikörperbewegung hatten wir, wenn a die große Halbachse der heliozentrischen Bahn des Planeten bedeutet,

$$\dot{E} = \frac{1}{r\sqrt{a}} = \frac{\dot{u}}{\sqrt{a}}; \quad E = \frac{u}{\sqrt{a}}$$

gefunden. Setzen wir nun, von einem allen diesen Größen gemeinsamen, von den Massen und der Gravitationskonstante abhängigen Faktor abgesehen,

$$J = r^2; \quad 2T' = V^2; \quad U' = \frac{1}{r}; \quad h' = T' - U' = \frac{1}{2}V^2 - \frac{1}{r} = -\frac{1}{2a},$$

so nimmt (XI; 40) die Form

$$\frac{1}{2r}\frac{dr^2}{du} = \frac{dr}{du} = u - \frac{1}{a}(t - t_0)$$

an, wo $t = t_0$ den Zeitpunkt darstellt, an dem $dr/du = u$ ist. Diese Gleichung ist aber mit der KEPLERschen Gleichung identisch. Denn da nach Gleichung (III; 55)

$$r = a(1 - e\cos E)$$

gilt, ist

$$\frac{dr}{du} = \frac{dr}{dE}\frac{1}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}\, e\sin E = \sqrt{a}E - \frac{t - t_0}{a}$$

oder

$$E - e\sin E = \frac{t - t_0}{a^{3/2}}.$$

K. BOHLIN hat, wie in Abschnitt 112 noch näher ausgeführt werden wird, die Gleichung (XI; 40) zu entsprechenden Untersuchungen im Fall $n = 3$ benutzt. Einem Vorschlag von R. VERNIČ zufolge wollen wir deshalb die Gleichung (XI; 40) das *BOHLINsche Integral* nennen.

Die LAGRANGEsche Funktion (XI; 36) ist übrigens, bis auf einen konstanten, von den drei Massen abhängigen Faktor, mit dem auf den Schwerpunkt des Systems bezogenen Trägheitsmoment

$$\Theta = \sum_{i=1}^{3} m_i(\mathfrak{p}_i\, \mathfrak{p}_i)$$

identisch. Es ist nämlich

$$J = \sum_{i=1}^{3} \frac{(\mathfrak{r}_i\, \mathfrak{r}_i)}{m_i} = \frac{1}{m_i\, m_j\, m_k} \sum m_j\, m_k (\mathfrak{p}_k - \mathfrak{p}_j)^2 =$$

$$= \frac{1}{m_i\, m_j\, m_k} \sum m_i\, m_k \{(\mathfrak{p}_j\, \mathfrak{p}_j) + (\mathfrak{p}_k\, \mathfrak{p}_k) - 2(\mathfrak{p}_j\, \mathfrak{p}_k)\}$$

oder, wenn man in den ersten beiden Summen die Indizes zyklisch vertauscht,

$$J = \frac{1}{m_i\, m_j\, m_k} \{\sum m_k\, m_i(\mathfrak{p}_k\, \mathfrak{p}_k) + \sum m_i\, m_j(\mathfrak{p}_j\, \mathfrak{p}_j) - 2\sum m_j\, m_k(\mathfrak{p}_j\, \mathfrak{p}_k)\}.$$

Andererseits ist nach dem Schwerpunktssatz

$$(\sum m_i \mathfrak{p}_i)^2 = \sum m_i^2 (\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_i) + 2 \sum m_j m_k (\mathfrak{p}_j \mathfrak{p}_k) = 0 .$$

Entnimmt man hieraus

$$-2 \sum m_j m_k (\mathfrak{p}_j \mathfrak{p}_k) = \sum m_i^2 (\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_i) ,$$

so erhält man, wie behauptet,

$$J = \frac{m_i + m_j + m_k}{m_i m_j m_k} \Theta .$$

96. *Transformation der Koordinaten. Die* Lagrange*schen Bewegungsgleichungen*

Es wird sich häufig als nützlich erweisen, von den rechtwinkligen (absoluten oder relativen) Koordinaten auf andere überzugehen, um unter bestimmten Umständen eine Vereinfachung der Bewegungsgleichungen und Erleichterungen bei der Integration zu erzielen. Die Transformationsformeln

$$\text{(XI; 41)} \qquad \left\{ \begin{aligned} x_i &= x_i (q_1, q_2, \ldots, q_{3n}; t), \\ y_i &= y_i (q_1, q_2, \ldots, q_{3n}; t), \\ z_i &= z_i (q_1, q_2, \ldots, q_{3n}; t), \end{aligned} \right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

durch die man die $3n$ rechtwinkligen Koordinaten x_i, y_i, z_i in die $3n$ neuen Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_{3n}$ überführt, können, wie in (XI; 41) angedeutet, die Zeit t explizit enthalten oder auch nicht.

Um die Bewegungsgleichungen, die durchweg Differentialgleichungen zweiter Ordnung sind, in den neuen Koordinaten aufzuschreiben, wird man die Gleichungen (XI; 41) zweimal differenzieren müssen. Lagrange hat aber gezeigt, daß man den Bewegungsgleichungen eine Form geben kann, zu deren Darstellung nur eine einmalige totale Differentiation nötig ist, während man im übrigen nur partiell zu differenzieren braucht, was immer einfacher ist und daher eine wesentliche Erleichterung der Rechnung bedeutet. Es seien allgemein im alten System die Ortsvektoren $\mathfrak{p}_i (x_i, y_i, z_i)$ der Massenpunkte m_i gegeben, und diese seien den Kräften $\mathfrak{K}_i (X_i, Y_i, Z_i)$ unterworfen. Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\text{(XI; 42)} \qquad m_i \ddot{\mathfrak{p}}_i = \mathfrak{K}_i , \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) .$$

Multipliziert man diese Gleichungen skalar mit den Vektoren $\partial \mathfrak{p}_i / \partial q_j$ und summiert über i, so erhält man die $3n$ Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\ddot{\mathfrak{p}}_i \frac{\partial \mathfrak{p}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathfrak{K}_i \frac{\partial \mathfrak{p}_i}{\partial q_j} \right), \qquad (j = 1, 2, \ldots, 3n) .$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\text{(XI; 43)} \quad P_j = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\dot{\mathfrak{p}}_i \frac{\partial \mathfrak{p}_i}{\partial q_j} \right); \quad Q_j = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\dot{\mathfrak{p}}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{p}_i}{\partial q_j} \right); \quad R_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathfrak{K}_i \frac{\partial \mathfrak{p}_i}{\partial q_j} \right),$$

so nehmen diese Gleichungen die Form

(XI; 44) $$\frac{d}{dt}P_j - Q_j = R_j, \qquad (j = 1, 2, \ldots, 3n)$$

an. Nun ist die „kinetische Energie" des Systems

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{\mathfrak{p}}_i\,\dot{\mathfrak{p}}_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2).$$

Drückt man T mittels (XI; 41) durch die neuen Koordinaten und deren Ableitungen nach der Zeit aus, setzt also

$$T = T(q_1, \ldots, q_{3n}; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{3n}; t),$$

so erhält man

(XI; 45) $$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\dot{\mathfrak{p}}_i \frac{\partial \dot{\mathfrak{p}}_i}{\partial q_j}\right); \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\dot{\mathfrak{p}}_i \frac{\partial \dot{\mathfrak{p}}_i}{\partial \dot{q}_j}\right).$$

Nun ist aber nach (XI; 41)

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t}.$$

Da nun die $\partial x_i/\partial q_k$, $\partial x_i/\partial t$, ebenso wie die x_i selbst, nur von den q, allenfalls noch von t, aber nicht von den $\dot{q}$ abhängen, so folgt daraus

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

und, da dasselbe auch für die y und z gilt,

$$\frac{\partial \dot{\mathfrak{p}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathfrak{p}_i}{\partial q_j},$$

mithin nach (XI; 45) und (XI; 43)

(XI; 46) $$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\dot{\mathfrak{p}}_i \frac{\partial \mathfrak{p}_i}{\partial q_j}\right) = P_j.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k\,\partial q_j}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t\,\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right),$$

also, da dasselbe auch für die übrigen Geschwindigkeitskoordinaten gilt,

$$\frac{\partial \dot{\mathfrak{p}}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{p}_i}{\partial q_j}\right),$$

und daher nach (XI; 45) und (XI; 43)

(XI; 47) $$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\dot{\mathfrak{p}}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{p}_i}{\partial q_j}\right) = Q_j.$$

Setzt man (XI; 46) und (XI; 47) in (XI; 44) ein, so erhält man schließlich

(XI; 48) $$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = R_j}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, 3n).$$

Das sind die *Lagrangeschen Bewegungsgleichungen.* Um sie explizit für irgendein System von Koordinaten hinzuschreiben, braucht man nur die kinetische Energie T und die Größen R_j in den gewünschten Koordinaten auszudrücken. Dazu ist aber nur erforderlich, die Transformationsformeln für die Koordinaten und deren erste Ableitungen zu besitzen; alles übrige erfolgt durch partielle Differentiation.

In den dynamischen Problemen der Himmelsmechanik sind die Kräfte $\mathfrak{K}_i$ durchweg konservativ, d.h., sie haben ein Potential U, und es ist

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}; \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Daraus folgt aber

$$R_j = \sum_{i=1}^{n}\left(\mathfrak{K}_i \frac{\partial \mathfrak{p}_i}{\partial q_j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left\{X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right\} = \frac{\partial U}{\partial q_j},$$

wo $U = U(q_1, \ldots, q_{3n}; t)$ in den meisten Fällen die Zeit t nicht explizit enthält. Man kann (XI; 48) dann in der Form

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{\partial (T+U)}{\partial q_j}$$

schreiben oder auch, wenn

$$S = T + U$$

gesetzt wird, in der Form

(XI; 49) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{\partial S}{\partial q_j},$$

da ja U die $\dot{q}_j$ nicht enthält. Es ist also, wenn wir den Differentialoperator

$$L_{q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}$$

einführen, für jedes System, dessen Bewegung ausschließlich von konservativen Kräften beherrscht wird,

$$L_{q_j} S = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, 3n).$$

Allgemeiner ist

$$L_{q_j} S + R_j = 0,$$

wobei die R_j jetzt die Koordinaten derjenigen Kräfte bezeichnen, die kein Potential besitzen und daher nicht mit in S hineingenommen werden können.

Als einfaches Beispiel führen wir hier die Transformation der Bewegungsgleichungen des Zweikörperproblems von rechtwinkligen auf Polarkoordinaten an. Hier ist, wenn man die Einheiten der Zeit und der Masse geeignet wählt,

$$U = \frac{1}{r}; \quad \ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}; \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Die Transformationsformeln der rechtwinkligen Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten einer der beiden Massen relativ zur anderen auf Polarkoordinaten r, φ, ϑ lauten dann

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi\cos\vartheta; & \dot{x} &= \dot{r}\cos\varphi\cos\vartheta - r\,\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\vartheta - r\,\dot{\vartheta}\cos\varphi\sin\vartheta,\\
y &= r\cos\varphi\sin\vartheta; & \dot{y} &= \dot{r}\cos\varphi\sin\vartheta - r\,\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\vartheta + r\,\dot{\vartheta}\cos\varphi\cos\vartheta,\\
z &= r\sin\varphi; & \dot{z} &= \dot{r}\sin\varphi + r\,\dot{\varphi}\cos\varphi.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$U = \frac{1}{r}; \quad 2T = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + (r\,\dot{\varphi})^2 + (r\,\dot{\vartheta}\cos\varphi)^2,$$

und man erhält durch partielle Differentiation

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial r} &= -\frac{1}{r^2}; & \frac{\partial T}{\partial r} &= r\,\dot{\varphi}^2 + r\,\dot{\vartheta}^2\cos^2\varphi; & \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} &= \dot{r},\\
\frac{\partial U}{\partial \varphi} &= 0; & \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= -r\,\dot{\vartheta}^2\cos\varphi\sin\varphi; & \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= r^2\,\dot{\varphi},\\
\frac{\partial U}{\partial \vartheta} &= 0; & \frac{\partial T}{\partial \vartheta} &= 0; & \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} &= r^2\,\dot{\vartheta}\cos^2\varphi.
\end{aligned}$$

Nach (XI; 49) lauten dann die Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten

$$\text{(XI; 50)} \quad \begin{cases} \ddot{r} = r\,\dot{\varphi}^2 + r\,\dot{\vartheta}^2\cos^2\varphi - \dfrac{1}{r^2},\\[2mm] \dfrac{d}{dt}(r^2\,\dot{\varphi}) = -r^2\,\dot{\vartheta}^2\sin\varphi\cos\varphi; \quad \dfrac{d}{dt}(r^2\,\dot{\vartheta}\cos^2\varphi) = 0. \end{cases}$$

Eine zweite Anwendung, auf deren Ergebnisse wir in der Folge häufig zurückkommen werden, betrifft den Übergang von einem ebenen Koordinatensystem auf ein anderes, das sich um den Koordinatenanfang mit konstanter Winkelgeschwindigkeit dreht. Es seien x, y die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes im festen System, ξ, η diejenigen im rotierenden System, das sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit n im positiven Sinne drehen möge. Ist $t = 0$ ein Zeitpunkt, an dem die Achsen beider Systeme sich decken, so bilden sie allgemein den Winkel $\psi = n\,t$ miteinander, und es gelten die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned}
x &= \xi\cos\psi - \eta\sin\psi,\\
y &= \xi\sin\psi + \eta\cos\psi
\end{aligned}$$

und ihre Ableitungen nach der Zeit

$$\dot{x} = (\dot{\xi} - n\,\eta)\cos\psi - (\dot{\eta} + n\,\xi)\sin\psi,$$
$$\dot{y} = (\dot{\xi} - n\,\eta)\sin\psi + (\dot{\eta} + n\,\xi)\cos\psi.$$

Aus

$$U = \frac{1}{r}; \quad (r^2 = \xi^2 + \eta^2),$$

$$2T = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + 2n(\xi\,\dot{\eta} - \eta\,\dot{\xi}) + n^2(\xi^2 + \eta^2)$$

erhält man dann durch partielle Differentiation

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = -\frac{\xi}{r^3}; \quad \frac{\partial T}{\partial \xi} = n(\dot{\eta} + n\,\xi),$$
$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = -\frac{\eta}{r^3}; \quad \frac{\partial T}{\partial \eta} = -n(\dot{\xi} - n\,\eta),$$
$$\frac{\partial U}{\partial \dot{\xi}} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = \dot{\xi} - n\,\eta,$$
$$\frac{\partial U}{\partial \dot{\eta}} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} = \dot{\eta} + n\,\xi$$

und auf Grund der LAGRANGEschen Gleichungen

$$\text{(XI; 51)} \quad \left\{ \begin{aligned} \ddot{\xi} - 2n\dot{\eta} &= \xi\left(n^2 - \frac{1}{r^3}\right) = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}, \\ \ddot{\eta} + 2n\,\dot{\xi} &= \eta\left(n^2 - \frac{1}{r^3}\right) = \frac{\partial \Omega}{\partial \eta}, \end{aligned} \right.$$

wobei

$$\Omega = \frac{1}{r} + \frac{1}{2} n^2 r^2 = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} + \frac{1}{2} n^2(\xi^2 + \eta^2)$$

gesetzt ist.

97. *Die Elimination der Knoten. JACOBIsche Koordinaten*

Der Drehimpulssatz (XI; 24) läßt sich umformen, wenn man die zwischen den Relativkoordinaten $\mathfrak{r}_i$ bestehende Beziehung (XI; 17a) berücksichtigt. Der Satz verliert dann zwar seine Symmetrie, es kommen aber in ihm dann nur voneinander unabhängige Variable vor. Man setze also wie in Abschnitt 92

$$\mathfrak{q}_2 = \mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1 = \quad \mathfrak{r}_3 \quad \text{als Ortsvektor von } m_2 \text{ bezüglich } m_1,$$
$$\mathfrak{q}_3 = \mathfrak{p}_3 - \mathfrak{p}_1 = -\mathfrak{r}_2 \quad \text{als Ortsvektor von } m_3 \text{ bezüglich } m_1,$$

und es ist ferner

$$\mathfrak{q}_3 - \mathfrak{q}_2 = -(\mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_3) = \mathfrak{r}_1.$$

Führt man demnach $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}_3$ als unabhängige Variable ein, so erhält man statt (XI; 24)

$$\frac{1}{m_1}[\mathfrak{q}_3 - \mathfrak{q}_2, \dot{\mathfrak{q}}_3 - \dot{\mathfrak{q}}_2] + \frac{1}{m_2}[\mathfrak{q}_3\,\dot{\mathfrak{q}}_3] + \frac{1}{m_3}[\mathfrak{q}_2\,\dot{\mathfrak{q}}_2] = \mathfrak{g}$$

oder

$$\varkappa_2[\mathfrak{q}_2\,\dot{\mathfrak{q}}_2] + \varkappa_3[\mathfrak{q}_3\,\dot{\mathfrak{q}}_3] = \mathfrak{g} + \varkappa_1\{[\mathfrak{q}_3\,\dot{\mathfrak{q}}_2] + [\mathfrak{q}_2\,\dot{\mathfrak{q}}_3]\} \tag{XI; 52}$$

mit

$$\varkappa_1 = \frac{1}{m_1}; \quad \varkappa_2 = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3}; \quad \varkappa_3 = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Ist nun m_1 die Masse der Sonne und sind m_2, m_3 Planetenmassen von geringerer Größenordnung, so ist der rechts auftretende Faktor $\varkappa_1$ klein gegen $\varkappa_2, \varkappa_3$, und es gilt daher genähert

$$\sum_{i=2}^{3} \varkappa_i[\mathfrak{q}_i\,\dot{\mathfrak{q}}_i] = \sum_{i=2}^{3} \varkappa_i\,\mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}. \tag{XI; 53}$$

Die drei Vektoren

$$\mathfrak{g}; \quad \mathfrak{g}_2 = [\mathfrak{q}_2\,\dot{\mathfrak{q}}_2]; \quad \mathfrak{g}_3 = [\mathfrak{q}_3\,\dot{\mathfrak{q}}_3]$$

sind also mit guter Annäherung komplanar. Multipliziert man (XI; 53) vektoriell mit $\mathfrak{g}$, so erhält man

$$\varkappa_2[\mathfrak{g}_2\,\mathfrak{g}] + \varkappa_3[\mathfrak{g}_3\,\mathfrak{g}] = 0. \tag{XI; 54}$$

Nun sind aber die Vektorprodukte $\mathfrak{g}_i = [\mathfrak{q}_i\,\dot{\mathfrak{q}}_i]$ normal zu den durch $\mathfrak{q}_i$ und $\dot{\mathfrak{q}}_i$ bestimmten Ebenen, die man als die *instantanen Bahnebenen* der Planeten bezeichnen kann, und der Drehimpulsvektor $\mathfrak{g}$ ist normal zur unveränderlichen Ebene des Systems. Daraus folgt, wie auch Abb. 4 lehrt, daß die Vektoren $[\mathfrak{g}_i\,\mathfrak{g}]$ nach dem aufsteigenden Knoten der instantanen Bahnebenen in bezug auf die UVE zeigen. Da die Faktoren $\varkappa_2, \varkappa_3$ positiv sind, besagt (XI; 54), daß die Richtung nach dem aufsteigenden Knoten der Bahn von m_2 mit der nach dem absteigenden Knoten der Bahn von m_3 zusammenfällt und umgekehrt. Die Längen der aufsteigenden Knoten der beiden instantanen Bahnebenen erfüllen also, bis auf Abweichungen von der Ordnung der Planetenmassen, die Bedingung

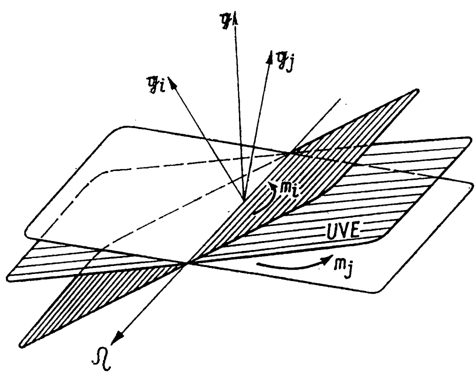


Abb. 4. JACOBIscher Knotensatz

$$☊_3 = ☊_2 \pm 180°. \tag{XI; 55}$$

Man nennt (XI; 55) den *JACOBIschen Knotensatz* oder den *Satz von der Elimination der Knoten*, da es mit seiner Hilfe möglich ist, von den zwölf instantanen Bahnelementen der beiden Planeten in bezug auf die UVE eins zu eliminieren.

Da der JACOBIsche Knotensatz für die heliozentrischen Planetenkoordinaten nur genähert gilt, liegt die Frage nahe, ob es möglich ist, durch eine geeignete Koordinatentransformation zu erreichen, daß er streng erfüllt ist. In der Tat läßt sich zeigen, daß es eine große Mannigfaltigkeit solcher Transformationen

gibt, die man durch vernünftige Bedingungen einschränken darf. Wir nehmen z. B. an, daß neue Ortsvektoren $\mathfrak{q}_2'$, $\mathfrak{q}_3'$ der beiden Planeten durch

(XI; 56) $$\mathfrak{q}_2' = \mathfrak{q}_2 - \alpha\,\mathfrak{q}_3; \quad \mathfrak{q}_3' = \mathfrak{q}_3 - \beta\,\mathfrak{q}_2$$

definiert werden, wo α, β zwei Konstanten bedeuten, deren Wahl wir uns noch vorbehalten. Dann ist $\mathfrak{q}_2'$ ein Vektor, der von einem noch zu bestimmenden Punkt der Strecke $\overline{m_1 m_3}$ nach m_2 führt; ebenso führt $\mathfrak{q}_3'$ von einem noch geeignet wählbaren Punkt der Strecke $\overline{m_1 m_2}$ nach m_3. Durch Auflösung der linearen Gleichungen (XI; 56) nach $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}_3$ erhält man

(XI; 57) $$\begin{cases} (1 - \alpha\beta)\,\mathfrak{q}_2 = \mathfrak{q}_2' + \alpha\,\mathfrak{q}_3', \\ (1 - \alpha\beta)\,\mathfrak{q}_3 = \beta\,\mathfrak{q}_2' + \mathfrak{q}_3', \end{cases}$$

und setzt man dies in (XI; 52) ein, so führt eine einfache Rechnung auf

$$[\mathfrak{q}_2'\,\dot{\mathfrak{q}}_2']\,(\varkappa_2 + \beta^2\varkappa_3 - 2\beta\,\varkappa_1) + [\mathfrak{q}_3'\,\dot{\mathfrak{q}}_3']\,(\alpha^2\varkappa_2 + \varkappa_3 - 2\alpha\,\varkappa_1) =$$
$$= \mathfrak{g}\,(1 - \alpha\beta)^2 + \{[\mathfrak{q}_2'\,\dot{\mathfrak{q}}_3'] + [\mathfrak{q}_3'\,\dot{\mathfrak{q}}_2']\}\,\{(1 + \alpha\beta)\,\varkappa_1 - \alpha\,\varkappa_2 - \beta\,\varkappa_3\}.$$

Diese Gleichung erhält die gewünschte Gestalt

(XI; 58) $$M_2[\mathfrak{q}_2'\,\dot{\mathfrak{q}}_2'] + M_3[\mathfrak{q}_3'\,\dot{\mathfrak{q}}_3'] = \mathfrak{g},$$

wenn

(XI; 59) $$M_2 = \frac{\varkappa_2 + \beta^2\varkappa_3 - 2\beta\,\varkappa_1}{(1 - \alpha\beta)^2}; \quad M_3 = \frac{\alpha^2\varkappa_2 + \varkappa_3 - 2\alpha\,\varkappa_1}{(1 - \alpha\beta)^2}$$

gesetzt wird und α, β die Bedingung

(XI; 60) $$(1 + \alpha\beta)\,\varkappa_1 = \alpha\,\varkappa_2 + \beta\,\varkappa_3$$

erfüllen. Die einfachste und vernünftigste der unendlich vielen Möglichkeiten, unter den Wertepaaren α, β eine Auswahl zu treffen, führt auf die von JACOBI angegebene Lösung (JACOBIsche Koordinaten). Er setzt entweder $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$. Dann ist nach (XI; 60)

$$\text{a)}\quad \alpha = 0; \qquad \beta = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_3} = \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

$$\text{b)}\quad \alpha = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} = \frac{m_3}{m_1 + m_3}; \quad \beta = 0,$$

und die neuen Ortsvektoren sind gemäß (XI; 56) in diesen beiden Fällen

$$\text{a)}\quad \mathfrak{q}_2' = \mathfrak{q}_2; \qquad \mathfrak{q}_3' = \mathfrak{q}_3 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\,\mathfrak{q}_2,$$

$$\text{b)}\quad \mathfrak{q}_2' = \mathfrak{q}_2 - \frac{m_3}{m_1 + m_3}\,\mathfrak{q}_3; \quad \mathfrak{q}_3' = \mathfrak{q}_3.$$

Im Falle (a) wird also der Ort von m_2 auf die Sonne m_1, der von m_3 aber auf den Massenmittelpunkt S von m_1 und m_2 bezogen (Abb. 5). Im Falle (b) sind lediglich die Rollen von m_2 und m_3 vertauscht, so daß wir uns weiterhin auf den Fall (a) beschränken dürfen. Es ist dann nach (XI; 59)

$$M_2 = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_3(m_1 + m_2)}; \quad M_3 = \frac{m_1 + m_2}{m_1\,m_2}.$$

Wenn eine der drei Massen sehr klein gegen die anderen ist, wird einer der Faktoren M_i sehr groß. Um die Singularität auszuschließen, die eintritt, wenn diese Masse (etwa m_3) gegen Null strebt, ist es zweckmäßig, (XI; 58) mit

$$\frac{1}{M_2 M_3} = \frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

zu multiplizieren. Man erhält dann

$$\text{(XI; 61)} \qquad \mu_2[\mathfrak{q}_2' \dot{\mathfrak{q}}_2'] + \mu_3[\mathfrak{q}_3' \dot{\mathfrak{q}}_3'] = \frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}\, \mathfrak{g} = \mathfrak{G}$$

mit

$$\mu_2 = \frac{1}{M_3} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}; \quad \mu_3 = \frac{1}{M_2} = \frac{m_3(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Setzt man noch

$$\text{(XI; 62)} \qquad m_1 = \lambda_1; \quad m_1 + m_2 = \lambda_2; \quad m_1 + m_2 + m_3 = \lambda_3$$

und bezeichnet jetzt die JACOBIschen Ortsvektoren mit $\mathfrak{q}$, da eine Verwechslung mit den heliozentrischen Relativkoordinaten nicht mehr zu befürchten ist, so nimmt der Knotensatz, der ja nur eine Übertragung des Drehimpulssatzes auf JACOBIsche Koordinaten darstellt, die Form

$$\text{(XI; 63)} \qquad \sum_{i=2}^{3} \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\, m_i [\mathfrak{q}_i \dot{\mathfrak{q}}_i] = \mathfrak{G}$$

an. Entsprechende Umformungen erhält man auch für die kinetische Energie und die LAGRANGEsche Funktion, die in JACOBIschen Koordinaten – ebenso wie im Inertialsystem des Schwerpunktes – als einfache quadratische Funktionen der Orts- und Geschwindigkeitsvektoren erscheinen, in denen nur (Vektor- oder skalare) Produkte der Form $a_i b_i$, nicht aber solche von der Form $a_j b_k$ $(j \neq k)$ auftreten, während dies im System der heliozentrischen Relativkoordinaten, wie (XI; 52) zeigt, nicht zutrifft. Den Beweis dafür, der auch für $n > 3$ gilt, werden wir im nächsten Abschnitt nachtragen.

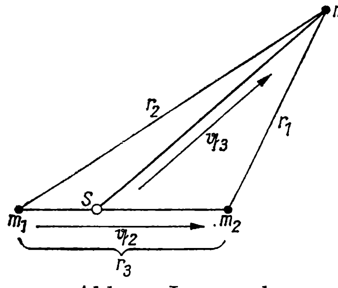


Abb. 5. JACOBIsche Koordinaten (3 Körper)

Weniger einfach ist in den JACOBIschen Koordinaten die Gestalt der Bewegungsgleichungen. Setzen wir nach (XI; 57) mit $\alpha = 0$

$$\mathfrak{q}_2 = \mathfrak{q}_2'; \quad \mathfrak{q}_3 = \mathfrak{q}_3' + \beta\, \mathfrak{q}_2'$$

in (XI; 27) ein, so ergibt sich

$$\frac{1}{k^2}\ddot{\mathfrak{q}}_2' = -\frac{m_1 + m_2}{r_3^3}\mathfrak{q}_2' + m_3\left\{\frac{\mathfrak{q}_3' + (\beta - 1)\,\mathfrak{q}_2'}{r_1^3} - \frac{\mathfrak{q}_3' + \beta\,\mathfrak{q}_2'}{r_2^3}\right\},$$

$$\frac{1}{k^2}(\ddot{\mathfrak{q}}_3' + \beta\,\ddot{\mathfrak{q}}_2') = -\frac{m_1 + m_3}{r_2^3}(\mathfrak{q}_3' + \beta\,\mathfrak{q}_2') + m_2\left\{\frac{\mathfrak{q}_2'(1 - \beta) - \mathfrak{q}_3'}{r_1^3} - \frac{\mathfrak{q}_2'}{r_3^3}\right\}.$$

Eliminiert man aus der zweiten Gleichung $\ddot{\mathfrak{q}}_2'$ mittels der ersten, setzt wie oben $\beta = m_2/(m_1 + m_2)$ und läßt wieder die Striche bei $\mathfrak{q}_i'$ weg, so erhält man nach elementarer Rechnung

$$\text{(XI; 64)} \quad \left\{ \begin{aligned} \ddot{\mathfrak{q}}_2 &= -k^2 \frac{m_1 + m_2}{r_3^3} \mathfrak{q}_2 - k^2 m_3 \left\{ \frac{\mathfrak{q}_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \mathfrak{q}_3 \left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) \right\}, \\ \ddot{\mathfrak{q}}_3 &= -k^2 \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 + m_2} \left\{ \mathfrak{q}_3 \left(\frac{m_2}{r_1^3} + \frac{m_1}{r_2^3} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \mathfrak{q}_2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

98. *Jacobische Koordinaten im n-Körperproblem*

Die Ergebnisse des vorigen Abschnitts lassen sich ohne Schwierigkeit auf Systeme von beliebig vielen Massenpunkten übertragen. Setzt man allgemein

$$\lambda_i = m_1 + m_2 + \cdots + m_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

und definiert man (Abb. 6) die relativen Ortsvektoren $\mathfrak{q}_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ so, daß der Ortsvektor von m_i vom Massenmittelpunkt S_{i-1} der Massen $m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}$ aus nach m_i führt, so gelten die Differentialgleichungen

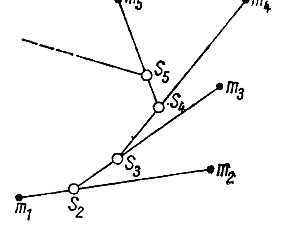


Abb. 6. JACOBIsche Koordinaten (n Körper)

$$\text{(XI; 65)} \quad \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} m_i \ddot{\xi}_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \ldots, \quad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

wo

$$U = k^2 \sum_{k>j} \frac{m_j m_k}{r_{jk}}$$

das Potential des Systems bedeutet, und es existieren die Integrale

$$\text{(XI; 66)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{i=2}^{n} \mu_i [\mathfrak{q}_i \dot{\mathfrak{q}}_i] = \mathfrak{g} = \text{const}, \\ &\frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n} \mu_i (\dot{\mathfrak{q}}_i \dot{\mathfrak{q}}_i) - U = h = \text{const}, \end{aligned} \right. \qquad \left(\mu_i = \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} m_i \right).$$

Um dies zu zeigen, drücken wir die JACOBIschen Ortsvektoren $\mathfrak{q}_i$ durch die absoluten, auf den Schwerpunkt bezogenen Ortsvektoren $\mathfrak{p}_i$ aus. Es ist dann

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_2 &= \mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1, \\ \mathfrak{q}_3 &= \mathfrak{p}_3 - \frac{m_1 \mathfrak{p}_1 + m_2 \mathfrak{p}_2}{m_1 + m_2}, \\ \mathfrak{q}_4 &= \mathfrak{p}_4 - \frac{m_1 \mathfrak{p}_1 + m_2 \mathfrak{p}_2 + m_3 \mathfrak{p}_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

oder auch

$$\text{(XI; 67)} \quad \begin{cases} \lambda_1 \mathfrak{q}_2 = -m_1 \mathfrak{p}_1 + \lambda_1 \mathfrak{p}_2, \\ \lambda_2 \mathfrak{q}_3 = -m_1 \mathfrak{p}_1 - m_2 \mathfrak{p}_2 + \lambda_2 \mathfrak{p}_3, \\ \lambda_3 \mathfrak{q}_4 = -m_1 \mathfrak{p}_1 - m_2 \mathfrak{p}_2 - m_3 \mathfrak{p}_3 + \lambda_3 \mathfrak{p}_4, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \lambda_{n-1} \mathfrak{q}_n = -m_1 \mathfrak{p}_1 - m_2 \mathfrak{p}_2 - m_3 \mathfrak{p}_3 - \cdots - m_{n-1} \mathfrak{p}_{n-1} + \lambda_{n-1} \mathfrak{p}_n. \end{cases}$$

Daneben besteht die Schwerpunktsrelation

$$\text{(XI; 68)} \quad 0 = m_1 \mathfrak{p}_1 + m_2 \mathfrak{p}_2 + m_3 \mathfrak{p}_3 + \cdots + m_{n-1} \mathfrak{p}_{n-1} + m_n \mathfrak{p}_n.$$

Die Gleichungen (XI; 67) und (XI; 68) gestatten, die $\mathfrak{p}_i$ als lineare Funktionen der $\mathfrak{q}_i$ darzustellen. Addiert man (XI; 68) zu der letzten Gleichung (XI; 67), so erhält man auch

$$\text{(XI; 69)} \quad \lambda_{n-1} \mathfrak{q}_n = (\lambda_{n-1} + m_n) \mathfrak{p}_n = \lambda_n \mathfrak{p}_n, \quad \text{also} \quad \mathfrak{p}_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \mathfrak{q}_n.$$

Außerdem entsteht, wenn man die Differenzen je zweier aufeinanderfolgender Gleichungen (XI; 67) bildet, die Rekursionsformel

$$\lambda_{i-1} \mathfrak{q}_i - \lambda_{i-2} \mathfrak{q}_{i-1} = \lambda_{i-1} (\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_{i-1})$$

oder

$$\text{(XI; 70)} \quad \mathfrak{p}_{i-1} = \mathfrak{p}_i - \mathfrak{q}_i + \frac{\lambda_{i-2}}{\lambda_{i-1}} \mathfrak{q}_{i-1} = \mathfrak{p}_i - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \mathfrak{q}_i - \frac{m_i}{\lambda_i} \mathfrak{q}_i + \frac{\lambda_{i-2}}{\lambda_{i-1}} \mathfrak{q}_{i-1}.$$

Beginnt man mit (XI; 69), so führt (XI; 70) unmittelbar auf die Lösung von (XI; 67, 68):

$$\text{(XI; 71)} \quad \begin{cases} \mathfrak{p}_n = \dfrac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \mathfrak{q}_n, \\ \mathfrak{p}_{n-1} = -\dfrac{m_n}{\lambda_n} \mathfrak{q}_n + \dfrac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \mathfrak{q}_{n-1}, \\ \mathfrak{p}_{n-2} = -\dfrac{m_n}{\lambda_n} \mathfrak{q}_n - \dfrac{m_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \mathfrak{q}_{n-1} + \dfrac{\lambda_{n-3}}{\lambda_{n-2}} \mathfrak{q}_{n-2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \mathfrak{p}_2 = -\dfrac{m_n}{\lambda_n} \mathfrak{q}_n - \dfrac{m_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \mathfrak{q}_{n-1} - \dfrac{m_{n-2}}{\lambda_{n-2}} \mathfrak{q}_{n-2} - \\ \qquad - \cdots - \dfrac{m_3}{\lambda_3} \mathfrak{q}_3 + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \mathfrak{q}_2, \\ \mathfrak{p}_2 - \mathfrak{q}_2 = \mathfrak{p}_1 = -\dfrac{m_n}{\lambda_n} \mathfrak{q}_n - \dfrac{m_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \mathfrak{q}_{n-1} - \dfrac{m_{n-2}}{\lambda_{n-2}} \mathfrak{q}_{n-2} - \\ \qquad - \cdots - \dfrac{m_3}{\lambda_3} \mathfrak{q}_3 - \dfrac{m_2}{\lambda_2} \mathfrak{q}_2. \end{cases}$$

Lineare Gleichungen mit denselben Koeffizienten bestehen natürlich auch zwischen den Ableitungen beliebig hoher Ordnung von $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}_i$. Bezeichnet man mit $\mathfrak{p}_i'$, $\mathfrak{q}_i'$; $\mathfrak{p}_i''$, $\mathfrak{q}_i''$ zwei Ableitungen irgendwelcher Ordnung von $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}_i$, so bilde man die (nach Belieben skalaren oder vektoriellen) Produkte

$$m_i\,\mathfrak{p}_i'\,\mathfrak{p}_i''$$

und summiere über i. Dann erhält man nach (XI; 71)

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\mathfrak{p}_i'\,\mathfrak{p}_i'' = \sum_{i=2}^{n} A_{ii}\,\mathfrak{q}_i'\,\mathfrak{q}_i'' + \sum_{j\neq k} A_{jk}\,\mathfrak{q}_j'\,\mathfrak{q}_k'',$$

und es ist offensichtlich

$$A_{ii} = \sum_{\nu=1}^{i-1} m_\nu \left(\frac{m_i}{\lambda_i}\right)^2 + m_i\left(\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\right)^2 = \frac{m_i}{\lambda_i^2}\left(m_i \sum_{\nu=1}^{i-1} m_\nu + \lambda_{i-1}^2\right) = m_i\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} = \mu_i,$$

$$A_{jk} = \sum_{\nu=1}^{j-1} m_\nu \frac{m_j\,m_k}{\lambda_j\,\lambda_k} - m_j\frac{\lambda_{j-1}\,m_k}{\lambda_j\,\lambda_k} = \frac{m_j\,m_k}{\lambda_j\,\lambda_k}\left(\sum_{\nu=1}^{j-1} m_\nu - \lambda_{j-1}\right) = 0, \qquad (k \neq j).$$

Daher ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\mathfrak{p}_i'\,\mathfrak{p}_i'' = \sum_{i=2}^{n} \mu_i\,\mathfrak{q}_i'\,\mathfrak{q}_i'',$$

eine Beziehung, mit deren Hilfe die Behauptungen (XI; 66) unmittelbar aus den Integralen (XI; 5) und (XI; 8) folgen. Außerdem sind auch das auf den Schwerpunkt bezogene Trägheitsmoment des Systems

$$\Theta = \sum_{i=1}^{n} m_i(\mathfrak{p}_i\,\mathfrak{p}_i) = \sum_{i=2}^{n} \mu_i(\mathfrak{q}_i\,\mathfrak{q}_i)$$

und die ihm proportionale LAGRANGEsche Funktion J in den JACOBIschen Koordinaten von der gleichen einfachen Form.

Die JACOBIschen Relativkoordinaten haben also die Eigenschaft, daß die mit den Massen m_i als „Gewichte" gebildeten homogenen quadratischen Formen in den absoluten Koordinaten in entsprechend gestaltete, mit den Gewichten

$$\mu_i = m_i\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}, \qquad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

gebildete Formen der JACOBIschen Koordinaten übergehen.

Schließlich läßt sich auch zeigen, daß die Differentialgleichungen der in JACOBIschen Koordinaten ausgedrückten Relativbewegung die Form

$$\text{(XI; 72)} \qquad \mu_i\,\ddot{\xi}_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}; \quad \mu_i\,\ddot{\eta}_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}; \quad \mu_i\,\ddot{\zeta}_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}$$

besitzen, daß also die mit den Massenfunktionen μ_i multiplizierten Beschleunigungskoordinaten sich als partielle Ableitungen einer einzigen, für das ganze

System charakteristischen Funktion U schreiben lassen. Für die absoluten Koordinaten gilt ja nach (XI; 11)

$$m_i \ddot{x}_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad m_i \ddot{y}_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}; \quad m_i \ddot{z}_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}$$

mit

$$U = k^2 \sum_{j>i} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}; \quad r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2.$$

Es ist aber nach (XI; 67)

$$\lambda_{i-1} \ddot{\mathfrak{q}}_i = -\sum_{\nu=1}^{i-1} m_\nu \ddot{\mathfrak{p}}_\nu + \lambda_{i-1} \ddot{\mathfrak{p}}_i,$$

also

$$\text{(XI; 73)} \qquad \mu_i \ddot{\xi}_i = \frac{m_i}{\lambda_i} \lambda_{i-1} \ddot{\xi}_i = -\frac{m_i}{\lambda_i} \sum_{\nu=1}^{i-1} \frac{\partial U}{\partial x_\nu} + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \frac{\partial U}{\partial x_i}.$$

Andererseits ist nach (XI; 71)

$$x_i = x_i(\xi_i, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n) \quad \text{für} \quad i = 2, 3, \ldots, n,$$
$$x_1 = x_1(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n).$$

Man hat also

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_i} = \sum_{\nu=1}^{i-1} \frac{\partial U}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial \xi_i} + \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_i}.$$

Setzt man hierin gemäß (XI; 71)

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial \xi_i} = -\frac{m_i}{\lambda_i}, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, i-1); \quad \frac{\partial x_i}{\partial \xi_i} = \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i},$$

so ergibt sich

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_i} = -\frac{m_i}{\lambda_i} \sum_{\nu=1}^{i-1} \frac{\partial U}{\partial x_\nu} + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \frac{\partial U}{\partial x_i},$$

also wegen (XI; 73)

$$\mu_i \ddot{\xi}_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i},$$

was zu beweisen war.

Im Falle $n = 3$ erhält man die Differentialgleichungen (XI; 64) leicht durch partielle Differentiation von

$$U = k^2 \left(\frac{m_2 m_3}{r_1} + \frac{m_3 m_1}{r_2} + \frac{m_1 m_2}{r_3} \right)$$

nach den Jacobischen Koordinaten. Dazu ist nur notwendig, die r_i in diesen Koordinaten auszudrücken, was (siehe Abb. 5) auf die Beziehungen

$$r_1^2 = \left(\mathfrak{q}_3 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathfrak{q}_2 \right)^2; \quad r_2^2 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathfrak{q}_2 + \mathfrak{q}_3 \right)^2; \quad r_3^2 = \mathfrak{q}_2^2$$

führt. Die Ausführung dieser elementaren, wenn auch etwas umständlichen Rechnung sei dem Leser überlassen.

99. *Das eingeschränkte Dreikörperproblem. Das* JACOBI*sche Integral*

Um den großen Schwierigkeiten auszuweichen, die sich der Lösung des Dreikörperproblems in seiner allgemeinen Form entgegenstellen, kann man versuchen, die Problemstellung zu vereinfachen, indem man gewisse einschränkende Voraussetzungen über Art und Bewegung des Systems macht. Man kann z.B. annehmen, daß sich die drei Körper ständig in einer und derselben Ebene bewegen, die dann gleichzeitig die UVE des Systems ist. Das trifft nach Abschnitt 94 immer dann zu, wenn zu irgendeiner Zeit Orts- und Geschwindigkeitsvektoren komplanar sind, d.h. in der gleichen Ebene liegen. Sie tun es dann immer. In diesem *ebenen Dreikörperproblem* genügen, nach Berücksichtigung der Schwerpunktsintegrale, die vier ebenen Koordinaten zweier Massenpunkte relativ zum dritten oder zum Schwerpunkt des Systems (oder auch die JACOBIschen Koordinaten) vier unabhängigen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Es sind also zur Lösung des Problems acht Integrale nötig, von denen zwei bekannt sind: das Energieintegral und der Drehimpulssatz, der jetzt nur eine einzige skalare Beziehung liefert, da der konstante Vektor $\mathfrak{g}$ auf der Bewegungsebene senkrecht steht und somit Betrag und Vorzeichen allein zu seiner Charakterisierung ausreichen. Im ebenen Dreikörperproblem ist daher die Zahl der unbekannten Integrale sechs, d.h. um zwei geringer als im allgemeinen (räumlichen) Problem.

Obwohl durch die Beschränkung auf den Fall der ebenen Bewegung größere Einfachheit und Übersichtlichkeit der Formeln und daher auch eine merkliche Erleichterung numerischer Rechnungen erzielt wird, werden die eigentlichen Schwierigkeiten der Integration nicht wesentlich vermindert. Die Astronomen sind daher bestrebt gewesen, durch Spezialisierung der Bedingungen die Vereinfachungen noch weiter zu treiben. Unter den zahlreichen Möglichkeiten zur Schematisierung der Verhältnisse verdienen natürlich diejenigen den Vorzug, bei denen das vereinfachte System wenigstens annähernd Zustände wiedergibt, die man auch in der Natur antrifft. Tatsächlich fordern die Verhältnisse im Planetensystem zu solchen Vereinfachungen heraus: Wenn es sich etwa darum handelt, die von einem großen Planeten (z.B. Jupiter) gestörte Bewegung eines Planetoiden um die Sonne zu untersuchen, so wird man berücksichtigen, daß die Masse des Planetoiden gegenüber denjenigen der Sonne und des störenden Planeten verschwindend klein ist, daß die Neigung der Planetoidenbahn gegen die Bahnebene des Jupiter (im allgemeinen) klein ist und daß der Jupiter eine nur schwach exzentrische Bahn um die Sonne beschreibt. Man wird daher wesentliche Eigenschaften der Bewegung eines Planetoiden unter dem störenden Einfluß eines großen Planeten (cum grano salis gilt das auch für die Bewegung eines Satelliten um seinen Zentralplaneten, die von der Sonne gestört wird) bereits dann erfassen, wenn man das Problem durch folgende schematische Annahmen spezialisiert:

1. Das System der drei Körper besteht aus zwei endlichen Massen m_1, m_2 und einer unendlich kleinen Masse $m_3 = 0$, deren Attraktion auf die beiden anderen Massen vernachlässigt werden darf.

2. Die beiden endlichen Massen führen also eine ungestörte KEPLERsche Bewegung um den gemeinsamen Schwerpunkt aus, der gleichzeitig der Massenmittelpunkt des ganzen Systems ist. Insbesondere kann man diese Bewegung auch als kreisförmig ansehen. Das Verhältnis der beiden Massen $m_2 : m_1$ ist beliebig wählbar – im Falle Jupiter–Sonne ist es von der Größenordnung $1 : 10^3$.

3. Die unendlich kleine Masse bewegt sich in derselben Ebene wie die beiden endlichen.

Dieser Sonderfall des Dreikörperproblems, in dem also die Masse des gestörten Körpers, die Neigung seiner Bahn gegen die des Störplaneten und die Bahnexzentrizität des letzteren vernachlässigt werden, wird nach H. POINCARÉ als das „*problème restreint*" (das *eingeschränkte Dreikörperproblem*, engl. „*restricted problem*") bezeichnet. Da die Bewegung der beiden endlichen Massen vorgegeben ist, reduziert sich die eigentliche Aufgabe auf die Ermittlung der Bewegung von m_3. Für die beiden ebenen Koordinaten dieses Massenpunktes sind also zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung aufzustellen, die vier unabhängige Integrale erfordern. Unter ihnen befindet sich aber keines der bekannten; denn wegen $m_3 = 0$ beziehen sich der Energiesatz und der Drehimpulssatz lediglich auf die Bewegung von m_1 und m_2 um den gemeinsamen Schwerpunkt bzw. umeinander, während m_3 zu den Ausdrücken für diese beiden Integrale keinen Beitrag liefert, ebensowenig wie für die Definition des Massenmittelpunktes. Dagegen gibt es, wie unten gezeigt werden soll, im „problème restreint" ein neues Integral, das nach seinem Entdecker das *JACOBIsche Integral* heißt und das sich algebraisch aus Bestandteilen zusammensetzt, die formal ähnlich den Ausdrücken für die Energie und den Drehimpuls aufgebaut sind. Durch das JACOBIsche Integral reduziert sich die Anzahl der unbekannten Integrale im eingeschränkten Dreikörperproblem auf drei. Gelänge es, noch ein weiteres Integral zu finden, so wäre das Problem nach dem bereits im Abschnitt 92 ausgesprochenen Satz von JACOBI durch einfache Quadraturen über bereits bekannte Funktionen lösbar. In der Tat: Besäße man außer dem JACOBIschen Integral, das eine algebraische Beziehung zwischen den vier Koordinaten $(x, y; \dot{x}, \dot{y})$ des Ortes und der Geschwindigkeit von m_3 darstellt, noch eine weitere Beziehung dieser Art, so ließe sich aus beiden

$$\dot{x} = f(x, y); \quad \dot{y} = g(x, y) \tag{XI; 74}$$

bestimmen. Eliminiert man aus diesen beiden Differentialgleichungen erster Ordnung das Differential der Zeit, so erhält man in

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g}{f} = h(x, y)$$

eine einzige Differentialgleichung für $y(x)$, die man, wie JACOBI gezeigt hat, mit Hilfe eines integrierenden Faktors lösen kann. Es gäbe also einen Multiplikator $M(x, y)$, so daß

$$0 = fM\,dy - gM\,dx = dF$$

ein vollständiges Differential wäre. Dann wäre

$$F(x, y) = \text{const}$$

die Gleichung der Bahn, und man fände, indem man mittels dieser Beziehung y bzw. x aus (XI; 74) eliminierte,

$$\dot{x} = \varphi(x); \quad \dot{y} = \psi(y)$$

und hieraus durch einfache Quadratur die endgültige Lösung

$$x = x(t); \quad y = y(t)$$

des Problems. Leider ist dieser Weg zu einer allgemeinen Lösung des eingeschränkten Dreikörperproblems nicht gangbar.

Zur Ableitung des *Jacobischen Integrals* nehmen wir an, daß die Bewegung des Systems in einem festen Koordinatensystem vor sich geht, dessen Anfangspunkt im Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) der beiden endlichen Massen m_1 (Sonne) und m_2 (Planet) liegt und dessen $x\,y$-Ebene mit der Ebene der Kreisbahnen dieser beiden Körper zusammenfällt. Der masselose Planetoid bewege sich frei im Raum; die Erfüllung der dritten Bedingung des „problème restreint" (Beschränkung der Bewegung des Planetoiden auf die $x\,y$-Ebene), die für die Existenz des Jacobischen Integrals nicht notwendig ist, behalten wir uns vor. Sind die Ortsvektoren der drei Körper

$$\mathfrak{p}_1(x_1, y_1, 0); \quad \mathfrak{p}_2(x_2, y_2, 0); \quad \mathfrak{p}(x, y, z),$$

so gelten für $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ die Schwerpunktsbeziehungen

$$\text{(XI; 75)} \qquad m_1\,\mathfrak{p}_1 + m_2\,\mathfrak{p}_2 = 0; \quad m_1\,\dot{\mathfrak{p}}_1 + m_2\,\dot{\mathfrak{p}}_1 = 0,$$

und es ist ferner

$$\text{(XI; 76)} \qquad \begin{cases} x_1 = -\alpha_1 \cos n\,t; & x_2 = \alpha_2 \cos n\,t, \\ y_1 = -\alpha_1 \sin n\,t; & y_2 = \alpha_2 \sin n\,t \end{cases}$$

mit

$$\alpha_1 = a\frac{m_2}{m_1 + m_2}; \quad \alpha_2 = a\frac{m_1}{m_1 + m_2}; \quad \alpha_1 + \alpha_2 = a,$$

wo a den konstanten Abstand $|\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1|$ der endlichen Massen bedeutet und

$$n = k\frac{\sqrt{m_1 + m_2}}{a^{3/2}}$$

die konstante Winkelgeschwindigkeit der Kreisbewegung ist [vgl. (II; 52)]. Es gilt daher

$$\text{(XI; 77)} \qquad \dot{\mathfrak{p}}_1 = \dot{\mathfrak{p}}_1(-n\,y_1, n\,x_1); \quad \dot{\mathfrak{p}}_2 = \dot{\mathfrak{p}}_2(-n\,y_2, n\,x_2)$$

und wegen (XI; 75) auch

$$\text{(XI; 78)} \qquad \dot{\mathfrak{p}}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\,\dot{\mathfrak{p}}_2.$$

Aus (XI; 77) und (XI; 78) folgen die Skalarprodukte

$$\text{(XI; 79)} \qquad \begin{cases} (\mathfrak{p}_1\,\dot{\mathfrak{p}}_1) = (\mathfrak{p}_1\,\dot{\mathfrak{p}}_2) = (\mathfrak{p}_2\,\dot{\mathfrak{p}}_1) = (\mathfrak{p}_2\,\dot{\mathfrak{p}}_2) = 0\,, \\ (\mathfrak{p}\,\dot{\mathfrak{p}}_2) = -n\,(x\,y_2 - y\,x_2)\,. \end{cases}$$

Die Bewegung des Planetoiden wird gemäß (XI; 15) durch die vektorielle Differentialgleichung

$$\text{(XI; 80)} \qquad \ddot{\mathfrak{p}} = -k^2 \left\{ \frac{m_1}{r_1^3}(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_1) + \frac{m_2}{r_2^3}(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_2) \right\}$$

dargestellt, wo r_1, r_2, die Abstände des Planetoiden von m_1, m_2, durch

$$\text{(XI; 81)} \qquad \begin{cases} r_1^2 = (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_1)^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2, \\ r_2^2 = (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_2)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + z^2 \end{cases}$$

gegeben sind.

Aus (XI; 80) folgt das Skalarprodukt

$$\text{(XI; 82)} \quad (\dot{\mathfrak{p}}\,\ddot{\mathfrak{p}}) = -k^2 \left\{ \frac{m_1}{r_1^3}(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_1,\, \dot{\mathfrak{p}} - \dot{\mathfrak{p}}_1) + \frac{m_2}{r_2^3}(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_2,\, \dot{\mathfrak{p}} - \dot{\mathfrak{p}}_2) \right\} - \\ - k^2 \left\{ \frac{m_1}{r_1^3}(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_1,\, \dot{\mathfrak{p}}_1) + \frac{m_2}{r_2^3}(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_2,\, \dot{\mathfrak{p}}_2) \right\},$$

dessen Integral

(XI; 83)

$$\frac{1}{2}(\dot{\mathfrak{p}}\,\dot{\mathfrak{p}}) = k^2 \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right) - k^2 \int \left\{ \frac{m_1}{r_1^3}(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_1,\, \dot{\mathfrak{p}}_1) + \frac{m_2}{r_2^3}(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_2,\, \dot{\mathfrak{p}}_2) \right\} dt$$

lautet. Der Integrand läßt sich wegen (XI; 78) und (XI; 79) in der Form

$$\text{(XI; 84)} \quad m_2 \left(-\frac{\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_1}{r_1^3} + \frac{\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_2}{r_2^3},\, \dot{\mathfrak{p}}_2 \right) = n\,m_2 (x\,y_2 - y\,x_2) \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right)$$

schreiben. Andererseits folgt aus (XI; 80), wenn man den auf der $x\,y$-Ebene senkrecht stehenden Einheitsvektor mit

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(0, 0, 1)$$

bezeichnet, das gemischte Produkt

$$(\mathfrak{n}\,\mathfrak{p}\,\ddot{\mathfrak{p}}) = x\,\ddot{y} - y\,\ddot{x} = -k^2 \left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3} \right) (\mathfrak{n}\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}) - k^2\,m_2 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) (\mathfrak{n}\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_2),$$

wobei im letzten Term rechts $\mathfrak{p}_1$ durch (XI; 75) eliminiert worden ist. Der erste Term rechts verschwindet aber wegen $(\mathfrak{n}\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}) = 0$, und da

$$(\mathfrak{n}\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_2) = x\,y_2 - y\,x_2$$

ist, folgt für den letzten Term der Gleichung (XI; 83)

$$-k^2 \int \left\{ \frac{m_1}{r_1^3}(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_1,\, \dot{\mathfrak{p}}_1) + \frac{m_2}{r_2^3}(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_2,\, \dot{\mathfrak{p}}_2) \right\} dt = n \int (x\,\ddot{y} - y\,\ddot{x})\,dt = \\ = n(x\,\dot{y} - y\,\dot{x}) + C,$$

wo C eine willkürliche Konstante, die *Jacobische Konstante*, bedeutet. In dem auf den Schwerpunkt des Systems bezogenen festen Koordinatensystem hat also das Jacobische Integral die Gestalt

$$\text{(XI; 85)} \quad C = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - k^2\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) - n(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Die Summe der beiden ersten Glieder rechts hat die Form eines Energieausdrucks, das letzte dagegen die Form eines Drehimpulses, doch sind beide Ausdrücke für sich hier nicht konstant.

Für gewisse Zwecke der praktischen Astronomie ist es nützlich, einen Ausdruck für das Jacobische Integral zu besitzen, der in einem heliozentrischen System gilt, sich also auf den Ort von m_1 als Anfangspunkt bezieht. Die heliozentrischen Koordinaten des Planetoiden seien

$$x_0 = x - x_1; \quad y_0 = y - y_1; \quad z_0 = z.$$

Dann ist

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2) + (\dot{x}_0\dot{x}_1 + \dot{y}_0\dot{y}_1) + \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) =$$

$$= \frac{1}{2}(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2) + n(x_1\dot{y}_0 - y_1\dot{x}_0) + \frac{n^2}{2}(x_1^2 + y_1^2),$$

$$-n(x\dot{y} - y\dot{x}) = -n(x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0) - n(x_1\dot{y}_0 - y_1\dot{x}_0) -$$

$$- n^2(x_1^2 + y_1^2 + x_0x_1 + y_0y_1)$$

und somit zunächst

$$\text{(XI; 86)} \quad C = \frac{1}{2}(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2) - k^2\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) - n(x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0) -$$

$$- \frac{n^2}{2}[x_1^2 + y_1^2 + 2(x_0x_1 + y_0y_1)].$$

Nun ist aber, wenn (Abb. 7) O der Schwerpunkt zwischen m_1 und m_2 ist und ϱ den Abstand des Planetoiden P von O, φ den Winkel $\sphericalangle POm_2$ bezeichnet und α_1, α_2 die konstanten Abschnitte auf $\overline{m_1m_2}$ sind,

$$r_1^2 = \varrho^2 + \alpha_1^2 + 2\varrho\alpha_1\cos\varphi,$$
$$r_2^2 = \varrho^2 + \alpha_2^2 - 2\varrho\alpha_2\cos\varphi,$$

also wegen $\alpha_1 + \alpha_2 = a$

$$r_1^2 - r_2^2 = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + 2\varrho a\cos\varphi.$$

Abb. 7
Das eingeschränkte Dreikörperproblem („problème restreint")

Andererseits ist

$$\varrho a\cos\varphi = x(x_2 - x_1) + y(y_2 - y_1) = (x_0 + x_1)(x_2 - x_1) + (y_0 + y_1)(y_2 - y_1)$$

und wegen (XI; 76)

$$\varrho a\cos\varphi = -\frac{a}{\alpha_1}x_1(x_0 + x_1) - \frac{a}{\alpha_1}y_1(y_0 + y_1) =$$

$$= -\frac{m_1 + m_2}{m_2}(x_0x_1 + y_0y_1 + \alpha_1^2).$$

Man erhält daher

$$x_1^2 + y_1^2 + 2(x_0 x_1 + y_0 y_1) = -2\frac{m_2}{m_1+m_2}\varrho\, a\cos\varphi - \alpha_1^2 =$$

$$= -\frac{m_2}{m_1+m_2}(r_1^2 - r_2^2 - \alpha_1^2 + \alpha_2^2) - \alpha_1^2.$$

Setzt man dies in (XI; 86) ein und schlägt die konstanten, α_1^2 und α_2^2 proportionalen Terme der JACOBIschen Konstante C zu, so ergibt sich schließlich wegen $^1/_2 n^2 m_2/(m_1+m_2) = {}^1/_2 m_2 k^2/a^{3/2}$

$$\text{(XI; 87)}\quad C = \frac{1}{2}(\dot x_0^2 + \dot y_0^2 + \dot z_0^2) - k^2\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) - n(x_0\dot y_0 - y_0\dot x_0) + $$

$$+ \frac{1}{2}\frac{m_2 k^2}{a^{3/2}}(r_1^2 - r_2^2).$$

Einfacher und eleganter gelingt die Ableitung des JACOBIschen Integrals, wenn man das im „problème restreint" gewöhnlich benutzte rotierende Koordinatensystem einführt, das sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit n in der Ebene der Kreisbahnbewegung dreht, so daß in ihm die beiden endlichen Massen die festen Örter

$$\mathfrak{p}_1\left(-a\frac{m_2}{m_1+m_2}, 0, 0\right);\quad \mathfrak{p}_2\left(0, a\frac{m_1}{m_1+m_2}, 0\right)$$

einnehmen. Es gelten also, wenn ξ, η, ζ die Koordinaten des Planetoiden im rotierenden System bezeichnen, die Transformationsformeln

$$x = \xi\cos n t - \eta\sin n t,$$
$$y = \xi\sin n t + \eta\cos n t,$$
$$z = \zeta.$$

Während also die Differentialgleichungen (XI; 80) im festen System

$$\ddot x = \frac{\partial U}{\partial x};\quad \ddot y = \frac{\partial U}{\partial y};\quad \ddot z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

mit

$$U = k^2\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right)$$

geschrieben werden können, erhält man nach Abschnitt 96, (XI; 51) im rotierenden System die Gleichungen

$$\text{(XI; 88)}\quad \begin{cases} \ddot\xi - 2n\dot\eta = \dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi}, \\ \ddot\eta + 2n\dot\xi = \dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta}, \\ \ddot\zeta \qquad\quad = \dfrac{\partial\Omega}{\partial\zeta}, \end{cases}\qquad \Omega = U + \frac{n^2}{2}(\xi^2 + \eta^2).$$

Durch Multiplikation mit den Geschwindigkeitskoordinaten $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ und Summierung erhält man sofort

$$\dot{\xi}\ddot{\xi} + \dot{\eta}\ddot{\eta} + \dot{\zeta}\ddot{\zeta} = \frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\dot{\xi} + \frac{\partial\Omega}{\partial\eta}\dot{\eta} + \frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}\dot{\zeta} = \frac{d\Omega}{\partial t},$$

eine Gleichung, die sich integrieren läßt und das JACOBIsche Integral

$$\text{(XI; 89)} \qquad \frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) = \Omega - \frac{1}{2}C$$

mit der willkürlichen Konstanten C liefert, das man auch in der einfachen Form

$$\text{(XI; 89a)} \qquad V^2 = 2\Omega - C$$

schreiben kann, wenn man mit V den Betrag des Geschwindigkeitsvektors im rotierenden System bezeichnet.

Für die Existenz des JACOBIschen Integrals ist wesentlich, daß die endlichen Massen Kreisbahnen beschreiben, also im rotierenden System feste Plätze einnehmen. Dagegen ist es unwesentlich, ob die infinitesimale Masse sich in der xy-Ebene bewegt oder eine räumliche Bahn beschreibt. Für den Theoretiker hat allerdings das ebene Problem ($z = \zeta \equiv 0$) den größeren Anreiz, da in ihm die (in ihrer Allgemeinheit immer noch unüberwindlichen) Schwierigkeiten auf ein Minimum reduziert sind.

Es ist unschwer einzusehen, daß die Bewegungsgleichungen (XI; 88) auch gelten, wenn die Rotation des Systems um m_1 oder m_2 erfolgt (heliozentrische oder planetozentrische Koordinaten). Man hat dann nur die Funktionen U und Ω in diesen Koordinaten auszudrücken. Erfolgt die Bewegung um m_1, so hat man statt (XI; 81)

$$r_1^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2; \quad r_2^2 = (\xi - a)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = r_1^2 - 2a\,\xi + a^2$$

zu setzen, und es ist

$$U = k^2\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right); \quad \Omega = U + \frac{n^2}{2}\left[\left(\xi - \frac{m_2}{m_1 + m_2}a\right)^2 + \eta^2\right]$$

oder, wenn der konstante Teil dieses Ausdrucks, der bei der partiellen Differentiation keinen Beitrag liefert, fortgelassen bzw. in die JACOBIsche Konstante einbezogen wird,

$$\Omega = U + \frac{n^2}{2}\left(\xi^2 - 2a\frac{m_2}{m_1 + m_2}\,\xi + \eta^2\right).$$

Durch geeignete Wahl der Zeiteinheit kann man immer erreichen, daß die Gravitationskonstante $k = 1$ wird. Außerdem kann man, um eine weitere Vereinfachung der Formeln zu erzielen, die Einheiten der Masse und der Länge etwa so festsetzen, daß $a = 1$ und $m_1 + m_2 = 1$ wird. Dann ist auch $n = 1$, und n verschwindet somit aus den Formeln (XI; 88).

100. *Das Hillsche Mondproblem*

Im vorigen Abschnitt wurde schon erwähnt, daß man als besonderen Fall des eingeschränkten Dreikörperproblems auch die Bewegung eines Satelliten um seinen Planeten auffassen kann, wenn man die Bedingungen, unter denen sie stattfindet, ein wenig einengt. Obwohl z.B. die großen Jupitermonde eine beachtliche Masse besitzen, kann doch diese gegen die Masse des Jupiter selbst als verschwindend angesehen werden: Das Massenverhältnis ist von der Größenordnung 10^{-4}. Auch sind die Bahnen dieser Satelliten gegen die des Planeten nur wenig geneigt, so daß man die durch die Sonne gestörte Satellitenbewegung in erster Näherung durch das ebene „problème restreint" beschreiben kann. Einer Analyse der Satellitenbahnen der übrigen Riesenplaneten müßte man allerdings das räumliche Problem zugrunde legen, da die Bahnneigungen dieser Körper zum Teil sehr groß sind – die der Uranussatelliten beträgt sogar nahezu 90°. Dagegen läßt sich die Bewegung des Erdmondes in großen Zügen als eben auffassen: Die Neigung der Mondbahnebene gegen die Erdbahnebene (die Ekliptik) beträgt nur rund 5°. Außerdem ist die Erdbahn mit ihrer geringen Exzentrizität (1:60) fast kreisförmig und die Masse des Mondes (etwa $^1/_{80}$ der Erdmasse), wenn auch keineswegs verschwindend klein, so doch so gering, daß der Massenmittelpunkt Erde–Mond sich noch dauernd im Innern des Erdkörpers befindet.

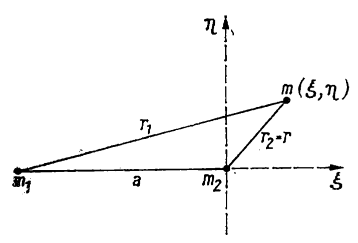


Abb. 8. Satellitenbewegung im ebenen „problème restreint"

Will man die Formeln des vorigen Abschnitts auf das Satellitenproblem anwenden (wobei wir hier besonders die im System Erde–Mond herrschenden Verhältnisse betrachten wollen), so wird man zweckmäßig den Ursprung des rotierenden Koordinatensystems in den Ort des Planeten (m_2 = Erde) verlegen. Vernachlässigen wir also die Masse des Mondes (m in Abb. 8), die Exzentrizität der Erdbahn um die Sonne (m_1) und die Neigung der Mondbahn gegen die Ebene der Ekliptik, so dürfen wir die Gleichungen (XI; 88)

$$\ddot{\xi} - 2n\dot{\eta} = \frac{\partial\Omega}{\partial\xi}; \quad \ddot{\eta} + 2n\dot{\xi} = \frac{\partial\Omega}{\partial\eta}$$

zugrunde legen. Dabei sind ξ, η jetzt die auf m_2 bezogenen Koordinaten von m, und es ist

$$n = k\frac{\sqrt{m_1 + m_2}}{a^{3/2}}; \quad \Omega(\xi,\eta) = \frac{n^2}{2}\left[\left(\xi + \frac{m_1}{m_1 + m_2}a\right)^2 + \eta^2\right] + \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}$$

mit

$$r_2^2 = r^2 = \xi^2 + \eta^2; \quad r_1^2 = (\xi + a)^2 + \eta^2 = a^2\left[1 + 2\frac{\xi}{a} + \left(\frac{r}{a}\right)^2\right].$$

Nun wählen wir die Zeiteinheit so, daß $n = 1$ wird, also der siderische Umlauf von m_2 um m_1 in 2π Zeiteinheiten vor sich geht. Das erreicht man z.B., wenn man die Erdmasse $m_2 = 1$ setzt und die Längeneinheit so wählt, daß

$a^3 = m_1 + m_2 = 1 + m_1$ ist. Es wird dann auch $k = 1$. Im Fall Erde–Sonne ist dann $a^3 \approx 330000$, also $a \approx 69$. Falls der infinitesimale Körper m der Erdmond ist, wird sein Abstand r von der Erde von der Größenordnung $69/390 \approx 0.177$ sein, da der Abstand Erde-Sonne 69 Längeneinheiten $= 390$ mittlere Mondabstände von der Erde beträgt. Wir werden aber annehmen, um auch Satelliten mit größerem Erdabstand in unsere Überlegungen einbeziehen zu können, daß r (und damit auch ξ und η) von der Größenordnung 1 sein darf.

Unter diesen Voraussetzungen wird

$$\Omega = \frac{1}{2}\left[\left(\xi + \frac{m_1}{a^2}\right)^2 + \eta^2\right] + \frac{m_1}{r_1} + \frac{1}{r} = m_1\left(\frac{1}{r_1} + \frac{\xi}{a^2}\right) + \frac{1}{r} + \frac{r^2}{2} + \frac{m_1^2}{2a^4}.$$

Entwickelt man a/r_1 in eine Potenzreihe:

$$\frac{a}{r_1} = \left(1 + 2\frac{\xi}{a} + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2} = 1 - \frac{\xi}{a} - \frac{r^2}{2a^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 + \cdots,$$

die nach Potenzen der kleinen Größen $\xi/a, r/a$ fortschreitet und rasch konvergiert, so findet man

$$\Omega = \frac{m_1}{a}\left[1 - \frac{\xi}{a} - \frac{r^2}{2a^2} + \frac{3}{2}\frac{\xi^2}{a^2} + \cdots\right] + \frac{m_1\xi}{a^2} + \frac{1}{r} + \frac{r^2}{2} + \frac{m_1^2}{2a^4}.$$

Die konstanten Terme m_1/a, $m_1^2/2a^4$ kann man fortlassen, da sie zu den partiellen Ableitungen in (XI; 88) keinen Beitrag leisten. Man erhält daher

$$\Omega = \frac{3}{2}m_1\frac{\xi^2}{a^3} + \frac{r^2}{2}\left(1 - \frac{m_1}{a^3}\right) + \frac{1}{r} + \langle \text{Glieder der Ordnung } m_1\frac{r^2}{a^4}, m_1\frac{r^3}{a^5}, \ldots\rangle =$$

$$= \frac{\xi^2}{2a^3}(2m_1 + a^3) + \frac{\eta^2}{2}\left(1 - \frac{m_1}{a^3}\right) + \frac{1}{r} + \cdots.$$

Nun ist aber wegen $1 + m_1 = a^3$

$$2m_1 + a^3 = 3a^3 - 2; \quad 1 - \frac{m_1}{a^3} = \frac{1}{a^3},$$

also schließlich

$$\Omega = \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{2\xi^2 - \eta^2}{2a^3} + \frac{1}{r} + \langle \text{Glieder der Ordnung } \frac{m_1 r^2}{a^4} \text{ und höher}\rangle.$$

Sind ξ, η, r und $m_1 a^{-3}$ von der Ordnung 0, a^{-1} aber von der Ordnung 1, so ist das größte der Restglieder rechts von der Ordnung 1, der mittlere Term rechts, $-(2\xi^2 - \eta^2)/2a^3$, aber von der Ordnung 3. Vernachlässigen wir also, wie es G. W. HILL in seinen berühmten Untersuchungen über das Mondproblem getan hat, alle Glieder von erster und höherer Ordnung, so bleibt nur noch

$$\text{(XI; 90)} \qquad \Omega = \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{r}, \quad (r^2 = \xi^2 + \eta^2)$$

zu berücksichtigen, und man erhält nach (XI; 89) die *Hillschen Differentialgleichungen*

$$(\text{XI}; 91) \qquad \begin{cases} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \xi\left(3 - \frac{1}{r^3}\right), \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = -\frac{\eta}{r^3}. \end{cases}$$

Sie entstehen aus den Gleichungen (XI; 89), wenn man a gegen ∞ streben läßt, aber gleichzeitig dafür sorgt, daß

$$a^3 = 1 + m_1; \quad n = 1$$

bleibt. Will man hierfür ein anschauliches Bild gebrauchen, so bedeutet das, daß man den Ort der Sonne längs der negativen ξ-Achse ins Unendliche verschiebt, gleichzeitig aber ihre Masse mit der dritten Potenz des Abstandes wachsen läßt, so daß $m_1 a^{-3}$, das sich für sehr großes a von $(m_1 + 1) a^{-3}$ beliebig wenig unterscheidet, praktisch konstant gleich 1 bleibt. Die störende Kraft der Sonne auf die geozentrische Bewegung des Mondes, die (wie im nächsten Abschnitt noch gezeigt werden wird) der Sonnenmasse m_1 proportional, aber der dritten Potenz des Abstandes r_1 umgekehrt proportional ist, bleibt also ihrem Betrag nach erhalten, da a der Mittelwert von r_1 ist und für große a das Verhältnis $r_1 : a$ von der Einheit nicht merklich verschieden ist. Mit anderen Worten: Innerhalb des Bereichs um den Planeten, in dem sich die Bewegung des Satelliten abspielt, werden lediglich (außer der Neigung der Satellitenbahn und der Exzentrizität der Planetenbahn, die schon im „problème restreint" als verschwindend klein angenommen worden sind) die Parallaxe der Sonne und die Krümmung der Planetenbahn vernachlässigt. In den Gleichungen (XI; 90) und (XI; 91) kommen Masse und Entfernung der störenden Sonne überhaupt nicht mehr vor. Die Differentialgleichungen enthalten also nur noch ξ, η und $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$. Sie haben das Jacobische Integral

$$(\text{XI}; 92) \qquad \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = 2\Omega - C = 3\xi^2 + \frac{2}{r} - C,$$

wie aus (XI; 89) und (XI; 90) unmittelbar folgt, aber auch aus (XI; 91) abgeleitet werden kann, wenn man diese Gleichungen mit $\dot{\xi}$ bzw. $\dot{\eta}$ multipliziert, die Produkte addiert und deren Summe integriert.

Der Jacobische Satz, daß die Integration des „problème restreint" durch Quadraturen zu Ende geführt werden könnte, falls es gelänge, außer dem Jacobischen Integral noch eine weitere Beziehung zwischen den Orts- und Geschwindigkeitsvektoren zu finden, behält natürlich auch für das Hillsche Mondproblem seine Gültigkeit. Daneben gilt der folgende von Hill bewiesene Satz, der im Grunde dasselbe ausdrückt: Wenn es gelänge, eine der beiden Koordinaten des Satelliten als Funktion der Zeit darzustellen, so erhielte man die andere durch Quadratur einer schon bekannten Funktion ebenfalls als Funktion der Zeit.

Führen wir statt ξ, η Polarkoordinaten r, φ durch

$$\xi = r\cos\varphi; \quad \eta = r\sin\varphi$$

ein, so nehmen die Differentialgleichungen (XI; 91) die Form

$$(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - 2r\dot{\varphi})\cos\varphi - (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} + 2\dot{r})\sin\varphi = \left(3 - \frac{1}{r^3}\right) r\cos\varphi,$$

$$(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - 2r\dot{\varphi})\sin\varphi + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} + 2\dot{r})\cos\varphi = -\frac{1}{r^2}\sin\varphi$$

an. Hieraus leitet man ab:

$$\text{(XI; 93)} \quad \left\{ \begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - 2r\dot{\varphi} &= 3r\cos^2\varphi - \frac{1}{r^2}, \\ 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} + 2\dot{r} &= -3r\sin\varphi\cos\varphi = -\frac{3}{2} r\sin 2\varphi. \end{aligned} \right.$$

Dividiert man die zweite dieser Gleichungen durch $2r$, so ergibt sich

$$\frac{\dot{r}}{r}(\dot{\varphi} + 1) + \frac{1}{2}\ddot{\varphi} = -\frac{3}{4}\sin 2\varphi.$$

Man kann also die Variablen trennen und erhält die Beziehung

$$\frac{\dot{r}}{r} = -\frac{1}{2}\,\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi} + 1} - \frac{3}{4}\,\frac{\sin 2\varphi}{\dot{\varphi} + 1},$$

deren Integral

$$\ln r = \ln K - \frac{1}{2}\ln(\dot{\varphi} + 1) - \frac{3}{4}\int \frac{\sin 2\varphi}{\dot{\varphi} + 1}\, dt$$

oder

$$r = \frac{K}{\sqrt{\dot{\varphi} + 1}} \exp\left\{-\frac{3}{4}\int \frac{\sin 2\varphi}{\dot{\varphi} + 1}\, dt\right\}$$

mit K als Integrationskonstante lautet. Ist nun λ die im festen Koordinatensystem (etwa vom Frühlingspunkt aus) gezählte Länge des Mondes, λ_0 die Länge des Mondes in der Opposition zur Sonne, so ist $\varphi = \lambda - \lambda_0$, und außerdem ist ja $n = \dot{\lambda}_0 = 1$ die Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Achsen des $\xi\eta$-Systems. Es ist demnach $\dot{\varphi} = \dot{\lambda} - 1$. Man kann daher auch schreiben

$$\text{(XI; 94)} \qquad r = \frac{K}{\sqrt{\dot{\lambda}}} \exp\left\{-\frac{3}{4}\int \frac{\sin 2(\lambda - \lambda_0)}{\dot{\lambda}}\, dt\right\}.$$

Kennt man also die Länge des Mondes als Funktion der Zeit, so folgt die andere Koordinate, der Abstand r, über eine einfache Quadratur.

Ist andererseits $r = r(t)$ bekannt, so kann man auch $\lambda = \lambda(t)$ durch Quadratur ermitteln. Aus der ersten Gleichung (XI; 93) folgt nämlich

$$\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi} + 3\cos^2\varphi = \frac{\ddot{r}}{r} + \frac{1}{r^3},$$

also

$$(\dot{\varphi} + 1)^2 = \dot{\lambda}^2 = \frac{\ddot{r}}{r} + \frac{1}{r^3} + 1 - 3\cos^2(\lambda - \lambda_0)$$

oder

$$\text{(XI; 95)} \qquad \dot{\lambda} = \sqrt{\frac{\ddot{r}}{r} + \frac{1}{r^3} + 1 - 3\cos^2(\lambda - \lambda_0)}\,.$$

Hieraus erhält man durch Integration

$$\text{(XI; 96)} \qquad t - t_0 = \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\frac{\ddot{r}}{r} + \frac{1}{r^3} + 1 - 3\cos^2(\lambda - \lambda_0)}},$$

eine Beziehung, die $t = t(\lambda)$ und damit auch $\lambda = \lambda(t)$ liefert, wenn $r = r(t)$ bekannt ist, und die nichts anderes darstellt als das Analogon des Flächensatzes der ungestörten Zweikörperbewegung. Da nämlich $\lambda(t)$ die wahre Länge des Satelliten im festen Koordinatensystem ist, gilt für die ungestörte Bewegung nach (II; 32)

$$\dot{\lambda} = \frac{c}{r^2},$$

wo $c = \sqrt{p}$ ist und p den Parameter der Bahnellipse bedeutet (eigentlich ist ja $c = k\sqrt{p}\sqrt{m_2 + m}$, aber hier war $m = 0$ gesetzt worden, und die Einheiten waren so festgesetzt, daß $k = 1$ und $m_2 = 1$ ist). Außerdem gilt nach Band I, S. 94 unten:

$$r^2\left(r\ddot{r} + \frac{1}{r}\right) = c^2 = p,$$

also ist

$$\dot{\lambda} = \sqrt{\frac{\ddot{r}}{r} + \frac{1}{r^3}},$$

wenn die Störung durch die Sonne fortfällt. Dies kann als erste Näherung auch im Falle der gestörten Bewegung gelten, solange im Radikanden der Quadratwurzel in (XI; 96) der Zusatz $1 - 3\cos^2\varphi$ gegen die übrigen Terme klein bleibt. Für den uns besonders interessierenden Fall des Erdmondes ist diese Bedingung erfüllt. Da nämlich, wie oben bemerkt, der Erdabstand r des Mondes im Mittel 0.177 oder etwa $^3/_{17}$ der hier gewählten Längeneinheit beträgt, ist $\ddot{r}/r + 1/r^3 = p/r^4$ von der Ordnung $r^{-3} \approx 180$, während das Zusatzglied Werte zwischen $+1$ und -2 annimmt.

101. *Störungen*

Die praktische Bewältigung aller konkreten Aufgaben, die sich der Himmelsmechanik in unserem Planetensystem darbieten, ist möglich gewesen, weil als erste Näherungslösung der Bewegungsgleichungen eines Himmelskörpers dieses Systems stets eine Lösung des Zweikörperproblems, also eine nach den KEPLER-

schen Gesetzen beschriebene Kegelschnittbahn, angesetzt werden kann. Obwohl der Weg zu einer allgemeinen und für beliebig lange Zeiten gültigen Lösung des Mehrkörperproblems noch verschlossen ist, selbst wenn man sich auf den Fall $n = 3$ und speziell auf das stark schematisierte „problème restreint" beschränkt, so gelingt es dennoch, die Bahnbewegung der Planeten, Kometen und Satelliten des Sonnensystems rechnerisch für praktisch unbegrenzte Zeiten und mit jeder wünschenswerten Genauigkeit zu verfolgen, indem man zunächst nur die nach den KEPLERschen Gesetzen erfolgende Bewegung des betreffenden Körpers um sein Zentralgestirn (Sonne oder Planet) betrachtet und sodann die Abweichungen von dieser Bahn studiert, die infolge der zusätzlichen Anziehungskräfte der übrigen Körper des Sonnensystems entstehen. Da diese Abweichungen, die man *Störungen* nennt, meist klein gegen die Dimensionen der Näherungsbahn sind, wird man entweder rasch konvergierende Reihenentwicklungen (etwa nach Potenzen der störenden Massen, der meist kleinen Exzentrizitäten der Bahnen der beteiligten Körper oder anderer geeigneter Parameter) versuchen, um die Störungen bzw. den gestörten Ort explizit als Funktionen der Zeit darzustellen (Methode der allgemeinen oder absoluten Störungen), oder man wird – ausgehend von einem durch Ort und Geschwindigkeit des Himmelskörpers zu einer gewissen Anfangszeit t_0, der *Epoche*, gegebenen Anfangszustand – die Störungen durch numerische Integration schrittweise ermitteln (Methode der speziellen Störungen). Die letztgenannte Methode, die ihren Namen daher hat, daß sie spezielle (partikuläre) Lösungen der Bewegungsgleichungen aus vorgegebenen Anfangsbedingungen entwickelt, wird in ihren verschiedenen Spielarten im Kapitel XVIII behandelt werden. Sie stellt bislang noch den einzigen Weg dar, um zu konkreten Vorstellungen über den Verlauf beliebiger spezieller Bahnen des Dreikörperproblems, insbesondere auch des „problème restreint", zu gelangen. Die ausführliche Behandlung der Methode der allgemeinen Störungen mit besonderer Berücksichtigung der Bewegungstheorien der Planeten und Satelliten des Sonnensystems sowie der künstlichen Erdsatelliten soll dem dritten Band dieses Werkes vorbehalten bleiben, während in diesem zweiten Band nur eine allgemeine Einführung in das Störungsproblem gegeben werden kann, einschließlich einer kurzen Behandlung einiger besonders wichtiger und auffallender Störungseffekte, wie z.B. der *säkularen Störungen* der Planeten und der großen Anomalien der Mondbewegung.

Die Bezeichnung „Störungen" für die Abweichungen der Bahnkoordinaten eines Himmelskörpers von der Kegelschnittbahn ist natürlich nur dann gerechtfertigt, wenn die von dem dritten Körper ausgeübte „störende Kraft" wesentlich geringer ist als die Attraktionskraft des Zentralgestirns, um das der Himmelskörper (Planet bzw. Satellit) seine Bahn beschreibt. Bedeutet z.B. m_1 die Masse der Sonne und sind m_2, m_3 die sehr viel kleineren Massen zweier Planeten, $\mathfrak{q}_2$ bzw. $\mathfrak{q}_3$ deren auf die Sonne bezogene Ortsvektoren, so genügen diese den Differentialgleichungen (XI; 14) mit $n = 3$, nämlich

$$\text{(XI; 97)} \qquad \ddot{\mathfrak{q}}_i = k^2 \left\{ -\frac{m_1 + m_i}{r_{i1}^3} \mathfrak{q}_i + \mathfrak{P}_i \right\}, \qquad (i = 2, 3),$$

wo

$$\mathfrak{P}_i = m_j \left(\frac{\mathfrak{q}_j - \mathfrak{q}_i}{r_{ij}^3} - \frac{\mathfrak{q}_j}{r_{j1}^3} \right), \quad (j = 3, 2 \quad \text{für} \quad i = 2, 3) \tag{XI; 98}$$

einen Störungsterm darstellt, der wegen des Faktors m_j (der immer $< m_1 \cdot 10^{-3}$ ist) klein gegen das mit dem Faktor $m_1 + m_i$ behaftete Hauptglied ist. Das gilt nur dann nicht mehr, wenn die beiden kleinen Massen sich im Laufe der Bewegung sehr nahe kommen, da dann r_{ij} unter Umständen sehr klein gegen r_{i1} und r_{j1} wird.

Auch die Bewegung des Mondes um die Erde kann in erster Näherung als Keplersche Bewegung angesehen werden, obwohl die hier von der Sonne herrührenden Störungen beträchtlich größer sind als die in dem oben gesetzten Fall. Ist m_1 die Masse der Erde, m_2 die des Mondes und m_3 die der Sonne, so kann man die Differentialgleichungen der Mondbewegung in der Form

$$\frac{1}{k^2} \ddot{\mathfrak{q}}_2 = - \frac{m_1 + m_2}{r_{12}^3} \mathfrak{q}_2 + \mathfrak{P}_2 \tag{XI; 99}$$

schreiben, wo

$$\mathfrak{P}_2 = m_3 \left[\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3} \right) \mathfrak{q}_3 - \frac{\mathfrak{q}_2}{r_{23}^3} \right]$$

die störende Beschleunigung des Mondes durch die Sonne ausdrückt und $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}_3$ die geozentrischen Ortsvektoren des Mondes und der Sonne bezeichnen. Um die Größenordnung dieses Störungsterms im Vergleich mit derjenigen der Mondbeschleunigung durch das Gravitationsfeld der Erde abzuschätzen, genügt es, die Mondbahn als kreisförmig anzusehen und abgerundet

$$m_1 = 1; \quad m_2 = \frac{1}{81} \approx 0; \quad m_3 \approx 330000,$$

$$r_{12} = 1; \quad r_{13} = 390; \quad 389 \leqq r_{23} \leqq 391$$

zu setzen. Es ist dann $|\mathfrak{q}_2| = 1$ und das Hauptglied von (XI; 99)

$$- \frac{m_1 + m_2}{r_{12}^3} \mathfrak{q}_2 = - \mathfrak{q}_2.$$

In den Quadraturstellungen des Mondes (erstes und letztes Viertel) ist $r_{23} = r_{13}$ und daher

$$\mathfrak{P}_2 = - \frac{m_3}{r_{23}^3} \mathfrak{q}_2 \approx - \frac{1}{180} \mathfrak{q}_2,$$

d.h., der Betrag der Kreisbahnbeschleunigung des Mondes wird durch die Störung um 0.55% vergrößert. In den Syzygien ist dagegen, wenn wir $\varepsilon = 1/390$ setzen,

$$\mathfrak{q}_3 = \mp \frac{1}{\varepsilon} \mathfrak{q}_2; \quad r_{23} = r_{13}(1 \pm \varepsilon),$$

wobei sich das obere Vorzeichen auf die Vollmonds-, das untere auf die Neumondsstellung des Mondes bezieht, und es ist dann

$$\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3} = \frac{1}{r_{13}^3}[(1 \pm \varepsilon)^{-3} - 1] = \mp \frac{3\varepsilon}{r_{13}^3}(1 \mp 2\varepsilon + \cdots).$$

Demnach ergibt sich für das Störungsglied von (XI; 99)

$$\mathfrak{P}_2 = \frac{m_3}{r_{13}^3}\mathfrak{q}_2(2 \mp 3\varepsilon + \cdots),$$

also bis auf Terme höherer Ordnung

$$\mathfrak{P}_2 = \frac{2m_3}{r_{13}^3}\mathfrak{q}_2 \approx \frac{1}{90}\mathfrak{q}_2.$$

In den Syzygien wird die gegen die Erde gerichtete Beschleunigung des Mondes somit um etwa 1.1% verkleinert. Die Störungen, deren Beträge, wie schon in Abschnitt 100 erwähnt wurde, der dritten Potenz des Abstandes der Sonne umgekehrt proportional sind, sind also auch in diesem für die praktische Himmelsmechanik besonders wichtigen Spezialfall noch ziemlich klein, wenn auch mindestens um eine Größenordnung beträchtlicher als diejenigen, die von den großen Planeten aufeinander oder auf Planetoiden und Kometen (sofern sie sich in angemessenem Abstand vom Störplaneten befinden) ausgeübt werden.

Auch das „stellare Dreikörperproblem" kann, wie schon in Abschnitt 92 erwähnt wurde, als Störungsproblem behandelt werden. Hier handelt es sich meistens um einen engen Doppelstern (m_1, m_2), der von einem dritten Körper (m_3) in sehr weitem Abstand umkreist wird. Die Massen der drei Körper sind sehr groß und oft größenordnungsmäßig nicht sehr verschieden voneinander. Es läßt sich dann zeigen, daß die Bewegung des einen Paares um den gemeinsamen Schwerpunkt S in einer durch den dritten Körper nur wenig gestörten KEPLERschen Ellipse erfolgt, während m_3 um S ebenfalls eine wenig gestörte elliptische Bahn beschreibt. Um dies zu zeigen, ist es zweckmäßig, JACOBIsche Koordinaten zu benutzen. Die Differentialgleichungen für die Ortsvektoren $\mathfrak{q}_2$ (m_2 bezogen auf m_1) und $\mathfrak{q}_3$ (m_3 bezogen auf S) sind dann die in (XI; 64) gegebenen. Dort ist r_3, der gegenseitige Abstand der beiden Komponenten des engen Paares, sehr klein gegen r_2 und r_1, die Abstände des entfernten Sternes von m_1 bzw. m_2; beide Abstände unterscheiden sich also nur wenig von dem Abstand ϱ zwischen m_3 und S. Mit guter Annäherung darf man also setzen

$$\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3} \approx \frac{m_2}{r_1^3} + \frac{m_1}{r_2^3} \approx \frac{m_1 + m_2}{\varrho^3} \ll \frac{m_1 + m_2}{r_3^3}; \quad \frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} \approx 0,$$

und es ist daher, bis auf sehr kleine zusätzliche Störungsterme,

$$\ddot{\mathfrak{q}}_2 = -k^2 \frac{m_1 + m_2}{r_3^3}\mathfrak{q}_2; \quad \ddot{\mathfrak{q}}_3 = -k^2 \frac{m_1 + m_2 + m_3}{\varrho^3}\mathfrak{q}_3,$$

was genau der Behauptung entspricht.

102. *Einflußbereiche der Himmelskörper im Sonnensystem*

Es ist im vorigen Abschnitt schon darauf hingewiesen worden, daß bei großer Annäherung des gestörten an den störenden Körper die Störungen unter Umständen sehr groß werden. So kommen mitunter Kometen einem der großen Planeten so nahe, daß dessen Anziehungskraft die der Sonne überwiegt. Während der Dauer dieser Annäherung wird es zweckmäßig sein, den Planeten als Zentralkörper und die Sonne als störenden Körper anzusehen. Es gibt also um jeden Planeten ein gewisses abgeschlossenes Gebiet, in dessen Innerem der Gravitationseinfluß des Planeten denjenigen der Sonne überwiegt.

Die Abgrenzung dieser Einflußbereiche ist eine Aufgabe, die nicht eindeutig gelöst werden kann, da sie wesentlich durch die Wahl des Koordinatensystems bedingt wird. Je nachdem man ein absolutes (Inertial-) System wählt oder relative Koordinaten einführt, wird man zu verschiedenen Resultaten gelangen, da ja Beschleunigungen und Kräfte im Inertialsystem anders gemessen werden als in Systemen, deren Anfangspunkte selbst gegen das Inertialsystem beschleunigt sind. Man wird demnach zu verschiedenen numerischen Bestimmungen der Ausdehnung jener Einflußsphären gelangen, je nachdem, ob man die Koordinaten eines von Sonne und Planet angezogenen Kometen, Planetoiden oder Satelliten auf den Schwerpunkt des Systems, auf die Sonne selbst oder auf den Planeten als Koordinatenursprung bezieht.

Im baryzentrischen System, dessen Ursprung der Massenmittelpunkt zwischen Sonne (m_1) und Planet (m_2) ist, sind die Beschleunigungen, die Sonne und Planet einer dritten Masse m_3 (die gegebenenfalls unendlich klein ist) erteilen, nach (XI; 15) durch die Vektoren

$$k^2 \frac{m_1}{r_{13}^3} (\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_3) \quad \text{bzw.} \quad k^2 \frac{m_2}{r_{23}^3} (\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_3)$$

gegeben, wenn $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ die baryzentrischen Ortsvektoren der drei Körper bedeuten und für die Abstände der Masse m_3 von m_1 bzw. m_2

$$|\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_3| = r_{13}; \quad |\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_3| = r_{23}$$

gesetzt wird. Für alle Punkte des Raumes, in denen diese beiden Beschleunigungen dem Betrage nach gleich sind, gilt dann die Beziehung

$$\text{(XI; 100)} \qquad \frac{m_1}{r_{13}^2} = \frac{m_2}{r_{23}^2} \quad \text{oder} \quad m_1 r_{23}^2 = m_2 r_{13}^2.$$

Ist $m_2 \ll m_1$, so wird (XI; 100) die Gleichung einer den Planeten eng einschließenden geschlossenen Fläche sein. Ihre jeweilige Lage bezüglich m_2 läßt sich am einfachsten beschreiben, wenn man zu einem Koordinatensystem übergeht, in dessen Ursprung m_2 liegt, während m_1 die Koordinaten $(-a, 0, 0)$ und irgendein Punkt der Fläche die Koordinaten (ξ, η, ζ) hat. Es ist dann

$$r_{23}^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2; \quad r_{13}^2 = (\xi + a)^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

also nach (XI; 100)

$$m_1 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = m_2 [(\xi + a)^2 + \eta^2 + \zeta^2]$$

oder

$$(XI; 101) \qquad (m_1 - m_2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - 2m_2 a \xi = m_2 a^2.$$

Die Grenzfläche ist demnach die Kugel

$$\left(\xi - \frac{m_2 a}{m_1 - m_2}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{m_1 m_2}{(m_1 - m_2)^2} a^2,$$

deren Mittelpunkt, vom Planeten aus gesehen, der Sonne gegenüber im Abstand

$$\xi_0 = \frac{m_2 a}{m_1 - m_2} = \frac{a \mu}{1 - \mu}, \qquad \left(\mu = \frac{m_2}{m_1}\right)$$

liegt und deren Halbmesser

$$\varrho = \frac{a\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 - m_2} = \frac{a\sqrt{\mu}}{1 - \mu}$$

beträgt. Ist $m_2 = m_1$, $\mu = 1$, so werden ξ_0 und ϱ unendlich groß, und die Grenzfläche ist dann, wie (XI; 101) lehrt, die Ebene $\xi = -a/2$. Ist dagegen $m_2 \ll m_1$, so schließt diese Kugelfläche den Planeten eng ein. Im Falle Jupiter ($\mu = 1/1047$) und erst recht bei allen übrigen Planeten ist μ so klein, daß man hinreichend genau

$$\xi_0 = a\mu; \quad \varrho = a\sqrt{\mu}$$

setzen darf. Für den Jupiter erhält man mit $a = 5.2$ AE

$$\xi_0 \approx 0.005 \text{ AE}; \quad \varrho \approx 0.16 \text{ AE},$$

für die Erde ($a = 1$, $\mu \approx 3 \cdot 10^{-6}$)

$$\varrho = 0.00173 \text{ AE} \approx 2.6 \cdot 10^6 \text{ km}.$$

Das bedeutet aber, daß der im Mittel $3.8 \cdot 10^5$ km entfernte Mond sich weit außerhalb der Grenzfläche befindet, also die absolute Anziehungskraft der Sonne auf ihn die der Erde überwiegt. Dieses auf den ersten Blick überraschende Ergebnis wird durch die wohlbekannte Tatsache bestätigt, daß im Inertialsystem die Mondbahn beständig gegen die Sonne gekrümmt ist. In jenem Punkt der Grenzfläche, der genau zwischen Sonne und Planet liegt, ist die Beschleunigung eines sich dort befindenden Satelliten gerade Null, da an dieser Stelle die Beschleunigungen durch Sonne und Planet *entgegengesetzt gleich* sind. Die Bahn eines Satelliten, der sich in der Ebene der Planetenbahn bewegt und in der Neumondstellung die Grenzfläche berührt oder durchschreitet, hat also dort die Krümmung Null. Bei „Vollmond" ist die Satellitenbahn stets gegen den Planeten konkav, da dort die Beschleunigungen durch Sonne und Planet gegen den Planeten gerichtet sind und sich auch dem Betrage nach addieren. Bei „Neumond" ist dagegen die Bahn konkav gegen den Planeten, wenn sich der Satellit innerhalb der Grenzfläche befindet, aber konkav gegen die Sonne, wenn er außerhalb von ihr steht.

Ein unter Umständen stark davon abweichendes Bild ergibt sich, wenn man den Ort einer der beiden m_3 anziehenden Massen, z. B. m_1, zum Koordinatenanfang macht. Dann gelten die Differentialgleichungen (XI; 14) für $n = 3$, $i = 3$,

$j = 2$. Sie lauten, wenn man noch $m_3 = 0$ annimmt und mit $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_3 - \mathfrak{q}_2$ ($|\mathfrak{q}| = r_{23}$) den planetozentrischen Ortsvektor von m_3 bezeichnet,

$$\ddot{\mathfrak{q}}_3 = -k^2 \left\{\frac{m_1}{r_{13}^3}\,\mathfrak{q}_3 + m_2\left(\frac{\mathfrak{q}_2}{r_{12}^3} + \frac{\mathfrak{q}}{r_{23}^3}\right)\right\}. \tag{XI; 102}$$

Ist dann F der Betrag der Beschleunigung der infinitesimalen Masse durch die Sonne (m_1), P der Betrag der Störungsbeschleunigung durch den Planeten (m_2), so ist das Verhältnis beider Größen wegen $|\mathfrak{q}_3| = r_{13}$

$$P : F = m_2 \left|\frac{\mathfrak{q}_2}{r_{12}^3} + \frac{\mathfrak{q}}{r_{23}^3}\right| : \frac{m_1}{r_{13}^2}. \tag{XI; 103}$$

Handelt es sich insbesondere um einen Satelliten von m_2 oder um einen Kometen in großer Nähe des Planeten, so ist $|\mathfrak{q}_2|/r_{12}^3 = 1/r_{12}^2$ sehr viel kleiner als $\mathfrak{q}|/r_{23}^3 = 1/r_{23}^2$, und es gilt die im Inertialsystem streng erfüllte Beziehung

$$P : F = \frac{m_2}{r_{23}^2} : \frac{m_1}{r_{13}^2}$$

im *heliozentrischen* System sehr genähert.

Da der Ortsvektor $\mathfrak{q}_2$ des Planeten (wenn $m_3 = 0$ ist, also der dritte Körper die Bewegung von m_2 um die Sonne nicht stört) der Differentialgleichung

$$\ddot{\mathfrak{q}}_2 = -k^2 \frac{m_1 + m_2}{r_{12}^3}\,\mathfrak{q}_2 \tag{XI; 104}$$

genügt, gilt im *planetozentrischen* System nach (XI; 103) und (XI; 104)

$$\ddot{\mathfrak{q}} = \ddot{\mathfrak{q}}_3 - \ddot{\mathfrak{q}}_2 = -k^2 \left\{\frac{m_2}{r_{23}^3}\,\mathfrak{q} + m_1\left(\frac{\mathfrak{q}_3}{r_{13}^3} - \frac{\mathfrak{q}_2}{r_{12}^3}\right)\right\}.$$

Es ist dann im Falle großer Annäherung zwischen m_2 und m_3 der erste Term rechts als Hauptterm, das mit m_1 behaftete letzte Glied als Störungsterm anzusehen, und es ist, wenn F' die Beschleunigung des infinitesimalen Körpers durch den Planeten, P' die Störungsbeschleunigung durch die Sonne bedeutet,

$$P' : F' = m_1 \left|\frac{\mathfrak{q}_3}{r_{13}^3} - \frac{\mathfrak{q}_2}{r_{12}^3}\right| : \frac{m_2}{r_{23}^2}. \tag{XI; 105}$$

Bei der Abschätzung dieser Beträge im Falle der Bewegung eines Satelliten um seinen Planeten gelangen wir zu den gleichen Ergebnissen wie im vorigen Abschnitt im Falle des Erdmondes. Wir erhielten dort (bei etwas abweichenden Bezeichnungen)

$$P' : F' = \frac{m_3}{r_{23}^3} : \frac{m_1 + m_2}{r_{12}^3} \quad \text{in den Quadraturen,}$$

$$P' : F' = \frac{2m_3}{r_{23}^3} : \frac{m_1 + m_2}{r_{12}^3} \quad \text{in den Syzygien,}$$

wobei jetzt m_3 die Masse der Sonne, $m_1 + m_2$ die Gesamtmasse Erde–Mond und r_{12}, r_{23} die Abstände des Mondes bzw. der Sonne von der Erde bezeichnen. Für den Fall $P' = F'$ ergibt sich also

$$\lambda\, m_3\, r_{12}^3 = (m_1 + m_2)\, r_{23}^3,$$

wo in den Quadraturen $\lambda = 1$, in den Syzygien $\lambda = 2$ zu setzen ist. Setzt man also $m_1 + m_2 = 1$, $m_3 = {}^1/_3 \cdot 10^6$, $r_{23} = 1$ AE $= 1.5 \cdot 10^8$ km, so ist die kritische Entfernung eines Erdsatelliten, in der die Störung durch die Sonne die geozentrische Beschleunigung durch die Erdmasse gerade kompensiert,

$$r_{12} = r_{23} \sqrt[3]{\frac{1}{\lambda m_3}} \begin{cases} = 2.16 \cdot 10^6 \text{ km in den Quadraturen,} \\ = 1.72 \cdot 10^6 \text{ km in den Syzygien,} \end{cases}$$

so daß also im geozentrischen System der Mond, dessen mittlerer Erdabstand $3.84 \cdot 10^5$ km beträgt, ganz der Einflußsphäre der Erde zugehört.

Wenn der obenerwähnte Fall eintritt, daß ein Himmelskörper (Komet) dicht an einem der großen Planeten vorbeigeht, so wird der Bahnrechner häufig gezwungen sein, bei der Störungsrechnung von heliozentrischen zu planetozentrischen Koordinaten überzugehen, während der Komet das Innere einer gewissen um den Planeten geschlossenen Grenzfläche durchläuft. Diese Grenzfläche ist aber nicht dadurch gekennzeichnet, daß auf ihr die von Sonne und Planet ausgeübten Kräfte in irgendeinem Koordinatensystem einander gleich sind; denn es handelt sich ja hier nicht um den Vergleich der Kräfte in irgendeinem dieser Systeme, sondern darum, zu entscheiden, in welchem System (dem heliozentrischen oder dem planetozentrischen) das Verhältnis der Störungsbeschleunigung zur Beschleunigung durch den jeweiligen Zentralkörper günstiger, d. h. kleiner, ist. Die Gleichung der Grenzfläche, bei deren Durchschreiten ein Wechsel des Koordinatensystems ratsam ist, wird daher durch die Beziehung

$$\text{(XI; 106)} \qquad P' : F' = P : F \quad \text{oder} \quad P' F = P F'$$

gegeben sein. Die Gleichung dieser Fläche ist recht kompliziert. Man erhält aber einen für praktische Zwecke hinreichend genauen Näherungsausdruck dafür, wenn man sich auf den Fall beschränkt, daß die Masse des Planeten (m_2) klein gegen die Masse der Sonne (m_1) ist. Bezeichnet man wieder wie oben mit r_{12}, r_{13} die heliozentrischen Distanzen von Planet und Komet, mit r_{23} die planetozentrische Distanz des Kometen, ferner mit $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}_3$ die heliozentrischen Ortsvektoren von Planet und Komet, mit $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_3 - \mathfrak{q}_2$ den vom Planeten zum Kometen führenden Vektor, so folgt aus (XI; 106), wenn man die Ausdrücke (XI; 103) und (XI; 105) benutzt,

$$m_1 \left| \frac{\mathfrak{q}_3}{r_{13}^3} - \frac{\mathfrak{q}_2}{r_{12}^3} \right| \frac{m_1}{r_{13}^2} = m_2 \left| \frac{\mathfrak{q}_2}{r_{12}^3} + \frac{\mathfrak{q}}{r_{23}^3} \right| \frac{m_2}{r_{23}^2}.$$

Es sei nun $\mu = m_2/m_1$ die in Einheiten der Sonnenmasse ausgedrückte Planetenmasse. Quadriert man obige Vektorgleichung skalar, so ergibt sich damit

(XI; 107)

$$r_{23}^4 \left\{ \frac{(\mathfrak{q}_3 \mathfrak{q}_3)}{r_{13}^6} - 2 \frac{(\mathfrak{q}_2 \mathfrak{q}_3)}{r_{12}^3 r_{13}^3} + \frac{(\mathfrak{q}_2 \mathfrak{q}_2)}{r_{12}^6} \right\} = \mu^4 r_{13}^4 \left\{ \frac{(\mathfrak{q}_2 \mathfrak{q}_2)}{r_{12}^6} + \frac{2(\mathfrak{q}_2 \mathfrak{q})}{r_{12}^3 r_{23}^3} + \frac{(\mathfrak{q}\,\mathfrak{q})}{r_{23}^6} \right\}.$$

Nun führe man (Abb. 9) den Winkel ϑ zwischen den Richtungen von $\mathfrak{q}_2$ und $\mathfrak{q}$ ein. Dann wird

$$r_{13}^2 = r_{12}^2 + r_{23}^2 + 2r_{12}r_{23}\cos\vartheta.$$

Außerdem setze man

$$r_{23} = r_{12}u.$$

Dann ist u, solange sich der Komet in der Nähe des Planeten aufhält, eine sehr kleine Zahl, und es wird

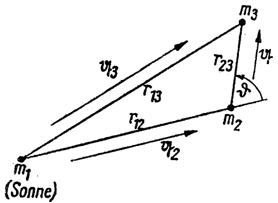


Abb. 9
Komet (m_3) in der Nähe eines großen Planeten (m_2)

$$r_{13}^2 = r_{12}^2(1 + 2u\cos\vartheta + u^2).$$

Außerdem findet man

$$(\mathfrak{q}_2\,\mathfrak{q}_2) = r_{12}^2; \quad (\mathfrak{q}_3\,\mathfrak{q}_3) = r_{12}^2(1 + 2u\cos\vartheta + u^2),$$
$$(\mathfrak{q}_2\,\mathfrak{q}) = r_{12}r_{23}\cos\vartheta = r_{12}^2 u\cos\vartheta,$$
$$(\mathfrak{q}_2\,\mathfrak{q}_3) = (\mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_2 + \mathfrak{q}) = r_{12}^2(1 + u\cos\vartheta),$$
$$(\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}) = r_{23}^2 = r_{12}^2 u^2.$$

Setzt man alle diese Ausdrücke in (XI; 107) ein, so erhält man nach Fortschaffen der Nenner

$$u^8\{1 - 2(1 + u\cos\vartheta)(1 + 2u\cos\vartheta + u^2)^{1/2} + (1 + 2u\cos\vartheta + u^2)^2\} =$$
$$= \mu^4(1 + 2u\cos\vartheta + u^2)^4(1 + 2u^2\cos\vartheta + u^4)$$

oder, wenn man auf beiden Seiten nach Potenzen von u entwickelt,

$$u^{10}(1 + 3\cos^2\vartheta + 4u\cos\vartheta + \cdots) = \mu^4(1 + 8u\cos\vartheta + \cdots).$$

Genähert ist also

$$u = \left(\frac{\mu^2}{\sqrt{1 + 3\cos^2\vartheta}}\right)^{1/5} \qquad \text{(XI; 108)}$$

die Gleichung der Grenzfläche $u(\vartheta)$, die zur Richtung Sonne–Planet rotationssymmetrisch verläuft. Genauer erhält man

$$u^5\sqrt{1 + 3\cos^2\vartheta}\left(1 + \frac{4u\cos\vartheta}{1 + 3\cos^2\vartheta} + \cdots\right)^{1/2} = \mu^2(1 + 4u\cos\vartheta + \cdots)$$

oder, wenn man für u in den höheren Gliedern den Näherungsausdruck (XI; 108) einsetzt,

$$u = \left(\frac{\mu^2}{\sqrt{1 + 3\cos^2\vartheta}}\right)^{1/5} + \frac{2}{5}\cos\vartheta\,\frac{1 + 6\cos^2\vartheta}{1 + 3\cos^2\vartheta}\left(\frac{\mu^2}{\sqrt{1 + 3\cos^2\vartheta}}\right)^{2/5} + \cdots.$$

In der Praxis genügt es schon, die Grenzfläche als eine um den Planeten als Mittelpunkt beschriebene Kugel mit dem Halbmesser

$$\text{(XI; 109)} \qquad \begin{cases} u = \sqrt[5]{\mu^2} & \text{(in Einheiten der mittleren Sonnenentfernung } a \text{ des Planeten) oder} \\ u\,a & \text{(in astronomischen Einheiten)} \end{cases}$$

anzusehen, da der vom Phasenwinkel ϑ abhängige Faktor

$$0.87 < (1 + 3\cos^2\vartheta)^{-1/10} \leqq 1$$

nur wenig kleiner als 1 werden kann.

Für die großen Planeten des Sonnensystems (außer Pluto, dessen Masse noch nicht genau genug bekannt ist) erhält man nach (XI; 109) für die maximalen Abstände der Grenzfläche vom Planeten die in der nachstehenden Tabelle aufgeführten Werte, die zeigen, daß auch die äußersten Satelliten der Planeten sich noch weit innerhalb der Grenzfläche bewegen.

Planet	u	$u\,a$ (in AE)	Abstand der äußersten Satelliten vom Planeten (in AE)
Merkur	0.00078	0.00030	–
Venus	0.00579	0.00432	–
Erde	0.00621	0.00621	0.00256
Mars	0.00253	0.00386	0.00016
Jupiter	0.0619	0.3222	0.1602
Saturn	0.0382	0.3646	0.0866
Uranus	0.0180	0.3461	0.0039
Neptun	0.0193	0.5803	0.040

103. *Anziehung eines beweglichen Körpers von zwei festen Zentren aus*

Die vorbereitenden Betrachtungen über das Dreikörperproblem sollen nicht abgeschlossen werden, ohne ein verwandtes Problem zu berühren, das vollständig integriert werden kann und dessen praktische Bedeutung darin liegt, daß die Lösungen dieser Variante in gewissen Spezialfällen als genäherte Lösungen himmelsmechanischer Probleme gelten können.

Es handelt sich hierbei um die Bewegung eines Massenpunktes, der von zwei festen, mit beliebigen Massen belegten Zentren nach dem NEWTONschen Gravitationsgesetz angezogen wird. In der Natur ist ein solcher Vorgang nirgends verwirklicht. Es gibt aber Fälle, in denen man wenigstens für beschränkte Zeitintervalle die Voraussetzungen dieses Problems als angenähert erfüllt ansehen darf. So erfolgt z.B. die Bewegung einiger der inneren Satelliten der großen Planeten so rasch, daß man, ohne große Fehler zu begehen, die Örter des Planeten (z.B. Jupiter) und der Sonne für die Dauer weniger Umläufe des Satelliten als fest betrachten kann. Die Bewegung des Mondes um die Erde hingegen geht so langsam vor sich, daß diese Annahme kaum statthaft ist, da ja die Erde schon während eines einzigen Mondumlaufs einen beträchtlichen Teil ihrer Bahn um die Sonne (rund 28° in Länge) zurücklegt. Eine größere Bedeutung kommt diesem Problem bei der Berechnung der Bahnen künstlicher Erdsatelliten zu, da diese Körper die Erde in so kurzer Zeit umkreisen, daß man den geozentrischen Ort des störenden Körpers (Sonne oder Mond) für eine geraume Zeit als fest ansehen darf.

Das Problem der Attraktion durch zwei feste Zentren ist zuerst von EULER (Mémoires de l'Académie de Berlin, 1760) gelöst worden; später hat LEGENDRE es in seinem „Traité des fonctions elliptiques" sehr ausführlich behandelt. Eine vollständige Diskussion dieses mathematisch sehr interessanten Problems findet sich auch im ersten Band der „Mechanik des Himmels" von C. V. L. CHARLIER, auf die der Leser verwiesen sei. Hier müssen wir uns auf die formale Lösung der Aufgabe beschränken, die auf elliptische Integrale führt. Ebenso wie CHARLIER begnügen wir uns mit der Durchführung der Lösung für den Fall der Bewegung in einer Ebene.

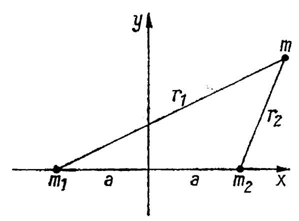


Abb. 10. Attraktion von zwei festen Zentren aus

Wir bezeichnen die beiden festen Massen mit m_1 und m_2 und ihren konstanten Abstand mit $2a$. Ein ebenes Koordinatensystem sei so orientiert, daß die x-Achse mit der Verbindungsgeraden von m_1 und m_2, der Koordinatenursprung mit der Mitte zwischen m_1 und m_2 zusammenfällt. Die Koordinaten dieser beiden Massenpunkte seien daher $x = \mp a$, $y = 0$. Ferner seien r_1 und r_2 die Abstände der beweglichen Masse m von m_1 und m_2 (Abb. 10), und es seien die Einheiten der Masse und der Zeit so gewählt, daß die Gravitationskonstante $k = 1$ ist. Dann existiert die Potentialfunktion

$$U = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2},$$

und es ist

$$r_1^2 = (x + a)^2 + y^2; \quad r_2^2 = (x - a)^2 + y^2.$$

Für die Koordinaten x, y von m gelten dann die Bewegungsgleichungen

$$\text{(XI; 110)} \qquad \begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{\partial U}{\partial x} = -\dfrac{m_1}{r_1^3}(x + a) - \dfrac{m_2}{r_2^3}(x - a), \\ \ddot{y} = \dfrac{\partial U}{\partial y} = -\left(\dfrac{m_1}{r_1^3} + \dfrac{m_2}{r_2^3}\right) y, \end{cases}$$

die das Energieintegral

$$\text{(XI; 111)} \qquad T - U = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) = h = \text{const}$$

besitzen, wie man leicht beweist, indem man die Gleichungen (XI; 110) mit $\dot{x}$ bzw. $\dot{y}$ multipliziert und die Summe der Produkte integriert.

Es erweist sich als zweckmäßig, statt x, y die elliptischen Koordinaten

$$\lambda = \frac{1}{2}(r_1 + r_2); \quad \mu = \frac{1}{2}(r_1 - r_2)$$

einzuführen, also

$$r_1 = \lambda + \mu; \quad r_2 = \lambda - \mu$$

zu setzen. Es ist dann

$$r_1^2 - r_2^2 = 4\lambda\mu = 4ax,$$

$$x = \frac{\lambda\mu}{a}; \quad y^2 = r_1^2 - (x + a)^2 = r_2^2 - (x - a)^2 = \frac{(\lambda^2 - a^2)(a^2 - \mu^2)}{a^2}$$

und, wenn man diese Ausdrücke nach der Zeit differenziert,

$$\dot{x} = \frac{1}{a}(\mu\dot{\lambda} + \lambda\dot{\mu}); \quad \dot{y} = \pm\frac{1}{a}\frac{\lambda\dot{\lambda}(a^2-\mu^2) - \mu\dot{\mu}(\lambda^2-a^2)}{\sqrt{(\lambda^2-a^2)(a^2-\mu^2)}}.$$

Für die kinetische Energie und das Potential erhält man dann

$$\text{(XI; 112)} \quad \begin{cases} T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = \frac{\lambda^2-\mu^2}{2}\left(\frac{\dot{\lambda}^2}{\lambda^2-a^2} + \frac{\dot{\mu}^2}{a^2-\mu^2}\right), \\ U = \frac{m_1}{\lambda+\mu} + \frac{m_2}{\lambda-\mu}. \end{cases}$$

Setzt man nun

$$\lambda^2 = f_1; \quad \mu^2 = -f_2; \quad \lambda^2-\mu^2 = f_1+f_2 = f,$$

$$\lambda(m_1+m_2) = g_1; \quad \mu(m_1-m_2) = -g_2; \quad g_1+g_2 = g,$$

$$\frac{1}{\lambda^2-a^2} = A_1; \quad \frac{1}{a^2-\mu^2} = A_2,$$

so schreibt man statt (XI; 112) einfacher

$$T = \frac{1}{2}f(A_1\dot{\lambda}^2 + A_2\dot{\mu}^2); \quad U = \frac{g}{f} = \frac{g_1+g_2}{f_1+f_2}.$$

Da A_1 nur von λ, A_2 nur von μ abhängt, kann man vorübergehend statt λ, μ zwei neue Variable u_1, u_2 durch

$$\dot{u}_1(\lambda) = \dot{\lambda}\sqrt{A_1}; \quad \dot{u}_2(\mu) = \dot{\mu}\sqrt{A_2}$$

einführen. Es wird dann

$$T = \frac{1}{2}f(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2); \quad U = \frac{g}{f},$$

und das Energieintegral (XI; 111) erhält die Form

$$\text{(XI; 113)} \qquad \frac{1}{2}f(\dot{u}_1^2+\dot{u}_2^2) - \frac{g}{f} = h = \text{const.}$$

Die LAGRANGEschen Differentialgleichungen (XI; 49) in den Variablen u_1, u_2 lauten dann

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_1}\right) = \frac{\partial(T+U)}{\partial u_1}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_2}\right) = \frac{\partial(T+U)}{\partial u_2}.$$

Da aber

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_1} = f\dot{u}_1; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_2} = f\dot{u}_2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial u_1} = \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial u_1}(\dot{u}_1^2+\dot{u}_2^2); \quad \frac{\partial T}{\partial u_2} = \frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial u_2}(\dot{u}_1^2+\dot{u}_2^2),$$

$$\frac{\partial U}{\partial u_1} = \frac{1}{f^2}\left(f\frac{\partial g_1}{\partial u_1} - g\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right); \quad \frac{\partial U}{\partial u_2} = \frac{1}{f^2}\left(f\frac{\partial g_2}{\partial u_2} - g\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\right)$$

ist, folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f\dot{u}_1) &= \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial u_1}(\dot{u}_1^2+\dot{u}_2^2)+\frac{1}{f}\left(\frac{\partial g_1}{\partial u_1}-U\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right), & 2f\dot{u}_1 \\ \frac{d}{dt}(f\dot{u}_2) &= \frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial u_2}(\dot{u}_1^2+\dot{u}_2^2)+\frac{1}{f}\left(\frac{\partial g_2}{\partial u_2}-U\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\right). & 2f\dot{u}_2 \end{aligned} \quad \text{(I)}$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit den Faktoren (I), so erhält man

$$\text{(XI; 114)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt}(f^2\dot{u}_1^2) &= f(\dot{u}_1^2+\dot{u}_2^2)\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\dot{u}_1+2\left(\frac{\partial g_1}{\partial u_1}-U\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right)\dot{u}_1, \\ \frac{d}{dt}(f^2\dot{u}_2^2) &= f(\dot{u}_1^2+\dot{u}_2^2)\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\dot{u}_2+2\left(\frac{\partial g_2}{\partial u_1}-U\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\right)\dot{u}_2. \end{aligned} \right.$$

Andererseits ist wegen (XI; 113)

$$\text{(XI; 115)} \quad \left\{ \begin{aligned} 2h\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\dot{u}_1 &= f(\dot{u}_1^2+\dot{u}_2^2)\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\dot{u}_1-2U\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\dot{u}_1, \\ 2h\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\dot{u}_2 &= f(\dot{u}_1^2+\dot{u}_2^2)\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\dot{u}_2-2U\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\dot{u}_2. \end{aligned} \right.$$

Subtrahiert man (XI; 115) von (XI; 114) und berücksichtigt, daß

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_i}\dot{u}_i=\frac{df_i}{dt}; \quad \frac{\partial g_i}{\partial u_i}\dot{u}_i=\frac{dg_i}{dt}, \qquad (i=1,2)$$

ist, so ergeben sich die integrablen Beziehungen

$$\frac{d}{dt}(f^2\dot{u}_1^2-2hf_1)=2\frac{dg_1}{dt}; \quad \frac{d}{dt}(f^2\dot{u}_2^2-2hf_2)=2\frac{dg_2}{dt},$$

deren Integrale

$$\text{(XI; 116)} \quad \left\{ \begin{aligned} f^2\dot{u}_1^2 &= 2(g_1+hf_1+\alpha_1), \\ f^2\dot{u}_2^2 &= 2(g_2+hf_2+\alpha_2) \end{aligned} \right.$$

lauten. Die Integrationskonstanten α_1, α_2 sind aber nicht unabhängig voneinander; denn setzt man (XI; 116) in (XI; 113) ein, so folgt

$$\alpha_1+\alpha_2=0,$$

so daß man $\alpha_1=-\alpha_2=\alpha$ setzen kann.

Führt man nun wieder die elliptischen Koordinaten λ, μ ein, so erhält man statt (XI; 116) mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} F_1 &= (\lambda^2-a^2)\,[h\lambda^2+(m_1+m_2)\lambda+\alpha], \\ F_2 &= (\mu^2-a^2)\,[h\mu^2+(m_1-m_2)\mu+\alpha] \end{aligned}$$

die Differentialgleichungen

		(I)	(II)
$\frac{\dot{\lambda}}{\sqrt{F_1(\lambda)}} = \frac{\sqrt{2}}{f}$,		1	λ^2
$\frac{\dot{\mu}}{\sqrt{F_2(\mu)}} = \frac{\sqrt{2}}{f}$		-1	$-\mu^2$

oder, wenn man diese Gleichungen mit den Faktoren (I) bzw. (II) multipliziert und addiert, in

$$\frac{\dot{\lambda}}{\sqrt{F_1(\lambda)}} - \frac{\dot{\mu}}{\sqrt{F_2(\mu)}} = 0; \quad \frac{\lambda^2 \dot{\lambda}}{\sqrt{F_1(\lambda)}} - \frac{\mu^2 \dot{\mu}}{\sqrt{F_2(\mu)}} = \sqrt{2}$$

zwei integrable Beziehungen, deren Integrale

$$\text{(XI; 117)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\int^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 - a^2)\,[h\,\lambda^2 + (m_1 + m_2)\,\lambda + \alpha]}} - \\ &\qquad - \int^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - a^2)\,[h\,\mu^2 + (m_1 - m_2)\,\mu + \alpha]}} = \beta, \\ &\int^{\lambda} \frac{\lambda^2\, d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 - a^2)\,[h\,\lambda^2 + (m_1 + m_2)\,\lambda + \alpha]}} - \\ &\qquad - \int^{\mu} \frac{\mu^2\, d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - a^2)\,[h\,\mu^2 + (m_1 - m_2)\,\mu + \alpha]}} = \sqrt{2}(t - t_0) \end{aligned} \right.$$

lauten, mit den vier Integrationskonstanten h, α, β, t_0. Die Integrale sind elliptische Funktionen ihrer oberen Grenzen. Damit ist die Aufgabe im Prinzip gelöst.

104. *Der MACMILLANsche Spezialfall des Dreikörperproblems*

W. D. MACMILLAN[1]) hat einen Spezialfall des Dreikörperproblems behandelt, der vollständig integriert werden kann, da er sich auf das im vorigen Abschnitt gelöste Problem zurückführen läßt.

Ähnlich wie im „problème restreint" nimmt man an, daß zwei endliche Massen ungestörte Kreise um ihren Massenmittelpunkt beschreiben, während eine dritte, infinitesimale Masse sich in ihrem Gravitationsfeld bewegt. Die beiden endlichen Massen sollen aber einander gleich sein ($m_1 = m_2 = m$), und der dritte Körper (P) soll sich zur Zeit $t = 0$ auf jener Geraden befinden, die auf der Bahnebene der endlichen Massen senkrecht steht und durch deren

[1]) W. D. MACMILLAN, A.J. 27, 11 (1913).

Massenmittelpunkt geht (Abb. 11). Auch soll sein Geschwindigkeitsvektor zur Zeit $t = 0$ in derselben Geraden liegen. Da aber unter den gegebenen Voraussetzungen auch der Beschleunigungsvektor dieser Geraden angehört, zu der ja die endlichen Massen ständig symmetrisch liegen, folgt, daß sich die Bewegung der infinitesimalen Masse für alle Zeiten auf dieser Symmetrielinie abspielt. Ist die Bahnebene der endlichen Massen die xy-Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems und der Massenmittelpunkt, um den m_1 und m_2 Kreise mit dem Halbmesser a beschreiben, der Koordinatenursprung, so bewegt sich die kleine Masse beständig auf der z-Achse, und ihr Ort wird durch eine Funktion $z = z(t)$ beschrieben. Da nun aber die Beschleunigung $\ddot{z}$ von der Phase der Kreisbewegung der endlichen Massen ganz unabhängig ist, genügt es, die Örter von m_1 und m_2 in einer xz-Ebene als in den Punkten $(\mp a, 0)$ ruhend anzunehmen. Wir haben hier also in der Tat einen Spezialfall des in Abschnitt 103 gelösten Problems vor uns.

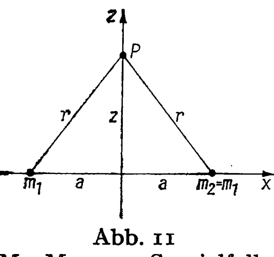


Abb. 11
MacMillans Spezialfall

Insbesondere gelten jetzt, wenn wir die Formeln des vorigen Abschnitts benutzen, folgende Festsetzungen:

$$r_1 = r_2 = r; \quad m_1 = m_2 = m; \quad \lambda = r; \quad \mu = 0,$$
$$f_2 = g_2 = 0; \quad \lambda^2 - a^2 = z^2; \quad f = f_1 = \lambda^2; \quad g = g_1 = 2m\lambda,$$
$$A_1 = z^{-2}.$$

Das Energieintegral (XI; 113) lautet dann

$$\frac{1}{2}\frac{\lambda^2\dot{\lambda}^2}{z^2} - \frac{2m}{\lambda} = h$$

oder, da hier $\lambda\dot{\lambda} = z\dot{z}$ ist,

$$\frac{1}{2}\dot{z}^2 - \frac{2m}{\lambda} = h.$$

Diese Gleichung, die auch direkt aus der Bewegungsgleichung

$$\ddot{z} = -\frac{2mz}{(\sqrt{z^2 + a^2})^3}$$

folgt, läßt sich integrieren und liefert

$$\text{(XI; 118)} \qquad \left\{ \begin{aligned} dt &= \pm \frac{dz}{\sqrt{2h + \dfrac{4m}{\sqrt{z^2 + a^2}}}}, \\ \int\limits_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{h + \dfrac{2m}{\sqrt{z^2 + a^2}}}} &= \pm \sqrt{2}\,(t - t_0). \end{aligned} \right.$$

Dieselbe Beziehung leitet man auch unmittelbar aus der zweiten Gleichung (XI; 117) ab, deren zweites Glied links wegen $\mu = 0$ verschwindet. Mit

$$\lambda = r = +\sqrt{z^2 + a^2}\,; \quad d\lambda = \frac{z}{\lambda}\,dz = \frac{z\,dz}{\sqrt{z^2 + a^2}}$$

erhält man nämlich

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{h + \frac{2m}{\sqrt{z^2 + a^2}} + \alpha}} = \pm\sqrt{2}\,(t - t_0).$$

Durch Vergleich mit (XI; 118) folgt, daß in unserem Spezialfall $\alpha = 0$ ist. Durch (XI; 118) ist das Problem vollständig gelöst; alle möglichen Bewegungen dieser Art werden durch willkürliche Vorgabe der beiden Integrationskonstanten t_0 und h erhalten, während ja $\alpha = 0$ festgelegt war und die vierte Konstante, β, hier nicht definiert ist; denn die erste Gleichung (XI; 117) ist hier sinnlos, da im Integranden des zweiten Gliedes mit $m_1 = m_2$ und $\alpha = 0$ ein Ausdruck steht, der proportional $d\mu/\mu = d(\ln\mu)$ ist und für $\mu = 0$ keine Bedeutung hat.

Die Diskussion der Lösungen (XI; 118) führen wir, um die Formeln zu vereinfachen, unter der Annahme $2m = 1$, $a = 1$ durch, was durch passende Wahl der Einheiten von Masse und Länge stets erreicht werden kann. Die Zeiteinheit wird dann wiederum so festzusetzen sein, daß die Gravitationskonstante $k = 1$ ist. Dann ist

$$\text{(XI; 119)} \quad \left\{ \begin{aligned} \ddot{z} &= -\frac{z}{\sqrt{(1 + z^2)^3}}, \\ \frac{1}{2}\dot{z}^2 &= h + \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}} = h + \frac{1}{r} \geqq h + 1, \\ t - t_0 = \tau &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{h + \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}}}, \end{aligned} \right.$$

und $t = t_0$, $\tau = 0$ stellt jenen Zeitpunkt dar, in dem $z = 0$ ist, der infinitesimale Körper also den Koordinatenursprung durchschreitet. Da für jede reelle Bewegung $\dot{z}^2 \geqq 0$ ist, folgt aus (XI; 119) $h \geqq -1$. Die Bewegung besitzt Umkehrpunkte ($\dot{z} = 0$, $z = \pm\gamma$) für

$$h = -\frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2}},$$

also nur für negative h. Ist demnach $-1 \leqq h < 0$ (elliptischer Fall), so erfolgt die Bewegung zwischen den Umkehrpunkten

$$z_{\text{extr}} = \pm\gamma = \pm\sqrt{\frac{1}{h^2} - 1}.$$

Ist speziell $h = -1$, so ist $\gamma = 0$, d.h., der Körper ruht für alle Zeiten im Massenmittelpunkt des Systems. Allerdings ist diese Gleichgewichtslage nicht stabil, wie wir später (Kapitel XIII) noch erfahren werden. Ist $h = 0$ (parabolischer Fall), so rücken die Umkehrpunkte ins Unendliche; ist $h > 0$, so bleibt auch im Unendlichen die Geschwindigkeit noch von Null verschieden (hyperbolischer Fall).

Besonderes Interesse verdient der elliptische Fall, in dem die kleine Masse auf der Symmetrieachse des Systems pendelartige Schwingungen um den Koordinatenursprung ausführt. Die Bewegung, deren Geschwindigkeit ihre Extrema

$$\dot{z}_{\text{extr}} = \pm\sqrt{2(h+1)} = \pm 2k, \qquad \left(\begin{array}{l} -1 \leqq h < 0, \\ 0 \leqq k = \sqrt{\dfrac{1+h}{2}} < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right)$$

für $z = 0$ $(r = 1)$ erreicht, verläuft symmetrisch zu $z = 0$ und zu den Umkehrpunkten. Sie ist daher eine rein periodische Bewegung mit der Grundperiode p und der Amplitude γ und läßt sich in Form einer FOURIERschen Reihe

$$\text{(XI; 120)} \qquad z = a_1 \sin\nu\tau + a_3 \sin 3\nu\tau + a_5 \sin 5\nu\tau + \cdots, \qquad \left(\nu = \frac{2\pi}{p}\right)$$

darstellen. Man berechnet den vierten Teil der Periode p, indem man das Integral (XI; 119) von 0 bis γ erstreckt:

$$\text{(XI; 121)} \qquad \frac{p}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}} + h}}, \qquad \left(h = -\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\right).$$

Die Auswertung dieses elliptischen Integrals gelingt leicht, wenn man es auf die LEGENDREsche Normalform bringt: Mit der Substitution

$$\xi^2 = \frac{1-(1+z^2)^{-1/2}}{1+h} = \frac{1}{2k^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right) \quad \text{mit} \quad 0 < k^2 < \frac{1}{2},$$

$$2\xi\, d\xi = \frac{z\, dz}{2k^2(1+z^2)^{3/2}}$$

oder

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = 1 - 2k^2\xi^2; \quad z = \frac{2k\xi\sqrt{1-k^2\xi^2}}{1-2k^2\xi^2},$$

$$dz = \frac{2k\, d\xi}{(1-2k^2\xi^2)^2\sqrt{1-k^2\xi^2}}$$

erhält man aus (XI; 121) das elliptische Integral dritter Gattung

$$p = 4\int_0^1 \frac{d\xi}{(1-2k^2\xi^2)^2\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}$$

oder, wenn man noch $\xi = \sin\varphi$, $d\xi = \cos\varphi\, d\varphi = \sqrt{1-\xi^2}\, d\varphi$ einführt,

$$p = 4\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - 2k^2 \sin^2\varphi)^2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}.$$

Der Integrand läßt sich, da $2k^2 < 1$ ist, in eine Potenzreihe nach $k^2 \sin^2\varphi$ entwickeln:

(XI; 122)

$$p = 4\int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{9}{2} k^2 \sin^2\varphi + \frac{115}{8} k^4 \sin^4\varphi + \frac{637}{16} k^6 \sin^6\varphi + \cdots\right) d\varphi =$$

$$= 2\pi\left(1 + \frac{9}{4} k^2 + \frac{345}{64} k^4 + \frac{3185}{256} k^6 + \cdots\right),$$

da ja

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{4}; \quad \int_0^{\pi/2} \sin^4\varphi\, d\varphi = \frac{3\pi}{16}; \quad \int_0^{\pi/2} \sin^6\varphi\, d\varphi = \frac{5\pi}{32}; \ldots,$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{\pi (2n)!}{2^{2n+1} n!\, n!}$$

gilt.

Zur Bestimmung der Koeffizienten der Fourier-Entwicklung (XI; 120) wendet MacMillan folgenden Kunstgriff an. Führt man statt z die neue Variable

$$\zeta = 1 - \frac{z}{\gamma}, \quad (0 \leqq \zeta \leqq 2); \quad z = \gamma(1 - \zeta), \quad dz = -\gamma\, d\zeta$$

ein, so lautet die Differentialgleichung (XI; 119)

$$\ddot{\zeta} = (1 - \zeta)\,[1 + \gamma^2 (1 - \zeta)^2]^{-3/2}$$

oder, wenn man statt der unabhängigen Variablen τ

$$\Theta = \nu\tau - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{p}\left(\tau - \frac{p}{4}\right)$$

setzt und Ableitungen nach Θ durch Striche kennzeichnet,

$$\zeta'' = \frac{d^2\zeta}{d\Theta^2} = \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 \ddot{\zeta} = \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 (1 - \zeta)\,(1 + \gamma^2)^{-3/2} \left[1 - \frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2}(2\zeta - \zeta^2)\right]^{-3/2}.$$

Setzt man schließlich zur Abkürzung

$$\mu = \frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2}; \quad 1 - \mu = \frac{1}{1 + \gamma^2},$$

so erhält man für $\zeta = \zeta(\Theta)$ die Differentialgleichung

$$\zeta'' = \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 \frac{(1-\zeta)(1-\mu)^{3/2}}{[1-\mu(2\zeta-\zeta^2)]^{3/2}},$$

deren rechte Seite sich wegen $0 < \mu < 1$, $0 < 2\zeta - \zeta^2 \leqq 1$ in eine stets konvergente Potenzreihe nach μ entwickeln läßt, wenn man noch für $p/2\pi$ die Potenzreihe (XI; 122) benutzt und bedenkt, daß

$$k^2 = \frac{1+h}{2} = \frac{1}{2}[1-(1+\gamma^2)^{-1/2}] = \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-\mu}) =$$
$$= \frac{1}{4}\mu + \frac{1}{16}\mu^2 + \frac{1}{32}\mu^3 + \frac{5}{256}\mu^4 + \cdots$$

gesetzt werden kann. Dann tritt an die Stelle von (XI; 122)

$$\frac{p}{2\pi} = 1 + \frac{9}{16}\mu + \frac{489}{1024}\mu^2 + \frac{7097}{16384}\mu^3 + \cdots.$$

Führt man diese etwas umständliche, aber elementare Rechnung durch, so ergibt sich für $\zeta = \zeta(\Theta)$

(XI; 123)
$$\zeta'' = (1-\zeta)\left[1 + \frac{3}{2}\mu(2\zeta-\zeta^2) + \frac{15}{8}\mu^2(2\zeta-\zeta^2)^2 + \frac{35}{16}\mu^3(2\zeta-\zeta^2)^3 + \cdots\right],$$

eine Differentialgleichung, deren Lösung für die Anfangsbedingungen $\zeta(0) = \zeta'(0) = 0$ gesucht wird.

Nun ist ζ, ebenso wie z, eine periodische Funktion von Θ mit der Periode 2π. Sie läßt sich ferner in der Form

(XI; 124)
$$\zeta = \zeta_0 + \mu\zeta_1 + \mu^2\zeta_2 + \cdots$$

darstellen, wo $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots$ periodische Funktionen der gleichen Art sind, die aber den Parameter μ nicht enthalten. Setzt man also (XI; 124) in (XI; 123) ein, so erhält man, da diese Beziehung in μ identisch ist und man daher die Faktoren von μ^n auf beiden Seiten gleichsetzen darf, sukzessive

(XI; 125)
$$\begin{cases} \zeta_0'' = 1 - \zeta_0, \\ \zeta_1'' = -\frac{3}{8}(1 - 9\zeta_0 + 12\zeta_0^2 - 4\zeta_0^3) - \zeta_1, \\ \zeta_2'' = -\frac{3}{512}(7 + 185\zeta_0 - 1568\zeta_0^2 + 2656\zeta_0^3 - 1600\zeta_0^4 + \\ \quad + 320\zeta_0^5) - \frac{3}{8}(-9\zeta_1 + 24\zeta_0\zeta_1) - \zeta_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Nun gelten auch für die $\zeta_n(\Theta)$ die gleichen Anfangsbedingungen wie für $\zeta(\Theta)$ selbst, also $\zeta_n(0) = \zeta_n'(0) = 0$. Die erste der Differentialgleichungen (XI; 125),

$$\zeta_0'' + \zeta_0 = 1,$$

hat dann die Lösung

$$\zeta_0 = 1 - \cos\Theta.$$

Setzt man dies in die zweite Gleichung (XI; 125) ein, so erhält man

$$\zeta_1'' + \zeta_1 = -\frac{3}{8}\cos 3\Theta,$$

woraus man unter den obigen Anfangsbedingungen

$$\zeta_1 = -\frac{3}{64}(\cos\Theta - \cos 3\Theta)$$

ableitet. Hiermit nimmt die dritte Gleichung die Form

$$\zeta_2'' + \zeta_2 = -\frac{1}{512}(108\cos 3\Theta - 87\cos 5\Theta)$$

an, deren Lösung mit $\zeta_2(0) = \zeta_2'(0) = 0$

$$\zeta_2 = -\frac{1}{4096}(79\cos\Theta - 108\cos 3\Theta + 29\cos 5\Theta)$$

lautet, und so fort. Bis zu Gliedern zweiter Ordnung in μ ist demnach

$$\zeta = 1 - \cos\Theta - \frac{3}{64}\mu(\cos\Theta - \cos 3\Theta) - \\ - \frac{1}{4096}\mu^2(79\cos\Theta - 108\cos 3\Theta + 29\cos 5\Theta) - \cdots,$$

also

$$z = \gamma(1 - \zeta) = \gamma\left[\cos\Theta + \frac{3}{64}\mu(\cos\Theta - \cos 3\Theta) + \cdots\right].$$

Führt man nun wieder $\nu\tau = \Theta + \pi/2$ ein, so ergibt sich schließlich für $z = z(\tau)$ die Entwicklung (XI; 120) explizit:

$$z = \gamma\left[\sin\nu\tau + \frac{3}{64}\mu(\sin\nu\tau + \sin 3\nu\tau) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4096}\mu^2(79\sin\nu\tau + 108\sin 3\nu\tau + 29\sin 5\nu\tau) + \cdots\right]$$

mit

$$\gamma = \sqrt{\frac{\mu}{1-\mu}}.$$

KAPITEL XII

DIE LAGRANGESCHE THEORIE

105. *Das reduzierte Dreikörperproblem*

Die vollständige Lösung des Dreikörperproblems erfordert, wie wir gesehen haben, achtzehn Integrale, von denen zehn bekannt sind. Führt man relative Koordinaten ein, so vermindert sich die Zahl der Integrale infolge der Elimination der sechs Schwerpunktskonstanten auf zwölf, von denen vier bekannt sind, nämlich das Energieintegral und die drei Integrale des Drehimpulssatzes. Wir werden später (Abschnitt 136) ein Verfahren kennenlernen, diese Reduktion des Systems auf die achte Ordnung explizit durchzuführen, und es wird sich dabei zeigen, daß dann noch eine weitere Reduktion auf die siebente Ordnung möglich wird. Dies auf elegante Art gezeigt zu haben, ist das Verdienst von H. POINCARÉ. Die Möglichkeit einer solchen Reduktion ist schon bedeutend früher von LAGRANGE (1772) und JACOBI (1843) bewiesen worden.

LAGRANGE hat gelehrt, daß die vollständige Lösung des Dreikörperproblems möglich wäre, wenn es gelänge, die *von der speziellen Wahl des Koordinatensystems unabhängigen* Bestimmungsstücke der Bewegung als Funktionen der Zeit zu bestimmen. Wir wollen dieses Teilproblem mit HESSE als das *reduzierte Dreikörperproblem* bezeichnen (nicht zu verwechseln mit dem *eingeschränkten Dreikörperproblem*, dem „problème restreint"). Nach erfolgter Lösung des reduzierten Problems kann man nämlich die noch fehlenden Bestimmungsstücke, die das System der drei Körper in ein beliebiges räumliches Koordinatensystem einfügen, teils direkt, teils durch Quadratur über schon bekannte Funktionen ermitteln.

Im Zweikörperproblem haben wir entsprechende Verhältnisse. Das reduzierte Problem erfordert die Bestimmung jener Größen als Funktionen der Zeit, die vom Koordinatensystem unabhängig sind. Das sind im relativen Zweikörperproblem etwa folgende drei Größen: der Abstand r der beiden Massen, die relative Geschwindigkeit V und der von den Vektoren des relativen Ortes und der relativen Geschwindigkeit gebildete Winkel δ (s. auch Abschnitt 40). Wenn $\mathfrak{p}$, $\dot{\mathfrak{p}}$ diese beiden Vektoren sind, so kann man auch die vom Koordinatensystem und voneinander unabhängigen Skalarprodukte [vgl. (V; 11)]

$$p_{11} = (\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}) = r^2; \quad p_{12} = (\mathfrak{p}\,\dot{\mathfrak{p}}) = r V \cos\delta; \quad p_{22} = (\dot{\mathfrak{p}}\,\dot{\mathfrak{p}}) = V^2$$

als Unbekannte des Problems ansehen. Diese drei Größen, die wir als *lokale Invarianten* bezeichnet haben, weil sie noch vom Ort des einen Massenpunktes in seiner Bahn relativ zum andern abhängen, bilden ein System dritter Ordnung, d.h., sie lassen sich als Lösungen von drei Differentialgleichungen erster Ordnung bestimmen, an deren Stelle aber auch eine einzige Differentialgleichung dritter Ordnung für eine dieser Größen, etwa p_{11} (oder r), treten kann.

Im Falle der Zweikörperbewegung kann man in der Tat das reduzierte Problem in Form der Differentialgleichung (V; 32)

$$\text{(XII; 1)} \qquad r\dddot{r} + 3\dot{r}\ddot{r} + \frac{\dot{r}}{r^2} = \frac{d}{dt}\left(r\ddot{r} + \dot{r}^2 - \frac{1}{r}\right) = 0$$

schreiben, wobei die Zeiteinheit so gewählt worden ist, daß $k^2(M + m) = 1$ ist, wenn M und m die beiden beteiligten Massen bedeuten und k die Gravitationskonstante ist. Das reduzierte Problem ist in diesem Fall lösbar. Die erste Integration liefert

$$r\ddot{r} + \dot{r}^2 - \frac{1}{r} = \alpha = \text{const},$$

die zweite gelingt mit Hilfe des integrierenden Faktors $r\dot{r}$, der auf die Beziehung

$$r\dot{r}\frac{d}{dt}(r\dot{r}) - \dot{r} = \frac{1}{2}\alpha\frac{d}{dt}(r^2)$$

führt, deren Integration

$$\frac{1}{2}(r\dot{r})^2 - r = \frac{1}{2}\alpha r^2 + \beta, \quad (\beta = \text{const})$$

ergibt. Das dritte Integral erhält man dann aus

$$r\dot{r} = \sqrt{\alpha r^2 + 2r + 2\beta}\,; \quad dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{\alpha r^2 + 2r + 2\beta}}$$

durch Quadratur:

$$t - \gamma = \int_{r_0}^{r} \frac{r\,dr}{\sqrt{\alpha r^2 + 2r + 2\beta}}, \quad (\gamma = \text{const}).$$

Die drei Konstanten α, β, γ haben, wie aus Abschnitt 40 bekannt, die Bedeutung

$$\alpha = -\frac{1}{a}; \quad \beta = -\frac{p}{2}; \quad \gamma = t_0,$$

wo a die große Halbachse, p den Parameter der Kegelschnittbahn darstellt und t_0 den Zeitpunkt bedeutet, in dem r den Wert r_0 annimmt. Diese untere Grenze des Integrals kann man speziell so festlegen, daß t_0 die Durchgangszeit durch das Perihel der Bahn bedeutet. Dann ist $r_0 = a(1 - e)$ und $e^2 = 1 - p/a$ durch α und β bereits mitbestimmt.

Es läßt sich nun sehr leicht zeigen, daß nach Lösung des reduzierten Problems die Auffindung der drei übrigen Integrale des Gesamtproblems keine Schwierigkeiten mehr macht. Unter ihnen befinden sich nämlich noch zwei der vier bekannten Integrale des relativen Zweikörperproblems, da in der Lösung des reduzierten Problems nur zwei von ihnen enthalten sind, nämlich das Energie-

integral mit $h = -1/2a$ als Konstante und der Flächensatz mit $g = \sqrt{p}$ als Konstante. Schreibt man die drei Flächensätze in der Form (IV; 6)

$$\begin{aligned} c_1 &= \quad g \sin i \sin \Omega, \\ c_2 &= -g \sin i \cos \Omega, \quad \left(g = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}\right), \\ c_3 &= \quad g \cos i, \end{aligned}$$

so erkennt man, daß diese neben dem schon bekannten g auch die Konstanten i, Ω liefern, die zur Bestimmung der Lage der Bahnebene in einem vorgegebenen Koordinatensystem notwendig sind. Das letzte der sechs Integrale, der Abstand ω des Perihels vom Knoten, ist dann durch Quadratur bestimmbar; denn aus dem Flächensatz $r^2 \dot{\varphi} = g$ folgt ja weiter

$$\varphi - \varphi_0 = g \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{r^2}$$

mit $\varphi_0 = \omega$, wenn t_0 die Zeit des Periheldurchgangs ist.

Im Dreikörperproblem wird die von den beiden relativen Ortsvektoren und den beiden relativen Geschwindigkeitsvektoren gebildete geometrische Figur durch neun gegen Koordinatentransformationen invariante Stücke bestimmt, z.B. durch die Beträge dieser vier Vektoren und fünf der sechs Winkel, die sie miteinander bilden. Wenn wir nämlich die Richtungen der Vektoren als Punkte (A, B, C, D) auf der Einheitskugel deuten, so wird die gegenseitige Lage dieser vier Punkte, also die geometrische Gestalt des sphärischen Vierecks, durch fünf Querverbindungen festgelegt, etwa durch vier Seiten und eine Diagonale (z.B. $\overline{AC}$). Dabei besteht allerdings noch eine Mehrdeutigkeit; denn klappt man eines der beiden Teildreiecke der Figur (Abb. 12) um die gemeinsame Seite um, so erhält man ein zweites Viereck mit den gleichen fünf Bestimmungsstücken ($AB'CD$ oder $ABCD'$). Diese Mehrdeutigkeit ließe sich aber beseitigen, wenn man für die Teildreiecke bestimmte Umlaufssinne vorschriebe. Jedenfalls ist die sechste Seite des vollständigen Vierecks $ABCD$ nicht mehr willkürlich wählbar, sondern, von der eben genannten Mehrdeutigkeit abgesehen, durch die übrigen fünf mitbestimmt.

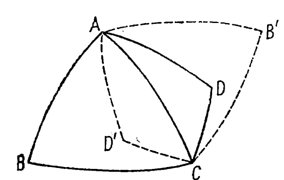


Abb. 12. Richtungen der relativen Orts- und Geschwindigkeitsvektoren an der Sphäre

Das reduzierte Dreikörperproblem ist also nach LAGRANGE gelöst, wenn es gelingt, neun der zwölf Integrale des relativen Problems zu finden, d.h., die vier Vektorbeträge der relativen Örter und Geschwindigkeiten und die fünf Winkel als Funktionen der Zeit zu bestimmen. Statt dessen kann man auch die zwischen den vier Vektoren $\mathfrak{p}_1$, $\dot{\mathfrak{p}}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\dot{\mathfrak{p}}_2$ möglichen skalaren Produkte als Unbekannte des Problems einführen. Aus Zweckmäßigkeitsgründen bedienen wir uns dabei einer neuen Bezeichnungsweise: Es sei

$$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{r}_1; \quad \dot{\mathfrak{p}}_1 = \mathfrak{r}_2; \quad \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{r}_3; \quad \dot{\mathfrak{p}}_2 = \mathfrak{r}_4$$

gesetzt; wir geben also den relativen Ortsvektoren ungerade Indizes, den dazugehörigen Geschwindigkeitsvektoren den jeweils darauffolgenden geraden Index. Die zwischen den vier Vektoren möglichen skalaren Produkte bilden dann die Matrix

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} (\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_1) & (\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2) \dots (\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_4) \\ (\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_1) & (\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_2) \dots (\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_4) \\ \dots & \dots \\ (\mathfrak{r}_4 \mathfrak{r}_1) & (\mathfrak{r}_4 \mathfrak{r}_2) \dots (\mathfrak{r}_4 \mathfrak{r}_4) \end{pmatrix},$$

die in bezug auf die Hauptdiagonale symmetrisch ist, da $(\mathfrak{r}_i \mathfrak{r}_k) = (\mathfrak{r}_k \mathfrak{r}_i)$ gilt. Es gibt also zehn verschiedene Produkte dieser Art, die aber nicht unabhängig voneinander sind; denn es ist nach dem Multiplikationssatz der Determinanten, wenn wir

$$(\mathfrak{r}_i \mathfrak{r}_k) = x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k$$

schreiben, die Determinante dieser Matrix

$$|\mathfrak{M}| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 0 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 0 \end{vmatrix}^2 = 0.$$

Zwischen den zehn Skalarprodukten, die wir – in Anlehnung an die Bezeichnungsweise in Abschnitt 40 – als die *lokalen Invarianten* des Dreikörperproblems bezeichnen wollen, besteht also noch eine identische Beziehung, mit deren Hilfe sich eine der zehn Invarianten durch die übrigen neun ausdrücken läßt. Es sind also im reduzierten Dreikörperproblem nur neun unabhängige Invarianten vorhanden. Auch die oben erwähnte Mehrdeutigkeit findet sich hier wieder, da die Winkel zwischen den Vektoren in den Skalarprodukten nur durch ihre Kosinus vertreten sind.

Hätte man das reduzierte Problem gelöst, so wäre damit nach dem Satz von LAGRANGE auch die Integration des vollständigen Problems gewährleistet. Von den vier bekannten Integralen der relativen Dreikörperbewegung befinden sich nur zwei unter den neun Integralen des reduzierten Problems, nämlich diejenigen beiden, deren Konstanten von der Wahl des Koordinatensystems nicht abhängen. Das sind die Energiekonstante und der Betrag des Drehimpulsvektors. Die übrigen beiden Konstanten des Drehimpulssatzes, durch die die Lage der UVE in dem gewählten Koordinatensystem festgelegt wird, gehören dem reduzierten Problem nicht an, sind aber zusätzlich bekannt. Es bleibt also nur noch eine einzige Integration auszuführen übrig. Diese läßt sich aber, wie LAGRANGE gezeigt hat, auf eine Quadratur über bereits bekannt gewordene Funktionen zurückführen. Man kann das auch so ausdrücken: Mit Hilfe des Drehimpulssatzes läßt sich die von den vier Vektoren gebildete geometrische Figur in bezug auf die UVE orientieren. Die letzte Integration bezieht sich dann auf die Definition einer Anfangsrichtung in der UVE bzw. auf die Einordnung der Bewegung des Systems in eine Zeitskala.

Es mag bei oberflächlicher Betrachtung der Sachlage so aussehen, als sage der LAGRANGEsche Satz mehr aus als der in Abschnitt 92 erwähnte Satz von JACOBI, nach dem das Dreikörperproblem gelöst ist, wenn man alle Integrationen bis auf zwei ausgeführt hat. In Wirklichkeit ist es umgekehrt; denn unter den drei restlichen Integralen, die nach Lösung des reduzierten Problems übrigbleiben, befinden sich ja zwei bekannte. Den vollständigen Beweis des LAGRANGEschen Satzes werden wir in Abschnitt 107 nachholen.

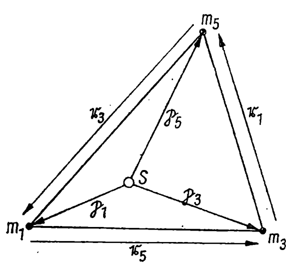


Abb. 13. Relative und absolute Ortsvektoren im Dreikörperproblem

106. *Die lokalen Invarianten des Dreikörperproblems*

Um symmetrische Formeln zu erhalten, bezeichnen wir die drei absoluten (d. h. auf den Schwerpunkt des Systems bezogenen) Ortsvektoren mit $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5$, die drei Massen mit m_1, m_3, m_5 und die drei relativen Ortsvektoren (Abb. 13) mit

$$\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{p}_5 - \mathfrak{p}_3; \quad \mathfrak{r}_3 = \mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_5; \quad \mathfrak{r}_5 = \mathfrak{p}_3 - \mathfrak{p}_1$$

oder allgemein mit

$$\mathfrak{r}_i = \mathfrak{p}_k - \mathfrak{p}_j,$$

wo die Indizes i, j, k jede zyklische Permutation der ungeraden Zahlen 1, 3, 5 annehmen können. Die drei Vektoren bilden einen geschlossenen Zug, und es ist

$$\text{(XII; 2)} \qquad \sum \mathfrak{r}_i = \mathfrak{r}_i + \mathfrak{r}_j + \mathfrak{r}_k = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_3 + \mathfrak{r}_5 = 0.$$

Desgleichen seien

$$\dot{\mathfrak{r}}_1 = \mathfrak{r}_2; \quad \dot{\mathfrak{r}}_3 = \mathfrak{r}_4; \quad \dot{\mathfrak{r}}_5 = \mathfrak{r}_6$$

die relativen Geschwindigkeitsvektoren. Allgemein schreiben wir

$$\dot{\mathfrak{r}}_i = \mathfrak{r}_\alpha; \quad \dot{\mathfrak{r}}_j = \mathfrak{r}_\beta; \quad \dot{\mathfrak{r}}_k = \mathfrak{r}_\gamma,$$

und es ist

$$\text{(XII; 3)} \qquad \sum \dot{\mathfrak{r}}_i = \sum \mathfrak{r}_\alpha = \mathfrak{r}_\alpha + \mathfrak{r}_\beta + \mathfrak{r}_\gamma = \mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_4 + \mathfrak{r}_6 = 0.$$

Zwischen den sechs Vektoren $\mathfrak{r}_i$, $\mathfrak{r}_\alpha$ sind dann, wenn wir die Vertauschbarkeit der Reihenfolge in skalaren Produkten berücksichtigen, 21 lokale Invarianten

$$\text{(XII; 4)} \qquad \left\{ \begin{array}{llll} p_{11} = (\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_1); & p_{12} = (\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2); & \ldots; & p_{16} = (\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_6), \\ & p_{22} = (\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_2); & \ldots; & p_{26} = (\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_6), \\ & & \ldots\ldots\ldots & , \\ & & & p_{66} = (\mathfrak{r}_6 \mathfrak{r}_6) \end{array} \right.$$

möglich, von denen aber nur neun voneinander unabhängig sind, denn wegen (XII; 2) und (XII; 3) ist ja

$$p_{15} = (\mathfrak{r}_1, -\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_3) = -(p_{11} + p_{13}); \quad p_{16} = (\mathfrak{r}_1, -\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_4) = -(p_{12} + p_{14}),$$
$$p_{25} = (\mathfrak{r}_2, -\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_3) = -(p_{12} + p_{23}); \quad p_{26} = (\mathfrak{r}_2, -\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_4) = -(p_{22} + p_{24}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$
$$p_{55} = (\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_3)^2 = p_{11} + 2p_{13} + p_{33}; \quad p_{66} = p_{22} + 2p_{24} + p_{44},$$
$$p_{56} = (\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_3)(\mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_4) = p_{12} + p_{23} + p_{14} + p_{34};$$

es bestehen also lineare Beziehungen, mit deren Hilfe man die elf Invarianten (XII; 4), in deren Indizes die Ziffern 5 und 6 vorkommen, durch die übrigen zehn ausdrücken kann, außerdem als zwölfte Beziehung die Identität vierten Grades

$$\text{(XII; 5)} \qquad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{vmatrix} = 0, \qquad (p_{\mu\nu} = p_{\nu\mu}),$$

die wir schon im vorigen Abschnitt bewiesen haben.

Außer diesen zwölf Gleichungen gibt es zwischen den lokalen Invarianten noch zwei weitere algebraische Beziehungen, die aus den beiden bekannten Integralen des reduzierten Problems folgen und durch die sich die Zahl der unbekannten Funktionen auf sieben herabdrücken läßt. Das *Energieintegral* (XI; 25)

$$\frac{1}{2} \sum \frac{\dot{\mathfrak{r}}_i^2}{m_i} - \sum \frac{1}{m_i r_i} = h$$

ergibt die Beziehung

$$\text{(XII; 6)} \quad h = \frac{1}{2} \sum \frac{p_{\alpha\alpha}}{m_i} - \sum \frac{1}{m_i \sqrt{p_{ii}}} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{p_{22}}{m_1} + \frac{p_{44}}{m_3} + \frac{p_{66}}{m_5} \right) - \left(\frac{1}{m_1 \sqrt{p_{11}}} + \frac{1}{m_3 \sqrt{p_{33}}} + \frac{1}{m_5 \sqrt{p_{55}}} \right).$$

Ferner liefert der Drehimpulssatz (XI; 24) für den Betrag g des Drehimpulsvektors die Formel

$$(\mathfrak{g}\,\mathfrak{g}) = g^2 = \left(\sum \frac{[\mathfrak{r}_i\, \dot{\mathfrak{r}}_i]}{m_i} \right)^2 = \sum \frac{[\mathfrak{r}_i\, \dot{\mathfrak{r}}_i]^2}{m_i^2} + 2 \sum \frac{[\mathfrak{r}_j\, \dot{\mathfrak{r}}_j]\,[\mathfrak{r}_k\, \dot{\mathfrak{r}}_k]}{m_j\, m_k}.$$

Setzt man in ihr

$$\text{(XII; 7)} \quad \begin{cases} \Psi_{ii} = [\mathfrak{r}_i\, \dot{\mathfrak{r}}_i]^2 = [\mathfrak{r}_i\, \mathfrak{r}_\alpha]^2 = \begin{vmatrix} p_{ii} & p_{i\alpha} \\ p_{\alpha i} & p_{\alpha\alpha} \end{vmatrix} = p_{ii} p_{\alpha\alpha} - p_{i\alpha}^2, \\ \Phi_{jk} = [\mathfrak{r}_j\, \dot{\mathfrak{r}}_j]\,[\mathfrak{r}_k\, \dot{\mathfrak{r}}_k] = [\mathfrak{r}_j\, \mathfrak{r}_\beta]\,[\mathfrak{r}_k\, \mathfrak{r}_\gamma] = \begin{vmatrix} p_{jk} & p_{j\gamma} \\ p_{\beta k} & p_{\beta\gamma} \end{vmatrix} = p_{jk} p_{\beta\gamma} - p_{\beta k} p_{j\gamma}, \end{cases}$$

so ergibt sich

$$\text{(XII; 8)} \qquad g^2 = \frac{\Psi_{11}}{m_1^2} + \frac{\Psi_{33}}{m_3^2} + \frac{\Psi_{55}}{m_5^2} + 2 \left(\frac{\Phi_{35}}{m_3\, m_5} + \frac{\Phi_{51}}{m_5\, m_1} + \frac{\Phi_{13}}{m_1\, m_3} \right).$$

Man kann die Formeln (XII; 6) bis (XII; 8) mit Hilfe der obigen linearen Relationen natürlich auch durch $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{44}$ allein ausdrücken; sie verlieren dann aber ihre schöne Symmetrie, und besonders (XII; 8) nimmt eine komplizierte und unübersichtliche Form an.

107. *Der Satz von* LAGRANGE

Wir wollen jetzt den in Abschnitt 105 formulierten Satz von LAGRANGE beweisen, daß man mit der Lösung des reduzierten Problems auch das vollständige Dreikörperproblem beherrscht.

Aus dem Drehimpulssatz

$$\text{(XII; 9)} \qquad \frac{[\mathfrak{r}_i\,\dot{\mathfrak{r}}_i]}{m_i} + \frac{[\mathfrak{r}_j\,\dot{\mathfrak{r}}_j]}{m_j} + \frac{[\mathfrak{r}_k\,\dot{\mathfrak{r}}_k]}{m_k} = \mathfrak{g}$$

erhält man durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{r}_i$

$$\text{(XII; 10)} \qquad \frac{(\mathfrak{r}_j\,\dot{\mathfrak{r}}_j\,\mathfrak{r}_i)}{m_j} + \frac{(\mathfrak{r}_k\,\dot{\mathfrak{r}}_k\,\mathfrak{r}_i)}{m_k} = (\mathfrak{g}\,\mathfrak{r}_i),$$

wenn man für die gemischten Produkte die Bezeichnung

$$(\mathfrak{r}_j\,\dot{\mathfrak{r}}_j\,\mathfrak{r}_i) = [\mathfrak{r}_j\,\dot{\mathfrak{r}}_j]\,\mathfrak{r}_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ \dot{x}_j & \dot{y}_j & \dot{z}_j \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix},$$

. . . .

verwendet und bedenkt, daß $(\mathfrak{r}_i\,\dot{\mathfrak{r}}_i\,\mathfrak{r}_i) = 0$ ist. Sind die rechtwinkligen Koordinaten x_i, y_i, z_i der Vektoren $\mathfrak{r}_i$ auf die UVE bezogen, so hat der Drehimpulsvektor die Koordinaten $(0, 0, g)$, und es ist

$$\text{(XII; 11)} \qquad (\mathfrak{g}\,\mathfrak{r}_i) = g\,z_i.$$

Auf den linken Seiten der drei Gleichungen (XII; 10), die wir durch zyklische Vertauschung der Indizes i, j, k erhalten, stehen vom Koordinatensystem unabhängige Ausdrücke, nämlich die sechsfachen Inhalte der von je drei Vektoren gebildeten Tetraeder. Setzt man

$$\delta_i = (\mathfrak{r}_i\,\dot{\mathfrak{r}}_i\,\mathfrak{r}_j) = -(\mathfrak{r}_i, \dot{\mathfrak{r}}_i, \mathfrak{r}_i + \mathfrak{r}_k) = -(\mathfrak{r}_i\,\dot{\mathfrak{r}}_i\,\mathfrak{r}_k),$$

so ist

$$\text{(XII; 12)} \qquad \delta_i^2 = \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ \dot{x}_i & \dot{y}_i & \dot{z}_i \\ x_j & y_j & z_j \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} p_{ii} & p_{i\alpha} & p_{ij} \\ p_{\alpha i} & p_{\alpha\alpha} & p_{\alpha j} \\ p_{ji} & p_{j\alpha} & p_{jj} \end{vmatrix}$$

eine Funktion der lokalen Invarianten, und es ist wegen (XII; 10) und (XII; 11)

$$\text{(XII; 13)} \qquad z_i = \frac{1}{g}\left(\frac{\delta_k}{m_k} - \frac{\delta_j}{m_j}\right).$$

Die drei Größen δ_i sind wegen (XII; 12) dem Betrage nach bekannt. Nun ist aber

$$\delta_i + \delta_j = -(\mathfrak{r}_i\,\dot{\mathfrak{r}}_i\,\mathfrak{r}_k) + (\mathfrak{r}_j\,\dot{\mathfrak{r}}_j\,\mathfrak{r}_k) =$$
$$= -(\mathfrak{r}_i\,\dot{\mathfrak{r}}_i\,\mathfrak{r}_k) - (\mathfrak{r}_i\,\dot{\mathfrak{r}}_j\,\mathfrak{r}_k) = (\mathfrak{r}_i\,\dot{\mathfrak{r}}_k\,\mathfrak{r}_k) = -\delta_k,$$

woraus

$$\text{(XII; 14)} \qquad \sum \delta_i = \delta_i + \delta_j + \delta_k = 0$$

folgt. Quadriert man diese Gleichung, so ergibt sich

$$\delta_i(\delta_i + \delta_j + \delta_k) + \delta_j^2 + \delta_k^2 + 2\delta_j\,\delta_k + \delta_i(\delta_j + \delta_k) = 0$$

oder, mit Rücksicht auf (XII; 14),

$$2\delta_j\,\delta_k = \delta_i^2 - \delta_j^2 - \delta_k^2. \tag{XII; 15}$$

Die Produkte $\delta_j\,\delta_k$ sind also auch dem Vorzeichen nach bekannt. Wählt man das Vorzeichen einer der Größen δ_i willkürlich, so folgen aus (XII; 15) auch die Vorzeichen der beiden anderen. Die Gleichungen (XII; 13) liefern somit die z_i eindeutig, wenn man in dieser Weise über die Vorzeichen der δ_i verfügt hat. Die in dieser Entscheidung liegende Willkür bedeutet nichts anderes, als daß man nach Belieben $\mathfrak{g}$ mit $-\mathfrak{g}$ vertauschen darf, d.h., es ist gleichgültig, ob man das Koordinatensystem als ein links- oder rechtsdrehendes ansehen will.

Damit ist gezeigt, daß in einem System, dessen Hauptebene die UVE ist, die relativen z-Koordinaten der drei Körper aus den lokalen Invarianten berechnet werden können und daher, nach Lösung des reduzierten Problems, als Funktionen der Zeit bekannt sind. Es bleibt noch zu demonstrieren, wie man auch die x_i und y_i bestimmen kann.

Multipliziert man (XII; 9) skalar mit $[\mathfrak{r}_i\,\dot{\mathfrak{r}}_i]$ und beachtet (XII; 7), so entstehen die Gleichungen

$$Q_i = \frac{\Psi_{ii}}{m_i} + \frac{\Phi_{ij}}{m_j} + \frac{\Phi_{ik}}{m_k} = \mathfrak{g}[\mathfrak{r}_i\,\dot{\mathfrak{r}}_i] = (\mathfrak{g}\,\mathfrak{r}_i\,\dot{\mathfrak{r}}_i).$$

Nun gilt aber

$$(\mathfrak{g}\,\mathfrak{r}_i\,\dot{\mathfrak{r}}_i) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & g \\ x_i & y_i & z_i \\ \dot{x}_i & \dot{y}_i & \dot{z}_i \end{vmatrix} = g(x_i\,\dot{y}_i - y_i\,\dot{x}_i),$$

$$x_i^2 + y_i^2 = r_i^2 - z_i^2,$$

und man erhält daher

$$F_i = \frac{x_i\,\dot{y}_i - y_i\,\dot{x}_i}{x_i^2 + y_i^2} = \frac{Q_i}{g(r_i^2 - z_i^2)}$$

als bekannte Funktionen der Zeit, da $r_i^2 = p_{ii}$, nach (XII; 7) die Q_i und, wie soeben bewiesen, auch die z_i als Funktionen der lokalen Invarianten bekannt sind. Setzt man

$$x_i = \varrho_i \cos\varphi_i; \quad y_i = \varrho_i \sin\varphi_i, \quad (\varrho_i^2 = x_i^2 + y_i^2 = r_i^2 - z_i^2), \tag{XII; 16}$$

so ist

$$\tan\varphi_i = \frac{y_i}{x_i}; \quad \frac{\dot{\varphi}_i}{\cos^2\varphi_i} = \frac{x_i\,\dot{y}_i - y_i\,\dot{x}_i}{x_i^2},$$

also

$$\dot{\varphi}_i = F_i. \tag{XII; 17}$$

Von den drei Gleichungen (XII; 17) sind nur zwei voneinander unabhängig, da ja wegen $\sum x_i = \sum y_i = 0$ jeweils eine der drei Koordinaten durch die beiden anderen mitbestimmt ist. Es genügt also, die Integrationen

$$\varphi_j = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + \int_{t_0}^{t} F_j\,dt,$$

$$\varphi_k = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1) + \int_{t_0}^{t} F_k\,dt$$

auszuführen, worauf

$$\varphi_i = \operatorname{arc\,tan} \frac{\varrho_j \sin\varphi_j + \varrho_k \sin\varphi_k}{\varrho_j \cos\varphi_j + \varrho_k \cos\varphi_k}$$

folgt. Von den beiden Integrationskonstanten $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ ist aber nur eine, nämlich ε_0, willkürlich. Es ist ja

$$x_j x_k + y_j y_k = p_{jk} - z_j z_k$$

als Funktion der Zeit bekannt. Wegen (XII; 16) ist daher

$$\cos(\varphi_j - \varphi_k) = \frac{p_{jk} - z_j z_k}{\varrho_j \varrho_k}$$

ebenfalls bekannt. Es ist also

$$\varepsilon_1 = \varphi_k - \varphi_j - \int_{t_0}^{t} (F_k - F_j)\,dt$$

derjenige Wert, den die bekannte Funktion $\varphi_k - \varphi_j$ für $t = t_0$ annimmt. Andererseits ist

$$\varphi_k + \varphi_j = \varepsilon_0 + \int_{t_0}^{t} (F_k + F_j)\,dt$$

eine neue Funktion, die man durch Quadratur erhält, und ε_0 die letzte Integrationskonstante des relativen Problems, über die noch verfügt werden kann.

108. *Die Invariante ϱ*

Ebenso wie im Zweikörperproblem (Abschnitt 40) erweist es sich auch hier als nützlich, neben den fundamentalen Invarianten $p_{\mu\nu}$ algebraische Kombinationen dieser Größen als „abgeleitete Invarianten" zu benutzen. Wir werden von dieser Möglichkeit noch öfter Gebrauch machen. LAGRANGE ist in seiner Analyse des Dreikörperproblems bei dem Versuch, die Beziehung (XII; 5) in die Form einer algebraischen Gleichung vierten Grades mit symmetrisch aufgebauten Koeffizienten zu bringen, auf eine solche Invariante von besonders bemerkenswerten Eigenschaften gestoßen. Man findet leicht, daß

$$p_{14} - p_{23} = -(p_{12} + p_{16}) + (p_{21} + p_{25}) = p_{25} - p_{16},$$

$$p_{14} - p_{23} = -(p_{34} + p_{54}) + (p_{43} + p_{63}) = p_{36} - p_{45}$$

ist. Man kann daher setzen

(XII; 18) $$2\varrho = p_{14} - p_{23} = p_{25} - p_{16} = p_{36} - p_{45}.$$

Andererseits könnte man zur Abkürzung

(XII; 19) $$2s_5 = p_{14} + p_{23}; \quad 2s_3 = p_{25} + p_{16}; \quad 2s_1 = p_{36} + p_{45}$$

einführen. Dann ist

$$\begin{aligned} p_{14} &= s_5 + \varrho; \quad p_{25} = s_3 + \varrho; \quad p_{36} = s_1 + \varrho, \\ p_{23} &= s_5 - \varrho; \quad p_{16} = s_3 - \varrho; \quad p_{45} = s_1 - \varrho. \end{aligned}$$

Setzt man dies in (XII; 5) ein, so nimmt diese Beziehung die Form

(XII; 20) $$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & s_5 + \varrho \\ p_{21} & p_{22} & s_5 - \varrho & p_{24} \\ p_{31} & s_5 - \varrho & p_{33} & p_{34} \\ s_5 + \varrho & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{vmatrix} = 0$$

an, also die einer Gleichung vierten Grades für ϱ von der Form

(XII; 21) $$\varrho^4 + A\,\varrho^2 + B\,\varrho + C = 0.$$

Das kubische Glied fehlt; denn wenn man (XII; 20) etwa nach der ersten Zeile entwickelt, erkennt man sofort, daß der einzige Term, der höhere als zweite Potenzen von ϱ enthält, gleich dem Produkt der vier Elemente der Nebendiagonale ist. Dieser Term lautet aber $(s_5^2 - \varrho^2)^2$ und weist nur gerade Potenzen von ϱ auf.

Die Identität (XII; 20) enthält neun voneinander unabhängige Invarianten, nämlich

(XII; 22) $$p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{22}, p_{24}, p_{33}, p_{34}, p_{44}; \; s_5.$$

Die zehnte, die LAGRANGEsche Invariante ϱ, ergibt sich dann als Lösung der biquadratischen Gleichung (XII; 21). Die Folge der Invarianten (XII; 22) ist aber unsymmetrisch in bezug auf die drei Massen des Problems. Um die Symmetrie wiederherzustellen, dürfen wir auf die Mitnahme von Invarianten, in deren Indizes die Ziffern 5 und 6 vorkommen, nicht verzichten. In der Tat gelingt es, den Koeffizienten der Gleichung (XII; 21) völlig symmetrische Gestalt zu geben, wenn man als unabhängige Invarianten etwa die Größen

(XII; 23) $$p_{11}, p_{33}, p_{55}; \; p_{22}, p_{44}, p_{66}; \; p_{12}, p_{34}, p_{56}$$

auswählt. Geometrisch betrachtet, repräsentieren diese neun Invarianten die drei Seiten des Ortsdreiecks, die drei Seiten des Geschwindigkeitsdreiecks und die Kosinus der Winkel, die zusammengehörige Orts- und Geschwindigkeitsvektoren miteinander bilden. Die Größen p_{13}, p_{24}, s_5 des Systems (XII; 22),

die dem System (XII; 23) nicht angehören, lassen sich nämlich leicht durch die Elemente von (XII; 23) ausdrücken. Aus

$$\begin{aligned} p_{55} &= -(p_{15}+p_{35}) = (p_{11}+p_{13})+(p_{31}+p_{33}),\\ p_{66} &= -(p_{26}+p_{46}) = (p_{22}+p_{24})+(p_{42}+p_{44}),\\ 2s_5 &= p_{14}+p_{23} = -(p_{12}+p_{16})-(p_{34}+p_{36}) \end{aligned}$$

leitet man die dazu notwendigen Beziehungen

$$\text{(XII; 24)} \qquad \begin{cases} 2p_{13} = p_{55}-p_{11}-p_{33},\\ 2p_{24} = p_{66}-p_{22}-p_{44},\\ 2s_5 = p_{56}-p_{12}-p_{34} \end{cases}$$

unmittelbar ab. Diese Gleichungen behalten ihre Gültigkeit, wenn man die Indizes i, j, k bzw. $\alpha = i+1$, $\beta = j+1$, $\gamma = k+1$ zyklisch vertauscht. Es ist also allgemein

$$\text{(XII; 25)} \qquad \begin{cases} 2p_{jk} = p_{ii}-p_{jj}-p_{kk},\\ 2p_{\beta\gamma} = p_{\alpha\alpha}-p_{\beta\beta}-p_{\gamma\gamma},\\ 2s_i = p_{i\alpha}-p_{j\beta}-p_{k\gamma}, \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} i,j,k=1,3,5\\ \alpha,\beta,\gamma=2,4,6 \end{pmatrix}.$$

Setzt man (XII; 24) in (XII; 20) ein, so erhält man nach elementarer, aber teilweise recht umständlicher Rechnung für die Koeffizienten der biquadratischen Gleichung symmetrische Ausdrücke in den Größen (XII; 23). Man kann diese in eine übersichtliche Form bringen, wenn man zur Abkürzung

(XII; 26)

$$\begin{pmatrix} \Psi_{11} = p_{11}p_{22}-p_{12}^2 & \Psi_{13} = p_{11}p_{44}-p_{34}p_{12} & \Psi_{15} = p_{11}p_{66}-p_{56}p_{12}\\ \Psi_{31} = p_{33}p_{22}-p_{12}p_{34} & \Psi_{33} = p_{33}p_{44}-p_{34}^2 & \Psi_{35} = p_{33}p_{66}-p_{56}p_{34}\\ \Psi_{51} = p_{55}p_{22}-p_{12}p_{56} & \Psi_{53} = p_{55}p_{44}-p_{34}p_{56} & \Psi_{55} = p_{55}p_{66}-p_{56}^2 \end{pmatrix}$$

einführt und außerdem

$$\Psi_{13}+\Psi_{31} = X_{13};\quad \Psi_{35}+\Psi_{53} = X_{35};\quad \Psi_{51}+\Psi_{15} = X_{51}$$

setzt. Es ist dann

$$\text{(XII; 27)} \qquad \begin{cases} A = \dfrac{1}{2}[\Psi_{11}+\Psi_{33}+\Psi_{55}-(X_{13}+X_{35}+X_{51})],\\ B = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{33} & p_{55}\\ p_{22} & p_{44} & p_{66}\\ p_{12} & p_{34} & p_{56} \end{vmatrix} =\\ \quad = p_{12}(\Psi_{35}-\Psi_{53})+p_{34}(\Psi_{51}-\Psi_{15})+p_{56}(\Psi_{13}-\Psi_{31}),\\ C = \dfrac{1}{4}[A^2-(X_{13}X_{35}+X_{35}X_{51}+X_{51}X_{13})+\\ \qquad +2(\Psi_{11}X_{35}+\Psi_{33}X_{51}+\Psi_{55}X_{13})]. \end{cases}$$

Die biquadratische Gleichung (XII; 21) läßt sich in eine lineare umwandeln, wenn man den Drehimpulssatz (XII; 8) zu Hilfe nimmt. Die Größen Ψ_{ii} dieser Formel sind mit den gleichnamigen Diagonaltermen der Matrix (XII; 26) identisch. Andererseits ist

$$\Phi_{13} = p_{13} p_{24} - p_{23} p_{14} = \frac{1}{4} [(p_{55} - p_{11} - p_{33})(p_{66} - p_{22} - p_{44}) - \\ - (p_{56} - p_{12} - p_{34})^2] + \varrho^2,$$

$$\Phi_{35} = p_{35} p_{46} - p_{45} p_{36} = \frac{1}{4} [(p_{11} - p_{33} - p_{55})(p_{22} - p_{44} - p_{66}) - \\ - (p_{12} - p_{34} - p_{56})^2] + \varrho^2,$$

$$\Phi_{51} = p_{51} p_{62} - p_{61} p_{52} = \frac{1}{4} [(p_{33} - p_{55} - p_{11})(p_{44} - p_{66} - p_{22}) - \\ - (p_{34} - p_{56} - p_{12})^2] + \varrho^2$$

oder, wenn man ausmultipliziert, die Ψ_{ik} nach (XII; 26) einführt und (XII; 27) berücksichtigt,

$$\text{(XII; 28)} \qquad \begin{cases} 2\Phi_{13} = X_{13} + A + 2\varrho^2, \\ 2\Phi_{35} = X_{35} + A + 2\varrho^2, \\ 2\Phi_{51} = X_{51} + A + 2\varrho^2. \end{cases}$$

Der Drehimpulssatz erhält dann die Form

$$g^2 = \frac{\Psi_{11}}{m_1^2} + \frac{\Psi_{33}}{m_3^2} + \frac{\Psi_{55}}{m_5^2} + \frac{X_{35}}{m_3 m_5} + \frac{X_{51}}{m_5 m_1} + \frac{X_{13}}{m_1 m_3} + \frac{A + 2\varrho^2}{m_1 m_3 m_5},$$

da

$$\frac{1}{m_3 m_5} + \frac{1}{m_5 m_1} + \frac{1}{m_1 m_3} = \frac{m_1 + m_3 + m_5}{m_1 m_3 m_5} = \frac{1}{m_1 m_3 m_5}$$

gilt, wenn man die Masseneinheit so festsetzt, daß $m_1 + m_2 + m_3 = 1$ ist. Setzt man zur Abkürzung eines in den Invarianten symmetrischen Ausdrucks

$$G = \frac{\Psi_{11}}{m_1^2} + \frac{\Psi_{33}}{m_3^2} + \frac{\Psi_{55}}{m_5^2} + \frac{X_{35}}{m_3 m_5} + \frac{X_{51}}{m_5 m_1} + \frac{X_{13}}{m_1 m_3},$$

so ist daher

$$\text{(XII; 29)} \qquad 2\varrho^2 = m_1 m_3 m_5 (g^2 - G) - A.$$

Eliminiert man nun mit Hilfe von (XII; 29) ϱ^4 und ϱ^2 aus (XII; 21), so ergibt sich

$$B\varrho = -C - \frac{1}{4} [m_1 m_3 m_5 (g^2 - G) - A]^2 - \frac{1}{2} A [m_1 m_3 m_5 (g^2 - G) - A],$$

also für ϱ der lineare Ausdruck

$$\text{(XII; 30)} \qquad B\varrho = \frac{A^2}{4} - C - \frac{1}{4} m_1^2 m_3^2 m_5^2 (g^2 - G)^2.$$

Für $B = 0$ wird diese Formel zur Bestimmung von ϱ unbrauchbar; ϱ ist dann eine der beiden Wurzeln von (XII; 29). Zu demselben Ergebnis gelangt man, wenn man in (XII; 21) $B = 0$ setzt. Dann ist

$$\varrho^4 + A\varrho^2 + C = 0; \quad \varrho^2 = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - C},$$

also, da in diesem Fall die rechte Seite von (XII; 30) verschwindet,

$$\varrho^2 = -\frac{A}{2} \pm \frac{1}{2} m_1 m_3 m_5 (g^2 - G).$$

Der Vergleich mit (XII; 29) lehrt, daß von den beiden Vorzeichen der Quadratwurzel hier das obere gilt.

Durch Elimination von ϱ aus (XII; 29) und (XII; 30) erhält man übrigens eine Gleichung vierten Grades für g^2, in der ϱ nicht mehr auftritt.

109. *Die Differentialgleichungen des reduzierten Problems*

Differenziert man die lokalen Invarianten

$$p_{\mu\nu} = (\mathfrak{r}_\mu \mathfrak{r}_\nu), \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, 6)$$

nach der Zeit, so ergeben sich, in Verbindung mit den Bewegungsgleichungen (XI; 23) für die Relativkoordinaten, Differentialgleichungen, die das reduzierte Problem repräsentieren. Man findet z.B., wenn man

$$\mu_i = r_i^{-3} = p_{ii}^{-3/2}; \quad \mathfrak{R} = \mu_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_3 \mathfrak{r}_3 + \mu_5 \mathfrak{r}_5$$

setzt,

$$\begin{aligned}
p_{11} &= (\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_1); \quad \dot{p}_{11} = 2(\mathfrak{r}_1 \dot{\mathfrak{r}}_1) = 2(\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2) = 2p_{12},\\
p_{12} &= (\mathfrak{r}_1 \dot{\mathfrak{r}}_1); \quad \dot{p}_{12} = (\dot{\mathfrak{r}}_1 \dot{\mathfrak{r}}_1) + (\mathfrak{r}_1 \ddot{\mathfrak{r}}_1) = (\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_2) + (\mathfrak{r}_1, -\mu_1 \mathfrak{r}_1 + m_1 \mathfrak{R}) =\\
&\qquad = p_{22} - \mu_1 p_{11} + m_1(\mu_1 p_{11} + \mu_3 p_{13} + \mu_5 p_{15}),\\
p_{22} &= (\dot{\mathfrak{r}}_1 \dot{\mathfrak{r}}_1); \quad \dot{p}_{22} = 2(\dot{\mathfrak{r}}_1 \ddot{\mathfrak{r}}_1) = 2(\mathfrak{r}_2, -\mu_1 \mathfrak{r}_1 + m_1 \mathfrak{R}) =\\
&\qquad = -2\mu_1 p_{12} + 2m_1(\mu_1 p_{21} + \mu_3 p_{23} + \mu_5 p_{25})
\end{aligned}$$

usw. Führt man außerdem noch die Abkürzungen

$$\text{(XII; 31)} \qquad \begin{cases} p_i = \mu_1 p_{i1} + \mu_3 p_{i3} + \mu_5 p_{i5}, & (i = 1, 3, 5),\\ p_\alpha = \mu_1 p_{\alpha 1} + \mu_3 p_{\alpha 3} + \mu_5 p_{\alpha 5}, & (\alpha = i + 1 = 2, 4, 6) \end{cases}$$

ein, für die $\sum p_i = \sum p_\alpha = 0$ gilt, so erhält man für die Invarianten (XII; 23) die neun Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\text{(XII; 32)} \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\dot{p}_{ii} = p_{i\alpha},\\ \dot{p}_{i\alpha} = p_{\alpha\alpha} - \mu_i p_{ii} + m_i p_i,\\ \frac{1}{2}\dot{p}_{\alpha\alpha} = -\mu_i p_{i\alpha} + m_i p_\alpha \end{cases}$$

oder allgemeiner, für sämtliche 21 Invarianten,

$$
\text{(XII; 32a)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \dot{p}_{ij} &= p_{i\beta} + p_{j\alpha} \quad (= s_k \quad \text{für} \quad j \neq i), \\ \dot{p}_{i\beta} &= p_{\alpha\beta} - \mu_j p_{ij} + m_j p_i, \\ \dot{p}_{\alpha\beta} &= -(\mu_i p_{i\beta} + \mu_j p_{j\alpha}) + (m_i p_\beta + m_j p_\alpha), \end{aligned} \right.
$$

wo i, j jetzt zwei beliebige der ungeraden Zahlen 1, 3, 5 bezeichnen und $\alpha = i + 1$, $\beta = j + 1$ ist. Für $j = i$, $\beta = \alpha = i + 1$ gehen diese Formeln in (XII; 32) über.

Die Größen p_i, p_α lassen sich ebenfalls durch die Invarianten (XII; 23) ausdrücken; in den p_α kommen diese auch implizit in Gestalt der LAGRANGEschen Invariante ϱ vor. Es ist nämlich

$$
\text{(XII; 33)} \qquad \left\{ \begin{aligned} p_i &= -\mu_i(p_{ij} + p_{ik}) + \mu_j p_{ij} + \mu_k p_{ik} = \\ &= (\mu_j - \mu_i) p_{ij} + (\mu_k - \mu_i) p_{ik}, \\ p_\alpha &= -\mu_i(s_j + s_k) + \mu_j(s_k - \varrho) + \mu_k(s_j + \varrho) = \\ &= q_i + (\mu_k - \mu_j)\varrho, \end{aligned} \right.
$$

wobei

$$
\text{(XII; 34)} \qquad \left\{ \begin{aligned} 2p_{jk} &= p_{ii} - p_{jj} - p_{kk}, \\ 2s_i &= p_{i\alpha} - p_{j\beta} - p_{k\gamma}, \\ q_i &= (\mu_j - \mu_i) s_k + (\mu_k - \mu_i) s_j \end{aligned} \right.
$$

zu setzen ist.

Für die praktische Lösung der Aufgabe, die Gleichungen (XII; 32) zu integrieren (etwa mit Hilfe der in Kapitel XVII und XVIII beschriebenen Methoden der numerischen Integration), ist es vorteilhaft, diesen neun Gleichungen noch eine zehnte für ϱ hinzuzufügen, die – wie nachstehend gezeigt werden wird – eine sehr einfache und symmetrische Form hat. Hat man dann ϱ gemeinsam mit den übrigen Invarianten als Funktion der Zeit bestimmt, so besitzt man in den Gleichungen (XII; 21), (XII; 29) oder (XII; 30) neben den beiden bekannten Integralen des Problems wertvolle Kontrollen der Rechnungsergebnisse.

Die Differentialgleichung für ϱ ergibt sich durch Differenzieren von (XII; 18):

$$
\begin{aligned} 2\dot{\varrho} &= \dot{p}_{14} - \dot{p}_{23} = (\dot{\mathfrak{r}}_1 \mathfrak{r}_4) + (\mathfrak{r}_1 \dot{\mathfrak{r}}_4) - (\dot{\mathfrak{r}}_2 \mathfrak{r}_3) - (\mathfrak{r}_2 \dot{\mathfrak{r}}_3) = \\ &= (\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_4) + (\mathfrak{r}_1 \ddot{\mathfrak{r}}_3) - (\ddot{\mathfrak{r}}_1 \mathfrak{r}_3) - (\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_4) = (\mathfrak{r}_1 \ddot{\mathfrak{r}}_3) - (\ddot{\mathfrak{r}}_1 \mathfrak{r}_3). \end{aligned}
$$

Eliminiert man hieraus die Beschleunigungsvektoren durch (XI; 22), so erhält man zunächst

$$
2\dot{\varrho} = -\mu_3 p_{13} + m_3 p_1 + \mu_1 p_{31} - m_1 p_3,
$$

also, wenn man die Größen p_1 und p_3 durch (XII; 33) ersetzt,

$$
\begin{aligned} 2\dot{\varrho} &= (\mu_1 - \mu_3) p_{13} + m_3[(\mu_3 - \mu_1) p_{13} + (\mu_5 - \mu_1) p_{15}] - m_1[(\mu_1 - \mu_3) p_{31} + \\ &\quad + (\mu_5 - \mu_3) p_{35}] = \\ &= (1 - m_1 - m_3)(\mu_1 - \mu_3) p_{13} + m_3(\mu_5 - \mu_1) p_{15} + m_1(\mu_3 - \mu_5) p_{35} \end{aligned}
$$

oder, da ja $\sum m_i = 1$ ist,

(XII; 35) $$2\dot{\varrho} = m_1(\mu_3 - \mu_5)\,p_{35} + m_3(\mu_5 - \mu_1)\,p_{51} + m_5(\mu_1 - \mu_3)\,p_{13} = \\ = \sum m_i(\mu_j - \mu_k)\,p_{jk}.$$

Die beiden bekannten Integrale (XII; 6) und (XII; 8) des reduzierten Problems lassen sich auch direkt aus den Differentialgleichungen (XII; 32a) gewinnen, und zwar als unmittelbare Folge ihrer bemerkenswerten Symmetrie. Diese Integrale sind Funktionen der 21 Invarianten, haben also die Gestalt

$$\varphi(p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{66}) = \text{const.}$$

Setzen wir $\partial\varphi/\partial p_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu}$, so gilt also für jedes Integral φ

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varphi_{11}\dot{p}_{11} + \varphi_{12}\dot{p}_{12} + \cdots + \varphi_{66}\dot{p}_{66} = 0.$$

Setzen wir für die $\dot{p}_{\mu\nu}$ die Ausdrücke (XII; 32a) ein, so erhalten wir die folgende symmetrisch geformte Beziehung, aus der die $\varphi_{\mu\nu} = \varphi_{\nu\mu}$ so zu bestimmen sind, daß die Gleichung identisch, d.h. für jede beliebige Kombination der Invarianten und für beliebig große Massen m_i, erfüllt ist:

$$\begin{aligned}
&\varphi_{21}(p_{22} - \mu_1 p_{11}) + \varphi_{23}(p_{24} - \mu_1 p_{13}) + \varphi_{25}(p_{26} - \mu_1 p_{15}) + \\
&+ \varphi_{41}(p_{42} - \mu_3 p_{31}) + \varphi_{43}(p_{44} - \mu_3 p_{33}) + \varphi_{45}(p_{46} - \mu_3 p_{35}) + \\
&+ \varphi_{61}(p_{62} - \mu_5 p_{51}) + \varphi_{63}(p_{66} - \mu_5 p_{53}) + \varphi_{65}(p_{66} - \mu_5 p_{55}) + \\
&+ 2p_{12}(\varphi_{11} - \mu_1\varphi_{22}) + p_{14}(\varphi_{13} - \mu_1\varphi_{24}) + p_{16}(\varphi_{15} - \mu_1\varphi_{26}) + \\
&+ p_{32}(\varphi_{31} - \mu_3\varphi_{42}) + 2p_{34}(\varphi_{33} - \mu_3\varphi_{44}) + p_{36}(\varphi_{35} - \mu_3\varphi_{46}) + \\
&+ p_{52}(\varphi_{51} - \mu_5\varphi_{62}) + p_{54}(\varphi_{53} - \mu_5\varphi_{64}) + 2p_{56}(\varphi_{55} - \mu_5\varphi_{66}) + \\
&+ p_1(m_1\varphi_{12} + m_3\varphi_{14} + m_5\varphi_{16}) + p_2(2m_1\varphi_{22} + m_3\varphi_{24} + m_5\varphi_{26}) + \\
&+ p_3(m_1\varphi_{32} + m_3\varphi_{34} + m_5\varphi_{36}) + p_4(m_1\varphi_{42} + 2m_3\varphi_{44} + m_5\varphi_{46}) + \\
&+ p_5(m_1\varphi_{52} + m_3\varphi_{54} + m_5\varphi_{56}) + p_6(m_1\varphi_{62} + m_3\varphi_{64} + 2m_5\varphi_{66}) = 0.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung läßt sich aber, wie ihr symmetrischer Aufbau erkennen läßt, auf zwei verschiedene Weisen befriedigen:

1. Man setze alle $\varphi_{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$. Dann bleibt, nachdem man noch durch 2 dividiert hat, die Beziehung

$$p_{12}(\varphi_{11} - \mu_1\varphi_{22}) + p_{34}(\varphi_{33} - \mu_3\varphi_{44}) + p_{56}(\varphi_{55} - \mu_5\varphi_{66}) + \\ + m_1 p_2\varphi_{22} + m_3 p_4\varphi_{44} + m_5 p_6\varphi_{66} = 0$$

übrig. Der Term mit den Massen verschwindet, da $p_2 + p_4 + p_6 = 0$ ist, wenn man

$$m_1\varphi_{22} = m_3\varphi_{44} = m_5\varphi_{66} = \text{const,}$$

also etwa

$$\varphi_{22} = \frac{1}{m_1}; \quad \varphi_{44} = \frac{1}{m_3}; \quad \varphi_{66} = \frac{1}{m_5}$$

setzt. Die übrigen Terme verschwinden dann, mit beliebigen Werten der Invarianten $p_{i\alpha}$, für

$$\varphi_{ii} = \mu_i \varphi_{\alpha\alpha} = \frac{1}{m_i} \mu_i = \frac{1}{m_i} p_{ii}^{-3/2}.$$

Aus

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_{ii}} = \frac{1}{m_i} p_{ii}^{-3/2}; \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial p_{\alpha\alpha}} = \frac{1}{m_i}$$

und der oben getroffenen Annahme, daß alle übrigen $\varphi_{\mu\nu}$ identisch verschwinden, leitet man sofort

$$\varphi = \sum \frac{1}{m_i} (p_{\alpha\alpha} - 2 p_{ii}^{-1/2}) = \text{const}$$

ab, also den Energiesatz (XII; 6).

2. Wenn keine Voraussetzungen über die $\varphi_{\mu\nu}$ gemacht werden, folgt aus dem ähnlichen Aufbau der ersten beiden, die Massen nicht enthaltenden Termgruppen, daß diese Gruppen gemeinsam verschwinden, wenn man

$$\begin{aligned}
&\varphi_{11} = k_{11} p_{22}; \quad \varphi_{22} = k_{11} p_{11}; \quad \varphi_{13} = k_{13} p_{24}; \quad \varphi_{24} = k_{13} p_{13},\\
&\varphi_{33} = k_{33} p_{44}; \quad \varphi_{44} = k_{33} p_{33}; \quad \varphi_{35} = k_{35} p_{46}; \quad \varphi_{46} = k_{35} p_{35},\\
&\varphi_{55} = k_{55} p_{66}; \quad \varphi_{66} = k_{55} p_{55}; \quad \varphi_{51} = k_{51} p_{62}; \quad \varphi_{62} = k_{51} p_{51}
\end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned}
&\varphi_{12} = -2k_{11} p_{21}; \quad \varphi_{32} = -\; k_{31} p_{41}; \quad \varphi_{52} = -\; k_{51} p_{61},\\
&\varphi_{14} = -\; k_{13} p_{23}; \quad \varphi_{34} = -2k_{33} p_{43}; \quad \varphi_{54} = -\; k_{53} p_{63},\\
&\varphi_{16} = -\; k_{15} p_{25}; \quad \varphi_{36} = -\; k_{35} p_{45}; \quad \varphi_{56} = -2k_{55} p_{65}
\end{aligned}$$

setzt, wo die sechs Größen $k_{ij} = k_{ji}$ noch zu bestimmende Konstanten sind. Die dritte Termgruppe verschwindet, wenn die mit den p_i, p_α multiplizierten Ausdrücke einzeln verschwinden. Es bestehen also die beiden homogenen Gleichungssysteme

$$\begin{aligned}
2m_i k_{ii} p_{i\alpha} + m_j k_{ij} p_{j\alpha} + m_k k_{ik} p_{k\alpha} &= 0,\\
2m_i k_{ii} p_{ii} + m_j k_{ij} p_{ji} + m_k k_{ik} p_{ki} &= 0,
\end{aligned}$$

die wegen $p_{1i} + p_{3i} + p_{5i} = 0$, $p_{1\alpha} + p_{3\alpha} + p_{5\alpha} = 0$ für beliebige m_i nur erfüllt sind, wenn

$$\begin{aligned}
2m_1 k_{11} = \; m_3 k_{13} = \; m_5 k_{15} &= \text{const},\\
m_1 k_{31} = 2m_3 k_{33} = \; m_5 k_{35} &= \text{const},\\
m_1 k_{51} = \; m_3 k_{53} = 2m_5 k_{55} &= \text{const}
\end{aligned}$$

ist. Diese sechs homogenen Gleichungen bestimmen, bis auf einen konstanten Faktor, die k_{ij}. Man schreibt sie symmetrischer, wenn man sie mit m_i multipliziert und die willkürlichen Konstanten dann gleich 2 setzt. Es ist dann

$$2m_i^2 k_{ii} = m_i m_j k_{ij} = m_i m_k k_{ik} = 2,$$

woraus

$$k_{ii} = \frac{1}{m_i^2}; \quad k_{jk} = \frac{2}{m_j m_k}$$

folgt. Damit sind auch die $\varphi_{\mu\nu}$ bestimmt, und man erhält

$$\varphi_{ii} = \frac{p_{\alpha\alpha}}{m_i^2}; \quad \varphi_{\alpha\alpha} = \frac{p_{ii}}{m_i^2}; \quad \varphi_{i\alpha} = -\frac{2p_{i\alpha}}{m_i^2},$$

$$\varphi_{jk} = \frac{2p_{\beta\gamma}}{m_j m_k}; \quad \varphi_{\beta\gamma} = \frac{2p_{jk}}{m_j m_k}; \quad \varphi_{\beta k} = -\frac{2p_{j\gamma}}{m_j m_k}; \quad \varphi_{j\gamma} = -\frac{2p_{\beta k}}{m_j m_k},$$

woraus der Drehimpulssatz (XII; 8)

$$\sum \frac{p_{ii}p_{\alpha\alpha} - p_{i\alpha}^2}{m_i^2} + 2\sum \frac{p_{jk}p_{\beta\gamma} - p_{\beta k}p_{j\gamma}}{m_j m_k} = \text{const}$$

folgt.

H. BRUNS hat bewiesen, daß diese beiden Integrale die einzigen sind, die allgemein und für beliebig lange Zeiten gültig sind und die Invarianten $p_{\mu\nu}$ in algebraischer Form enthalten. Dieser Beweis ist sehr umständlich und kann daher hier nicht wiedergegeben werden. Der Leser sei auf die Originalabhandlung [Ber. Kgl. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig Nr. 1, 55 (1887)] verwiesen.

110. *Die Differentialgleichungen für die Dreiecksseiten*

Statt durch neun Differentialgleichungen erster Ordnung für die unabhängigen Invarianten (XII; 23) läßt sich das Problem auch durch drei Differentialgleichungen dritter Ordnung für drei Invarianten gleicher Struktur formulieren, etwa für die drei Seitenlängen r_i des Massendreiecks oder deren Quadrate $p_{ii} = r_i^2$. Durch dreimaliges Differenzieren von p_{ii} erhält man nacheinander

$$\dot{p}_{ii} = 2p_{i\alpha},$$

$$\frac{1}{2}\ddot{p}_{ii} = \dot{p}_{i\alpha} = p_{\alpha\alpha} - \mu_i p_{ii} + m_i p_i,$$

$$\frac{1}{2}\dddot{p}_{ii} = \dot{p}_{\alpha\alpha} - \mu_i \dot{p}_{ii} - \dot{\mu}_i p_{ii} + m_i \dot{p}_i$$

oder, da

$$\mu_i p_{ii}^{3/2} = 1; \quad \dot{\mu}_i p_{ii}^{3/2} + \frac{3}{2}\mu_i p_{ii}^{1/2}\dot{p}_{ii} = 0; \quad \dot{\mu}_i p_{ii} = -\frac{3}{2}\mu_i \dot{p}_{ii},$$

$$\dot{p}_{\alpha\alpha} = -2\mu_i p_{i\alpha} + 2m_i p_\alpha = -\mu_i \dot{p}_{ii} + 2m_i p_\alpha$$

ist,

$$\boxed{\frac{1}{2}\dddot{p}_{ii} = -\frac{1}{2}\mu_i \dot{p}_{ii} + m_i(\dot{p}_i + 2p_\alpha)}. \qquad \text{(XII; 36)}$$

Setzt man hierin für p_α die Ausdrücke (XII; 33) ein, so entsteht das folgende System von drei symmetrisch gebauten Differentialgleichungen dritter Ordnung:

$$\text{(XII; 37)} \quad \left\{ \begin{array}{l|c|c|c} & \text{(I)} & \text{(II)} & \text{(III)} \\ \frac{1}{2}(\dddot{p}_{11} + \mu_1 \dot{p}_{11}) = m_1(\dot{p}_1 + 2q_1) + 2m_1(\mu_5 - \mu_3)\varrho, & \frac{2}{m_1} & \frac{2}{m_1}\mu_1 & p_{35} \\ \frac{1}{2}(\dddot{p}_{33} + \mu_3 \dot{p}_{33}) = m_3(\dot{p}_3 + 2q_3) + 2m_3(\mu_1 - \mu_5)\varrho, & \frac{2}{m_3} & \frac{2}{m_3}\mu_3 & p_{51} \\ \frac{1}{2}(\dddot{p}_{55} + \mu_5 \dot{p}_{55}) = m_5(\dot{p}_5 + 2q_5) + 2m_5(\mu_3 - \mu_1)\varrho, & \frac{2}{m_5} & \frac{2}{m_5}\mu_5 & p_{13} \end{array} \right.$$

in denen nur die p_{ii} und ihre ersten drei Ableitungen vorkommen; denn es ist ja

$$\mu_i = p_{ii}^{-3/2};$$

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt}\left[\mu_i p_{ii} + \frac{1}{2}\mu_j(p_{kk} - p_{ii} - p_{jj}) + \frac{1}{2}\mu_k(p_{jj} - p_{kk} - p_{ii})\right],$$

$$2s_i = p_{i\alpha} - p_{j\beta} - p_{k\gamma} = \frac{1}{2}(\dot{p}_{ii} - \dot{p}_{jj} - \dot{p}_{kk}),$$

$$q_i = (\mu_j - \mu_i)\, s_k + (\mu_k - \mu_i)\, s_j,$$

und schließlich ist ϱ, als Funktion der Größen

$$p_{ii}; \quad p_{i\alpha} = \frac{1}{2}\dot{p}_{ii}; \quad p_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2}\ddot{p}_{ii} + \mu_i p_{ii} - m_i p_i,$$

durch die $p_{ii}, \dot{p}_{ii}, \ddot{p}_{ii}$ darstellbar.

Das System (XII; 37), das von der neunten Ordnung ist, läßt sich mit Hilfe der beiden bekannten Integrale des reduzierten Problems auf die siebente Ordnung reduzieren. Multipliziert man die Gleichungen (XII; 37) mit den Faktoren (I), (II), (III) und addiert, so erhält man

$$\text{(XII; 38)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \sum \frac{1}{m_i}(\dddot{p}_{ii} + \mu_i \dot{p}_{ii}) = 0, \quad \text{da} \quad \sum \dot{p}_i = \sum q_i = 0 \quad \text{ist,} \\ \text{(II)} \quad \sum \frac{\mu_i}{m_i}(\dddot{p}_{ii} + \mu_i \dot{p}_{ii}) = 2 \sum \mu_i(\dot{p}_i + 2q_i), \\ \text{(III)} \sum p_{jk}[m_i(\dot{p}_i + 2q_i) - \frac{1}{2}(\dddot{p}_{ii} + \mu_i \dot{p}_{ii})] = 4\varrho\,\dot{\varrho} = \\ \qquad\qquad = 2\frac{d\varrho^2}{dt} \quad \text{wegen (XII; 35).} \end{array} \right.$$

Die erste und die dritte dieser Gleichungen sind integrabel. Die erste liefert den Energiesatz in Form der LAGRANGEschen Funktion (s. Abschnitt 95); denn es ist ja

$$\mu_i \dot{p}_{ii} = -2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{p_{ii}}}\right);$$

die Integration von (XII; 38, I) ergibt also

$$\sum \frac{1}{m_i}\left(\ddot{p}_{ii} - \frac{2}{r_i}\right) = \text{const}, \tag{XII; 39}$$

übereinstimmend mit (XI; 38). Hingegen liefert die Integration von (XII; 38, III) den Drehimpulssatz, wie man durch eine ziemlich umständliche Rechnung verifiziert, wenn man rechts ϱ^2 durch (XII; 29) ausdrückt und nach der Zeit differenziert, wobei man (XII; 35) zu benutzen und zu beachten hat, daß $g^2 = \text{const}$ ist. Es läßt sich dann zeigen, daß die linke Seite von (XII; 38, III) die Form

$$-\frac{d}{dt}(m_1 m_3 m_5 G + A) \tag{XII; 40}$$

hat. Demnach reduziert sich das System (XII; 38) auf die Differentialgleichung (XII; 38, II), die von der dritten Ordnung bleibt, und auf zwei Gleichungen zweiter Ordnung, nämlich (XII; 39) und (XII; 29). In der letzteren sind ϱ, G und A Funktionen von p_{ii}, $\dot{p}_{ii}$ und $\ddot{p}_{ii}$.

111. *Abgeleitete Invarianten*

Im Zweikörperproblem (s. Abschnitte 40 und 105) sind die Variablen des reduzierten Problems die drei elementaren Invarianten

$$p_{11} = r^2, \quad p_{12} = r\dot{r}; \quad p_{22} = V^2 = r\ddot{r} + \dot{r}^2 + \frac{1}{r}$$

oder unabhängige Funktionen dieser drei Größen. Wir erinnern uns, daß die abgeleiteten Invarianten

$$\mu = \frac{1}{r^3} = p_{11}^{-3/2}; \quad \sigma = \frac{p_{12}}{p_{11}}; \quad \omega = \frac{p_{22}}{p_{11}},$$
$$\varrho = 2\mu - \omega; \quad \varepsilon = \omega - \mu; \quad \vartheta = \omega - \sigma^2$$

bei der Beschreibung der Bewegung eine nützliche Rolle spielen, zumal mit ihrer Hilfe die beiden bekannten Integrale die einfache Gestalt

$$\begin{cases} r^2 \varrho = \dfrac{1}{a} = \text{const} & \text{(Energiesatz)}, \\ r^4 \vartheta = p = \text{const} & \text{(Flächensatz)} \end{cases} \tag{XII; 41}$$

annehmen. Auch im reduzierten Dreikörperproblem kann man entsprechende Invarianten einführen, etwa

$$\mu_i = \frac{1}{r_i^3} = p_{ii}^{-3/2}, \quad \sigma_i = \frac{p_{i\alpha}}{p_{ii}}, \quad \omega_i = \frac{p_{\alpha\alpha}}{p_{ii}}, \tag{XII; 42}$$
$$(i = 1, 3, 5; \quad \alpha = i + 1).$$

Diese genügen den Differentialgleichungen

$$\dot\mu_i = -3\mu_i\sigma_i, \qquad (\dot r_i = r_i\sigma_i),$$

$$\dot\sigma_i = \omega_i - \mu_i - 2\sigma_i^2 + m_i\frac{p_i}{p_{ii}},$$

$$\dot\omega_i = -2\sigma_i(\mu_i + \omega_i) + 2m_i\frac{p_\alpha}{p_{ii}},$$

wie man aus (XII; 42) und (XII; 32) unmittelbar ableitet.

Führt man noch die zusammengesetzten Ausdrücke

$$\text{(XII; 43)}\quad \begin{cases} \varepsilon_i = \omega_i - \mu_i; & \dot\varepsilon_i = -\sigma_i(2\varepsilon_i + \mu_i) + 2m_i\dfrac{p_\alpha}{p_{ii}}, \\[2ex] \varrho_i = 2\mu_i - \omega_i; & \dot\varrho_i = -2\sigma_i\varrho_i - 2m_i\dfrac{p_\alpha}{p_{ii}} \end{cases}$$

ein, so gelingt es, die Differentialgleichungen für die Dreiecksseiten auf eine sehr einfache Form zu bringen, in der deren Verwandtschaft mit der entsprechenden Formel (XII; 1) des Zweikörperproblems deutlich zutage tritt, und auch den Energiesatz in der (XII; 41) entsprechenden Form zu gewinnen. Schreibt man statt (XII; 43)

$$\text{(XII; 43a)}\quad \begin{cases} \varepsilon_i^* = \varepsilon_i + m_i\dfrac{p_i}{p_{ii}}; & \dot\varepsilon_i^* = -\sigma_i(2\varepsilon_i^* + \mu_i) + \dfrac{m_i}{p_{ii}}(\dot p_i + 2p_\alpha), \\[2ex] \varrho_i^* = \mu_i - \varepsilon_i^*; & \dot\varrho_i^* = -2\sigma_i\varrho_i^* - \dfrac{m_i}{p_{ii}}(\dot p_i + 2p_\alpha), \end{cases}$$

also, wenn man die Abkürzung

$$\text{(XII; 44)}\qquad \gamma_i = \frac{m_i}{p_{ii}}(\dot p_i + 2p_\alpha)$$

einführt,

$$\dot\mu_i = -3\mu_i\sigma_i; \quad \dot\varepsilon_i^* = -\sigma_i(2\varepsilon_i^* + \mu_i) + \gamma_i,$$

$$\dot\sigma_i = \varepsilon_i^* - 2\sigma_i^2; \quad \dot\varrho_i^* = -2\sigma_i\varrho_i^* - \gamma_i,$$

so findet man zunächst

$$\frac{d}{dt}(r_i^2\varrho_i^*) = -p_{ii}\gamma_i = -m_i(\dot p_i + 2p_\alpha)$$

und somit, da $\sum\dot p_i = \sum p_\alpha = 0$ ist, den Energiesatz

$$\frac{d}{dt}\sum\frac{r_i^2\varrho_i^*}{m_i} = 0; \quad \sum\frac{r_i^2\varrho_i^*}{m_i} = \sum\frac{r_i^2\varrho_i}{m_i} = \sum\frac{1}{m_i}\left(\frac{2}{r_i} - V_i^2\right) = \text{const.}$$

Andererseits ergibt sich

$$\begin{aligned}\dot r_i &= r_i\,\sigma_i,\\ \ddot r_i &= \dot r_i\,\sigma_i + r_i\,\dot\sigma_i = r_i(\varepsilon_i^* - \sigma_i^2),\\ \dddot r_i &= \dot r_i(\varepsilon_i^* - \sigma_i^2) + r_i(\dot\varepsilon_i^* - 2\sigma_i\,\dot\sigma_i) =\\ &= r_i\,\sigma_i[3(\varepsilon_i^* - \sigma_i^2) + \mu_i] + r_i\,\gamma_i.\end{aligned}$$

Eliminiert man aus diesen drei Gleichungen σ_i und $\varepsilon_i^* - \sigma_i^2$, so erhält man

$$\text{(XII; 45)} \qquad r_i\dddot r_i + 3\dot r_i\ddot r_i + \frac{\dot r_i}{r_i^2} = r_i^2\gamma_i = m_i(p_i + 2p_\alpha),$$

eine Gleichung, die für $m_i = 0$, $r_i = r$ in die Differentialgleichung (XII; 1) der ungestörten Zweikörperbewegung übergeht und die ebenfalls auf das Integral der Energie

$$\sum \frac{1}{m_i}\left(r_i\ddot r_i + \dot r_i^2 - \frac{1}{r_i}\right) = \text{const}$$

führt.

Die Ableitung des Drehimpulssatzes gelingt auf so einfache Weise nicht, da im reduzierten Problem die Konstante g^2, wie (XII; 29) lehrt, mit der LAGRANGEschen Invarianten ϱ verknüpft ist (die man nicht mit den durch Indizes gekennzeichneten Größen ϱ_i verwechseln wird). Man kann aber, wenn auch etwas umständlich, die Gültigkeit des Drehimpulssatzes *beweisen*, indem man die Größen Ψ_{ii}, Φ_{jk} durch die Invarianten (XII; 23) und ϱ ausdrückt und deren Differentialquotienten (XII; 32) bzw. (XII; 35) benutzt.

Es ist zunächst

$$\dot\Psi_{ii} = 2m_i(p_{ii}\,p_\alpha - p_{i\alpha}\,p_i)$$

oder, wenn man für die p_i, p_α die Ausdrücke (XII; 33) wieder einführt,

$$\dot\Psi_{ii} = m_i(\mu_k - \mu_j)\,[p_{ii}(2\varrho + p_{j\beta} - p_{k\gamma}) - p_{i\alpha}(p_{jj} - p_{kk})].$$

Eine entsprechende Reduktion ergibt, unter Verwendung von (XII; 35),

$$\begin{aligned}2\dot\Phi_{jk} &= m_j(\mu_i - \mu_k)\,[p_{kk}(2\varrho + p_{i\alpha} - p_{j\beta}) - p_{kj}(p_{ii} - p_{jj})] +\\ &\quad + m_k(\mu_j - \mu_i)\,[p_{jj}(2\varrho + p_{k\gamma} - p_{i\alpha}) - p_{j\beta}(p_{kk} - p_{ii})].\end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}2\sum\frac{\dot\Phi_{jk}}{m_j\,m_k} &= \sum\frac{\mu_i - \mu_k}{m_k}\,[p_{kk}(2\varrho + p_{i\alpha} - p_{j\beta}) - p_{k\gamma}(p_{ii} - p_{jj})] +\\ &\quad + \sum\frac{\mu_j - \mu_i}{m_j}\,[p_{jj}(2\varrho + p_{k\gamma} - p_{i\alpha}) - p_{j\beta}(p_{kk} - p_{ii})]\end{aligned}$$

oder, wenn man die Indexfolge i, j, k unter dem Summenzeichen in geeigneter Weise zyklisch vertauscht,

$$2\sum\frac{\dot\Phi_{jk}}{m_j\,m_k} = \sum\frac{\mu_j - \mu_k}{m_i}\,[p_{ii}(2\varrho + p_{j\beta} - p_{k\gamma}) - p_{i\alpha}(p_{jj} - p_{kk})].$$

Addiert man dazu

$$\sum \frac{\dot{\Psi}_{ii}}{m_i^2} = \sum \frac{\mu_k - \mu_j}{m_i} [p_{ii}(2\varrho + p_{j\beta} - p_{k\gamma}) - p_{i\alpha}(p_{jj} - p_{kk})],$$

so erhält man sofort

$$\sum \frac{\dot{\Psi}_{ii}}{m_i^2} + 2 \sum \frac{\dot{\Phi}_{jk}}{m_j m_k} = 0$$

und damit den Drehimpulssatz (XII; 8).

Natürlich könnte man diese Rechnung auch umschreiben, indem man die Invarianten (XII; 23) durch die Größen (XII; 42) ausdrückt. So findet man

$$\Psi_{ii} = p_{ii} p_{\alpha\alpha} - p_{i\alpha}^2 = p_{ii}^2(\omega_i - \sigma_i^2),$$

aber man erkennt sofort, daß es nicht möglich ist, mit abgeleiteten Invarianten der Form

$$\vartheta_i = \omega_i - \sigma_i^2$$

auszukommen. Vielmehr müßte man jetzt, als Analogon zur Invariante ϑ des reduzierten Zweikörperproblems, eine symmetrische Matrix

$$(\vartheta_{jk}) = \begin{pmatrix} \vartheta_{11} & \vartheta_{13} & \vartheta_{15} \\ \vartheta_{31} & \vartheta_{33} & \vartheta_{35} \\ \vartheta_{51} & \vartheta_{53} & \vartheta_{55} \end{pmatrix}, \quad \vartheta_{jk} = \vartheta_{kj}$$

von Invarianten durch

$$\vartheta_{jk} = \frac{1}{2}(\omega_j + \omega_k) - \sigma_j \sigma_k, \qquad (\vartheta_{ii} = \omega_i - \sigma_i^2)$$

einführen. Man erhielte dann

$$\Psi_{jk} = p_{jj} p_{kk}(\omega_k - \sigma_k \sigma_j); \quad \Psi_{kj} = p_{kk} p_{jj}(\omega_j - \sigma_j \sigma_k)$$

und daraus

$$\begin{aligned} \Psi_{ii} &= p_{ii}^2 \vartheta_{ii}; \quad X_{jk} = \Psi_{jk} + \Psi_{kj} = 2 p_{jj} p_{kk} \vartheta_{jk}, \\ 2A &= \sum \Psi_{ii} - \sum X_{jk} \quad \text{nach (XII; 27)}, \\ 2\Phi_{jk} &= A + X_{jk} + 2\varrho^2 \quad \text{nach (XII; 28)}. \end{aligned}$$

Zum Beweis des Drehimpulssatzes sind also die Invarianten ϑ_{jk}, die Größe ϱ und deren Differentialquotienten erforderlich. Die Durchführung dieser Rechnung sei dem Leser überlassen.

112. *Das* BOHLIN*sche Problem*

Die schönen Symmetrieeigenschaften, die in der LAGRANGEschen Theorie des Dreikörperproblems zutage treten und die – wie im vorigen Abschnitt gezeigt wurde – zu Formeln führen, die den entsprechenden Formeln des Zweikörperproblems analog aufgebaut sind (mit dem Unterschied allerdings, daß

den einfachen Ausdrücken des letzteren Summen über drei entsprechend gebaute und auf die drei Massen bzw. die ihnen gegenüberliegenden Dreiecksseiten bezügliche Ausdrücke gegenüberstehen), verlocken dazu, nach weiteren Zusammenhängen ähnlicher Art zwischen den beiden Problemen zu suchen. So hat K. BOHLIN, angeregt durch Arbeiten von K. SUNDMAN, den Versuch unternommen, ein Analogon zu der Hauptgleichung des Zweikörperproblems, der *KEPLERschen Gleichung*, zu finden, das im allgemeinen Dreikörperproblem eine ähnliche Rolle spielen könnte wie diese.

Wir erinnern uns, daß die KEPLERsche Gleichung im Zweikörperproblem erhalten wird, wenn wir statt der Zeit t eine neue Variable, die exzentrische Anomalie E, einführen, indem wir [vgl. (V; 27)]

$$\frac{dE}{dt} = \sqrt{\varrho} = \frac{1}{r\sqrt{a}} = \frac{n\,a}{r}$$

setzen, wo $n = a^{-3/2}$ die mittlere Bewegung des Systems in der Zeiteinheit bedeutet, die ihrerseits durch die Annahme

$$k^2(m_1 + m_2) = 1$$

festgelegt war. Aus dem Energiesatz (XII; 1),

$$r\,\ddot{r} + \dot{r}^2 - \frac{1}{r} = -\frac{1}{a} = \text{const},$$

den man auch in der Form

$$\frac{1}{2}\,\frac{d^2 r^2}{dt^2} = \frac{1}{r} - \frac{1}{a}$$

schreiben kann, folgt dann wegen

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dE}\,\frac{n\,a}{r}; \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{n\,a}\,\frac{dE}{dt}; \quad \frac{1}{2}\,\frac{dr^2}{dt} = r\,\dot{r} = n\,a\,\frac{dr}{dE}$$

die Beziehung

$$\text{(XII; 46)} \qquad \frac{1}{2}\,\frac{d^2 r^2}{dt^2} = n\,a\,\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dE}\right) = \frac{1}{n\,a}\,\frac{dE}{dt} - \frac{1}{a},$$

andererseits auch

$$\text{(XII; 47)} \qquad \frac{1}{2}\,\frac{d^2 r^2}{dt^2} = n\,a\,\frac{d^2 r}{dE^2}\,\frac{dE}{dt} = \frac{n^2 a^2}{r}\,\frac{d^2 r}{dE^2} = \frac{1}{r} - \frac{1}{a}.$$

Aus (XII; 46) erhält man

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\,\frac{r}{a}}{dE}\right) = \frac{1}{n^2 a^3}\,\frac{dE}{dt} - \frac{1}{n\,a^3},$$

also durch Integration, wenn man das dritte KEPLERsche Gesetz

$$n^2 a^3 = 1$$

berücksichtigt,

$$\frac{d}{dE}\left(\frac{r}{a}\right) = E - n(t - t_0) = E - M. \tag{XII; 48}$$

Aus (XII; 47) aber folgt

$$\frac{d^2 r}{dE^2} + \frac{r}{n^2 a^3} = \frac{1}{n^2 a^2}$$

oder

$$\frac{d^2 r}{dE^2} + r = a, \tag{XII; 48a}$$

eine Differentialgleichung, deren allgemeine Lösung

$$r = a + b\cos E + c\sin E$$

ist. Setzt man fest, daß

$$\frac{dr}{dE} = 0 \quad \text{für} \quad E = 0$$

sein soll, so ist $c = 0$ zu setzen, also

$$r = a + b\cos E = a(1 - e\cos E), \tag{XII; 49}$$

wenn man statt b die Konstante $e = -b/a$ einführt. Aus (XII; 48) folgt dann, indem man (XII; 49) nach E differenziert, die KEPLERsche Gleichung

$$E - e\sin E = M.$$

Um diesen Prozeß analog für das Dreikörperproblem durchzuführen, geht man von der LAGRANGEschen Gleichung (XI; 38),

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\sum\frac{r_i^2}{m_i} = \sum\frac{1}{m_i r_i} + h, \qquad (h = \text{const}), \tag{XII; 50}$$

aus, die für den Fall gilt, daß $k = 1$ und die Summe der drei Massen m_i ebenfalls gleich 1 gesetzt ist, was durch geeignete Wahl der Einheiten von Masse und Zeit immer möglich ist. Sind nun n_i, a_i gewisse konstante Größen, so kann man statt der Zeit t drei neue Variable E_i bestimmen, so daß

$$\frac{dE_i}{dt} = \frac{n_i a_i}{r_i}$$

ist, und es ist dann entsprechend (XII; 46)

$$\frac{dr_i}{dt} = \frac{dr_i}{dE_i}\frac{n_i a_i}{r_i}; \quad \frac{1}{2}\frac{d^2 r_i^2}{dt^2} = n_i a_i \frac{d}{dt}\left(\frac{dr_i}{dE_i}\right) \tag{XII; 51}$$

und entsprechend (XII; 47)

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 r_i^2}{dt^2} = \frac{n_i^2 a_i^2}{r_i}\frac{d^2 r_i}{dE_i^2}. \tag{XII; 52}$$

Formt man (XII; 50) mit Hilfe von (XII; 51) um, so ergibt sich

$$\sum \frac{n_i a_i}{m_i} \frac{d}{dt}\left(\frac{dr_i}{dE_i}\right) = \sum \frac{n_i^2 a_i^3}{m_i n_i a_i} \frac{d}{dt}\left(\frac{d\frac{r}{a_i}}{dE_i}\right) = \sum \frac{1}{m_i n_i a_i} \frac{dE_i}{dt} + h.$$

Bestimmt man die Konstanten n_i, a_i so, daß zwischen ihnen die Beziehungen

$$n_i^2 a_i^3 = 1; \quad \sum \frac{1}{m_i a_i} = -h$$

erfüllt sind, so folgt

$$\sum \frac{1}{m_i n_i a_i} \frac{d}{dt}\left(\frac{d\frac{r_i}{a_i}}{dE_i}\right) = \sum \frac{1}{m_i n_i a_i}\left(\frac{dE_i}{dt} - n_i\right),$$

woraus durch Integration

$$\text{(XII; 53)} \qquad \sum \frac{1}{m_i n_i a_i} \frac{d}{dE_i}\left(\frac{r_i}{a_i}\right) = \sum \frac{E_i - M_i}{m_i n_i a_i}$$

folgt, wenn man $M_i = n_i(t - t_i)$ setzt. Diese Gleichung kann als Analogon der KEPLERschen Gleichung (XII; 48) gelten.

Andererseits erhält man aus (XII; 50) und (XII; 52)

$$\sum \frac{n_i^2 a_i^2}{m_i r_i} \frac{d^2 r_i}{dE_i^2} = \sum \frac{1}{m_i r_i} - \sum \frac{1}{m_i a_i}$$

oder

$$\text{(XII; 53a)} \qquad \sum \frac{1}{m_i a_i r_i}\left(\frac{d^2 r_i}{dE_i^2} + r_i\right) = \sum \frac{a_i}{m_i a_i r_i}.$$

Multipliziert man (XII; 53) und (XII; 53a) mit dem Produkt der drei Massen, so erkennt man sofort, daß diese Gleichungen in die entsprechenden (XII; 48) und (XII; 48a) des Zweikörperproblems übergehen, wenn eine der drei Massen verschwindet. Andererseits folgt aus der Form der Gleichungen (XII; 53) und (XII; 53a), daß das Dreikörperproblem partikuläre Lösungen besitzt, die so beschaffen sind, daß für alle drei Indizes i

$$\frac{d}{dE_i}\left(\frac{r_i}{a_i}\right) = E_i - M_i; \quad \frac{d^2 r_i}{dE_i^2} + r_i = a_i$$

ist, d.h., daß die drei Massen, jede für sich, ungestörte Bewegungen nach den KEPLERschen Gesetzen ausführen. Wir werden im nächsten Abschnitt erfahren, daß solche partikulären Lösungen schon von LAGRANGE gefunden worden sind.

113. *Die LAGRANGEschen speziellen Lösungen des Dreikörperproblems*

LAGRANGE hat gezeigt, daß die Differentialgleichungen des allgemeinen Dreikörperproblems unter gewissen speziellen Bedingungen streng gelöst werden können. Die Bedingungen, unter denen solche Lösungen existieren, können

auf verschiedene Weise formuliert werden. LAGRANGE selbst hat sie gefunden, indem er nach Bewegungsformen suchte, bei denen die Verhältnisse zwischen den Dreiecksseiten r_i für alle Zeiten konstant bleiben oder, was auf dasselbe hinauskommt, bei denen die Winkel des Massendreiecks sich im Verlauf der Bewegung nicht ändern, und er hat gezeigt, daß und unter welchen Anfangsbedingungen es in der Tat solche Lösungen gibt. An Stelle dieser geometrischen Forderungen kann man auch dynamische erheben, etwa die, daß das Kräftezentrum (s. Abschnitt 93) im Schwerpunkt des Systems ruht, daß also die Resultanten der auf die drei Massen wirkenden Kräfte *Zentralkräfte* sind, oder die, daß die drei Massen um den gemeinsamen Schwerpunkt Kegelschnittbahnen nach den KEPLERschen Gesetzen beschreiben, eine Möglichkeit, auf die schon am Schluß des vorigen Abschnitts hingewiesen worden ist.

Wir werden hier den in der klassischen Literatur sonst nicht verwendeten letzteren Ansatz benutzen, also fordern, daß die Gleichungen (XI; 23) der Relativbewegung

$$\ddot{\mathfrak{r}}_i = -\mu_i \mathfrak{r}_i + m_i(\mu_i \mathfrak{r}_i + \mu_j \mathfrak{r}_j + \mu_k \mathfrak{r}_k),$$

$$\mu_i = \frac{1}{r_i^3}; \quad r_i = |\mathfrak{r}_i|; \quad m_i + m_j + m_k = 1$$

sich in der Form der Differentialgleichungen des Zweikörperproblems,

$$\text{(XII; 54)} \qquad \ddot{\mathfrak{r}}_i = -f_i \mu_i \mathfrak{r}_i,$$

schreiben lassen, wo die f_i noch zu bestimmende positive Funktionen der drei Massen, also Konstanten, bedeuten. Diese Differentialgleichungen sind durch die Bedingung $\sum \mathfrak{r}_i = 0$ miteinander verknüpft.

Damit beide Differentialgleichungssysteme identisch sind, muß

$$-f_i \mu_i \mathfrak{r}_i \equiv -\mu_i \mathfrak{r}_i + m_i(\mu_i \mathfrak{r}_i + \mu_j \mathfrak{r}_j + \mu_k \mathfrak{r}_k)$$

sein oder, wenn man $-\mathfrak{r}_i = \mathfrak{r}_j + \mathfrak{r}_k$ setzt und die Terme mit $\mathfrak{r}_j$ und $\mathfrak{r}_k$ sammelt,

$$\text{(XII; 55)} \quad \mathfrak{r}_j[(f_i - 1 + m_i)\,\mu_i - m_i\,\mu_j] \equiv -\mathfrak{r}_k[(f_i - 1 + m_i)\,\mu_i - m_i\,\mu_k].$$

Diese Identität läßt sich nur durch zwei ganz verschiedene Festsetzungen erfüllen:

1. Die Ausdrücke in den eckigen Klammern verschwinden identisch. Dann ist aber

$$f_i = 1 = m_i + m_j + m_k,$$

$$\mu_i = \mu_j = \mu_k, \quad \text{also auch} \quad r_i = r_j = r_k.$$

Die drei Massen bilden also für alle Zeiten die Figur eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Größe allerdings noch eine Funktion der Zeit ist oder sein kann. Der Kräftemittelpunkt fällt mit dem Schwerpunkt zusammen; denn setzt man in (XI; 29) alle r_i einander gleich, so erhält man für den Ortsvektor des Kräftezentrums

$$\mathfrak{p}_0 = \frac{\sum m_i \mathfrak{p}_i}{\sum m_i},$$

also den des Massenmittelpunktes.

Ferner erfolgt die Bewegung der drei Massen um den Schwerpunkt in einer Ebene, die dann mit der UVE identisch ist. Denn sind x_i, y_i, z_i die auf die UVE bezogenen rechtwinkligen Koordinaten der drei Massenpunkte, so läßt sich zeigen, daß sämtliche z_i verschwinden. Das ist nämlich wegen (XII; 13) der Fall, wenn die nach (XII; 12) gebildeten Größen δ_i alle verschwinden. Daß dies tatsächlich zutrifft, läßt sich folgendermaßen beweisen:

Da die Dreiecksseiten r_i jederzeit einander gleich sind, haben die relativen Bahnen die Form kongruenter, in derselben Zeit und mit gleicher Phase durchlaufener Kegelschnitte. Infolgedessen sind die drei Energiekonstanten

$$p_{\alpha\alpha} - \frac{2}{\sqrt{p_{ii}}} = V_i^2 - \frac{2}{r_i} = -\frac{1}{a}$$

einander gleich, ebenso die drei Flächenkonstanten

$$[\mathfrak{r}_i\,\dot{\mathfrak{r}}_i]^2 = p_{ii}\,p_{\alpha\alpha} - p_{i\alpha}^2 = r_i^2 V_i^2 \sin^2 60^\circ = \frac{3}{4} r_i^2 V_i^2 = p.$$

Hieraus folgt aber, da $r_i = r$ ist,

$$p_{\alpha\alpha} = V_i^2 = V^2; \quad p_{i\alpha} = r_i V_i \cos 60^\circ = \frac{1}{2} r V.$$

Es sind demnach sämtliche Größen (XII; 26) einander gleich:

$$\Psi_{ii} = \Psi_{jk} = \Psi = \frac{3}{4} r^2 V^2.$$

Daraus ergibt sich aber nach (XII; 27)

$$A = -\frac{3}{2}\Psi; \quad B = 0; \quad C = \frac{1}{4}A^2,$$

und es folgt aus (XII; 30)

$$g^2 - G = 0$$

und daher aus (XII; 29)

$$\varrho^2 = -\frac{A}{2} = \frac{3}{4}\Psi = \frac{9}{16} r^2 V^2; \quad \varrho = \frac{3}{4} r V = \frac{3}{2} p_{i\alpha}.$$

Insbesondere ist dann nach (XII; 12)

$$\delta_1^2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}.$$

Da aber

$$p_{13} = \frac{1}{2}(p_{55} - p_{11} - p_{33}) = -\frac{1}{2} p_{11}; \quad p_{11} p_{22} = 4 p_{12}^2,$$

$$p_{23} = s_5 - \varrho = \frac{1}{2}(p_{56} - p_{12} - p_{34}) - \varrho = -\frac{1}{2} p_{12} - \varrho = -2 p_{12}$$

ist, erhält man

$$\delta_1^2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & -\frac{1}{2}p_{11} \\ p_{12} & p_{22} & -2p_{12} \\ -\frac{1}{2}p_{11} & -2p_{12} & p_{11} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ebenso} \quad \delta_3 = \delta_5 = 0,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

2. Sind die Ausdrücke in den eckigen Klammern von (XII; 55) nicht identisch Null, so folgt, daß diese Identität nur erfüllbar ist, wenn die Vektoren $\mathfrak{r}_j$ und $\mathfrak{r}_k$ [und daher auch $\mathfrak{r}_i = -(\mathfrak{r}_j + \mathfrak{r}_k)$] stets kollinear sind. Die drei Massen liegen also beständig auf einer sich um den Schwerpunkt des Systems drehenden geraden Linie. Man setze etwa

$$\mathfrak{r}_i = \alpha_i\,\mathfrak{r}; \quad \mathfrak{r}_j = \alpha_j\,\mathfrak{r}; \quad \mathfrak{r}_k = \alpha_k\,\mathfrak{r}, \quad (|\mathfrak{r}| = 1).$$

Dann ist

$$\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k = 0; \quad |\alpha_i| = r_i; \quad |\alpha_j| = r_j; \quad |\alpha_k| = r_k.$$

Man darf nun ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß m_i zwischen m_j und m_k liegt. Dann ist (Abb. 14), wenn der Einheitsvektor $\mathfrak{r}$ die Richtung $m_k \to m_j$ hat,

(XII; 56) $$\alpha_i = -r_i; \quad \alpha_j = r_j; \quad \alpha_k = r_k, \quad (r_i = r_j + r_k)$$

zu setzen, und es folgt aus (XII; 55) die skalare Identität

$$\alpha_j[(f_i - 1 + m_i)\,\mu_i - m_i\,\mu_j] + \alpha_k[(f_i - 1 + m_i)\,\mu_i - m_i\,\mu_k] \equiv 0,$$

d.h.

$$f_i\,\mu_i(\alpha_j + \alpha_k) \equiv (1 - m_i)\,\mu_i(\alpha_j + \alpha_k) + m_i(\mu_j\,\alpha_j + \mu_k\,\alpha_k)$$

oder, wenn man beide Seiten durch die stets von Null verschiedene Größe $\mu_i(\alpha_j + \alpha_k) = -\mu_i\alpha_i$ dividiert,

$$f_i = 1 - m_i\left[1 + \frac{\mu_j\,\alpha_j + \mu_k\,\alpha_k}{\mu_i\,\alpha_i}\right].$$

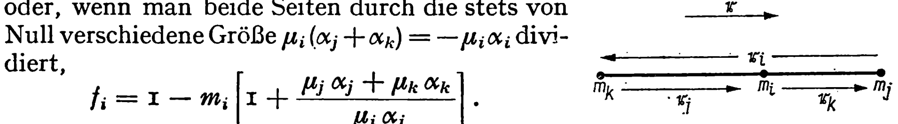


Abb. 14. Kollinearer Fall der LAGRANGEschen Lösungen

Läßt man nun die Indizes die drei zyklischen Permutationen der Folge i, j, k durchlaufen und führt für $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k$ die Werte (XII; 56) ein, so erhält man, wenn man wieder

$$\mu_i = \frac{1}{r_i^3}; \quad \mu_j = \frac{1}{r_j^3}; \quad \mu_k = \frac{1}{r_k^3}$$

setzt,

(XII; 57) $$\begin{cases} f_i = 1 - m_i\left[1 - \left(\frac{r_i}{r_j}\right)^2 - \left(\frac{r_i}{r_k}\right)^2\right], \\ f_j = 1 - m_j\left[1 + \left(\frac{r_j}{r_k}\right)^2 - \left(\frac{r_j}{r_i}\right)^2\right], \\ f_k = 1 - m_k\left[1 - \left(\frac{r_k}{r_i}\right)^2 + \left(\frac{r_k}{r_j}\right)^2\right]. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke sind aber nur konstant, wenn die Verhältnisse $r_i : r_j : r_k$ für alle Zeiten konstant bleiben. Die drei Massen beschreiben daher um den gemeinsamen Schwerpunkt (und umeinander) ähnliche Kegelschnitte, die in der gleichen Zeit und mit derselben Phase durchlaufen werden und die zudem gleiche bzw. entgegengesetzte Apsidenrichtungen haben. Die Verhältnisse der Abstände sind aber nicht beliebig, sondern scharfen Bedingungen unterworfen. Führt man den konstanten Quotienten

$$\lambda = \frac{r_k}{r_j}$$

ein, so ist wegen $r_i = r_j + r_k$

$$\text{(XII; 58)} \qquad \frac{r_i}{r_j} = 1 + \lambda; \quad \frac{r_i}{r_k} = \frac{1+\lambda}{\lambda}, \quad \text{also} \quad r_i : r_j : r_k = (1+\lambda) : 1 : \lambda.$$

Ferner folgt aus $\mathfrak{r}_i = -r_i\,\mathfrak{r}$

$$\text{(XII; 59)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{r}_j = r_j\,\mathfrak{r} = -\dfrac{r_j}{r_i}\,\mathfrak{r}_i = -\dfrac{1}{1+\lambda}\,\mathfrak{r}_i, \\[2ex] \mathfrak{r}_k = r_k\,\mathfrak{r} = -\dfrac{r_k}{r_i}\,\mathfrak{r}_i = -\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\,\mathfrak{r}_i \end{cases}$$

und daher wegen (XII; 54) und (XII; 59)

$$\ddot{\mathfrak{r}}_j = -f_j \frac{\mathfrak{r}_j}{r_j^3} = \frac{f_j}{r_j^3}\,\frac{\mathfrak{r}_i}{1+\lambda}; \quad \ddot{\mathfrak{r}}_k = -f_k \frac{\mathfrak{r}_k}{r_k^3} = \frac{f_k}{r_k^3}\,\frac{\lambda\,\mathfrak{r}_i}{1+\lambda}.$$

Da aber andererseits nach (XII; 59) und (XII; 54)

$$\ddot{\mathfrak{r}}_j = -\frac{1}{1+\lambda}\,\ddot{\mathfrak{r}}_i = \frac{f_i}{r_i^3}\,\frac{\mathfrak{r}_i}{1+\lambda}; \quad \ddot{\mathfrak{r}}_k = -\frac{\lambda}{1+\lambda}\,\ddot{\mathfrak{r}}_i = \frac{f_i}{r_i^3}\,\frac{\lambda\,\mathfrak{r}_i}{1+\lambda}$$

ist, ergibt Gleichsetzung dieser Ausdrücke die Beziehungen

$$f_j = f_i\left(\frac{r_j}{r_i}\right)^3 = \frac{1}{(1+\lambda)^3}\,f_i; \quad f_k = f_i\left(\frac{r_k}{r_i}\right)^3 = \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^3 f_i$$

oder, wenn man (XII; 57) einsetzt und (XII; 58) berücksichtigt,

$$\text{(XII; 60)} \qquad \begin{cases} 1 - m_j\left[1 + \dfrac{1}{\lambda^2} - \dfrac{1}{(1+\lambda)^2}\right] = \\[2ex] \qquad = \dfrac{1}{(1+\lambda)^3}\left[1 - m_i\left\{1 - (1+\lambda)^2 - \left(\dfrac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2\right\}\right], \\[2ex] 1 - m_k\left[1 - \left(\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\right)^2 + \lambda^2\right] = \\[2ex] \qquad = \left(\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\right)^3\left[1 - m_i\left\{1 - (1+\lambda)^2 - \left(\dfrac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2\right\}\right]. \end{cases}$$

Das sind zwei algebraische Gleichungen für λ, die aber dasselbe aussagen. Vertauscht man nämlich die Stellung der beiden äußeren Massen m_j und m_k, was die Situation nicht wesentlich ändert, so muß man gleichzeitig r_j mit r_k vertauschen, und es geht λ in $1/\lambda$ über. Dann aber geht die erste Gleichung (XII; 60) in die zweite über und umgekehrt. Jede von ihnen führt auf eine Gleichung fünften Grades, die nach Fortschaffung der nichtverschwindenden Nenner und wenn man, um die Dimension der Terme wieder sichtbar werden zu lassen, $1 = m_i + m_j + m_k$ einführt,

$$\text{(XII; 61)} \quad (m_i + m_k)\,\lambda^5 + (2m_i + 3m_k)\,\lambda^4 + (m_i + 3m_k)\,\lambda^3 - \\ - (m_i + 3m_j)\,\lambda^2 - (2m_i + 3m_j)\,\lambda - (m_i + m_j) = 0$$

lautet und mindestens eine reelle Wurzel $\neq 0$ hat. Diese Gleichung hat nach einem Satz von DESCARTES[1]) höchstens *eine* positive Wurzel; denn dieser Satz besagt, daß die Anzahl der positiven Wurzeln einer algebraischen Gleichung höchstens so groß ist wie die Anzahl der Vorzeichenwechsel ihrer nach Potenzen der Unbekannten geordneten Glieder. Da in (XII; 61), weil alle $m_i \geqq 0$ sind, nur ein Vorzeichenwechsel vorkommt, kann also die Zahl der positiven Wurzeln nicht größer als 1 sein. Daß aber wirklich eine (und nur eine) positive Wurzel existiert, beweist man folgendermaßen:

Angenommen, es gäbe eine negative Wurzel $\lambda = -\varrho$ $(\varrho > 0)$. Dann würde ϱ die Gleichung

$$(m_i + m_k)\,\varrho^5 - (2m_i + 3m_k)\,\varrho^4 + (m_i + 3m_k)\,\varrho^3 + \\ + (m_i + 3m_j)\,\varrho^2 - (2m_i + 3m_j)\,\varrho + (m_i + m_j) = 0$$

befriedigen müssen. Ordnet man diese Gleichung nach den Massen, so ergibt sich

$$\text{(XII; 62)} \quad m_i(\varrho^5 - 2\varrho^4 + \varrho^3 + \varrho^2 - 2\varrho + 1) + m_j(3\varrho^2 - 3\varrho + 1) + \\ + m_k(\varrho^5 - 3\varrho^4 + 3\varrho^3) = 0.$$

Diese Beziehung hat aber lauter positive Glieder, denn es ist ja, bei $\varrho > 0$,

$$\varrho^5 - 2\varrho^4 + \varrho^3 + \varrho^2 - 2\varrho + 1 = (1 - \varrho)^2\,(1 + \varrho^3) > 0,$$
$$3\varrho^2 - 3\varrho + 1 = f(\varrho) > 0,$$
$$\varrho^5\left(\frac{3}{\varrho^2} - \frac{3}{\varrho} + 1\right) = \varrho^5 f\left(\frac{1}{\varrho}\right) > 0,$$

da $f(x) = 0$ keine reelle Lösung hat, also $f(x)$ wegen $f(0) = 1$ stets positiv ist. Die linke Seite von (XII; 62) kann daher für positives ϱ nicht verschwinden. Daraus folgt aber, daß (XII; 61) keine negativen Wurzeln besitzt; die einzige reelle Lösung λ ist also positiv.

Damit ist gezeigt, daß es für vorgegebene Massen m_i, m_j, m_k stets eine und nur eine Lösung des Dreikörperproblems gibt, bei der die drei Massen in vor-

[1]) Beweis siehe R. DESCARTES, Geometrie, 3. Buch (1637), übersetzt von L. SCHLESINGER (Berlin 1894); E. N. LAGUERRE, Journal des Mathématiques (3) 9, 99 (1883).

gegebener Reihenfolge beständig in einer geraden Linie verharren und die gegenseitigen Abstände in konstanten, durch die Verhältnisse der Massen eindeutig bestimmten Verhältnissen stehen.

Sind also die Zahlenwerte m_1, m_3, m_5 vorgegeben, so liefert (XII; 61) drei verschiedene Lösungen, je nach der Anordnung der Massenpunkte auf der Geraden, d.h. je nachdem, welche der drei Massen die mittlere Position (m_i) innehat. Ein praktisches Interesse gewinnt diese Frage, wenn wir etwa annehmen, daß m_1 die Masse der Sonne, m_3 die eines großen Planeten (z.B. Jupiter) und m_5 die eines Planetoiden (oder eines Satelliten von m_3) darstellt. Da (XII; 61) nur von den Verhältnissen der Massen abhängt, darf man die Masseneinheit willkürlich festsetzen, also von der Annahme $\sum m_i = 1$ absehen. Um unsere Überlegungen den im Planetensystem herrschenden Bedingungen anzupassen, nehmen wir im folgenden an, daß $m_1 = 1$, $m_3 = \mu$ klein gegen die Einheit sei. Für Jupiter wäre also $\mu \approx 10^{-3}$, für die Erde $\mu \approx 3 \cdot 10^{-6}$ zu setzen. Schließlich darf für den Planetoiden (Satelliten) $m_5 = 0$ gesetzt werden. Es sind dann folgende drei Fälle zu unterscheiden:

1. *Planetoid zwischen Sonne und Planet*, d.h.

$$m_i = 0; \quad m_j = \mu; \quad m_k = 1.$$

Dann lautet (XII; 61)

$$\lambda^5 + 3\lambda^4 + 3\lambda^3 - \mu(3\lambda^2 + 3\lambda + 1) = 0$$

oder

$$\lambda^3 = \frac{\mu}{3} \frac{1 + 3\lambda + 3\lambda^2}{1 + \lambda + \frac{1}{3}\lambda^2}. \tag{XII; 63}$$

Ist μ sehr klein gegen die Einheit, so ist auch λ verhältnismäßig klein, und man kann genähert

$$\lambda \approx \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}} = \nu$$

setzen. Für Jupiter wäre also $\nu \approx 1/_{15}$, für die Erde $\nu \approx 1/_{100}$. Genauere Lösungen von (XII; 63) erhält man mittels des Ansatzes

$$\lambda = \nu + a\,\nu^2 + b\,\nu^3 + c\,\nu^4 + \cdots \tag{XII; 64}$$

und Koeffizientenvergleich. Es ergibt sich

$$\lambda = \nu + \frac{2}{3}\nu^2 + \frac{2}{9}\nu^3 - \frac{32}{81}\nu^4 + \cdots, \qquad \left(\nu = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}}\right). \tag{XII; 65}$$

2. *Planet zwischen Sonne und Planetoid*, d.h.

$$m_i = \mu; \quad m_j = 0; \quad m_k = 1.$$

In diesem Fall lautet die Gleichung fünften Grades

$$(1 + \mu)\,\lambda^5 + (3 + 2\mu)\,\lambda^4 + (3 + \mu)\,\lambda^3 - \mu(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0$$

oder

$$\lambda^3 = \frac{\mu}{3} \frac{(1+\lambda)^2 (1-\lambda^3)}{1+\lambda+\frac{1}{3}\lambda^2}, \tag{XII; 66}$$

die ebenfalls für sehr kleine μ die Näherungslösung $\nu = \sqrt[3]{\mu/3}$ hat. Drückt man wieder λ durch eine Reihe der Form (XII; 64) aus, so erhält man

$$\lambda = \nu + \frac{1}{3}\nu^2 - \frac{1}{9}\nu^3 - \frac{31}{81}\nu^4 + \cdots, \qquad \left(\nu = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}}\right). \tag{XII; 67}$$

3. *Sonne zwischen Planetoid und Planet,* d.h.

$$m_i = 1; \quad m_j = \mu; \quad m_k = 0.$$

Dann nimmt (XI; 61) die Gestalt

$$\lambda^5 + 2\lambda^4 + \lambda^3 - (1+3\mu)\lambda^2 - (2+3\mu)\lambda - (1+\mu) = 0$$

an. Da diese Gleichung für $\mu = 0$ die Wurzel $\lambda = 1$ hat, wird man guttun, $\lambda = 1 + \sigma$ zu setzen. Dann gilt für die kleine Größe σ die Gleichung

$$\sigma^5 + 7\sigma^4 + 19\sigma^3 + 24\sigma^2 + 12\sigma - \mu(3\sigma^2 + 9\sigma + 7) = 0,$$

die für sehr kleine μ die genäherte Lösung $\sigma = {}^7/_{12}\mu$ besitzt. Eine genauere Lösung ergibt der Ansatz

$$\sigma = \frac{7}{12}\mu + a\mu^2 + b\mu^3 + c\mu^4 + \cdots,$$

aus dem man durch Koeffizientenvergleich

$$\sigma = \frac{7}{12}\mu\left(1 - \frac{5}{12}\mu + \frac{461}{1728}\mu^2 - \cdots\right)$$

und daher

$$\lambda = 1 + \frac{7}{12}\mu - \frac{35}{144}\mu^2 + \frac{3227}{20736}\mu^3 - \cdots \tag{XII; 68}$$

erhält.

In der Bahnebene eines Planeten um die Sonne, dessen Bewegung wir durch eine störungsfreie KEPLERsche Ellipse (Parabel, Hyperbel) beschreiben können, wird es also fünf charakteristische Punkte geben, in denen ein dritter Körper verweilen kann, so daß die geometrische Figur, die er mit Sonne und Planet bildet, für alle Zeiten sich selbst ähnlich bleibt. Der dritte Körper beschreibt dann um den Schwerpunkt des Systems (aber auch relativ zu Sonne oder Planet) eine ungestörte Kegelschnittbahn, die der Bahn des Planeten um die Sonne ähnlich ist und in derselben Zeit und mit der gleichen Phase durchlaufen wird. H. GYLDÉN hat diese fünf ausgezeichneten Stellungen *Librationszentren* genannt. Es liegt nämlich die Frage nahe (wir werden sie im nächsten Kapitel mit gewissen Einschränkungen positiv beantworten), ob ein Körper, der in der Nähe eines dieser Punkte verweilt, unter passenden Bedingungen dessen Um-

gebung niemals verläßt und um ihn enge Bahnen (Schwankungen, Resonanzbewegungen, Librationen) beschreibt. GYLDÉN führte für diese Librationszentren die Bezeichnungen $L_1, L_2, \ldots, L_5$ ein, und zwar L_1, L_2, L_3 für die drei geradlinigen Fälle, die wir oben unter 1., 2. und 3. behandelt haben, L_4 und L_5 für die beiden Fälle, in denen der dritte Körper mit den beiden anderen ein gleichseitiges Dreieck bildet. Wir bezeichnen mit L_4 denjenigen dieser *LAGRANGEschen Dreieckspunkte*, der in der Bewegung um den Schwerpunkt des Systems dem Planeten in Länge vorausgeht (siehe Abb. 15).

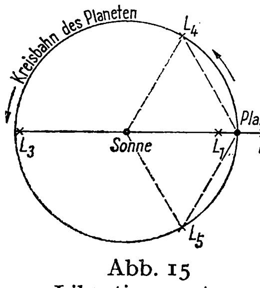


Abb. 15
Librationszentren

Ist die Masse des dritten Körpers verschwindend klein, gelten also die Entwicklungen (XII; 65), (XII; 67) und (XII; 68), und wählt man den Abstand Sonne–Planet als [variable oder (Abb. 15) konstante] Längeneinheit, so berechnet man die Koordinate x der drei kollinearen Librationszentren in bezug auf die Sonne als Anfangspunkt und die Richtung Sonne–Planet als positive x-Richtung folgendermaßen:

1. L_1: Hier ist $\lambda = (1 - x)/x$, also $x = 1/(1 + \lambda)$, und, wenn man für λ die Entwicklung (XII; 65) ansetzt,

$$x = 1 - \left(\nu - \frac{1}{3}\nu^2 - \frac{1}{9}\nu^3 - \frac{23}{81}\nu^4 - \cdots\right), \quad \left(\nu = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}}\right). \tag{XII; 69}$$

2. L_2: Hier ist $\lambda = x - 1$, also $x = 1 + \lambda$, und, wenn man für λ die Entwicklung (XII; 67) benutzt,

$$x = 1 + \left(\nu + \frac{1}{3}\nu^2 - \frac{1}{9}\nu^3 - \frac{31}{81}\nu^4 - \cdots\right), \quad \left(\nu = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}}\right). \tag{XII; 70}$$

In beiden Fällen stellt der Ausdruck in der Klammer den Abstand des Planetoiden vom Planeten dar.

3. L_3: Hier ist $\lambda = -1/x$, $x = -1/\lambda$, also nach (XII; 68)

$$x = -1 + \left(\frac{7}{12}\mu - \frac{7}{12}\mu^2 + \frac{13223}{20736}\mu^3 - \cdots\right). \tag{XII; 71}$$

Während also (Abb. 15) L_1 und L_2 beiderseits des Planeten in Abständen von der Größenordnung ν liegen, befindet sich L_3 auf der dem Planeten gegenüberliegenden Seite der Sonne in einem Abstand, der um einen Betrag von der Ordnung $^7/_{12}\,\mu = {^7/_4}\,\nu^3$ kleiner ist als die Einheit.

Die Formeln (XII; 63) bis (XII; 71) gelten für den Fall, daß $m_1 = 1$, $m_3 = \mu$ gesetzt war, und es ist dann $0 < \mu \leqq 1$. Wählt man aber, wie es häufig geschieht, die Summe der Massen von Sonne und Planet als Masseneinheit, setzt man also

$$m_1 = 1 - \mu; \quad m_3 = \mu \leqq \frac{1}{2}; \quad m_5 = 0,$$

so sind alle Formeln von (XII; 63) an durch andere zu ersetzen, in denen $\mu/(1-\mu)$ statt μ benutzt wird. Dabei bleibt die Form von (XII; 65), (XII; 67), (XII; 69) und (XII; 70) unverändert, wenn

$$\nu = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3(1-\mu)}}$$

gesetzt wird. Dagegen tritt an Stelle von (XII; 68)

$$\text{(XII; 72)} \qquad \lambda = 1 + \frac{7}{12}\mu + \frac{49}{144}\mu^2 + \frac{749}{20736}\mu^3 + \cdots$$

und an Stelle von (XII; 71)

$$\text{(XII; 73)} \qquad x = -1 + \left(\frac{7}{12}\mu + \frac{1127}{20736}\mu^3 + \cdots\right).$$

In den Fällen L_1 und L_2 kann man den infinitesimalen Körper als einen Satelliten des Planeten ansehen, der sich, vom Planeten aus gesehen, ständig in den Syzygien (also in Konjunktion mit der Sonne bzw. in Opposition zur Sonne) befindet, dessen synodische Umlaufszeit also unendlich groß und dessen siderische Umlaufszeit gleich der des Planeten um die Sonne ist. Die Entfernung eines solchen hypothetischen Satelliten vom Planeten wäre größer als die jedes in unserem Planetensystem vorkommenden Satelliten. Für die Erde wäre, wie schon weiter oben vermerkt wurde, $\nu \approx 1/_{100}$ AE, während der mittlere Erdabstand des Mondes etwa $1/_{400}$ AE beträgt. Bei etwa vierfachem Erdabstand würde der Mond also ständig in den Punkten L_1 bzw. L_2, also in Neumond- bzw. Vollmondstellung, verharren. Wir werden aber im nächsten Kapitel beweisen, daß solche Konstellationen der drei Körper instabil sind, so daß schon geringfügige Störungen genügen, um einen Satelliten aus der Umgebung des Librationszentrums zu vertreiben. Andererseits bemerkt man, daß $\nu = \sqrt[3]{\mu/3}$ kleiner ist als der planetozentrische Abstand der Fläche, auf der die Störungsbeschleunigung des Satelliten durch die Sonne gleich der Gravitationsbeschleunigung durch den Planeten ist. Jener erreicht nach Abschnitt 102 in den Syzygien (bis auf Glieder höherer Ordnung) den Minimalbetrag $\sqrt[3]{\mu/2}$. Die Satelliten mit unendlich großer synodischer Umlaufszeit gehören also immer noch der Einflußsphäre des Planeten an, liegen allerdings schon dicht an ihrem Rand.

Ein Spezialfall dieses Problems, der aber nur theoretisches Interesse beansprucht, ist der, daß die beiden endlichen Massen einander gleich sind ($m_1 = m_3$; $m_5 = 0$). Dann liegt L_1 in der Mitte zwischen m_1 und m_3, während L_2 und L_3 zu beiden Seiten der Strecke $\overline{m_1 m_3}$ symmetrisch angeordnet sind. Das ist schon aus Symmetriegründen zu erwarten. In der Tat erhält man mit $m_i = 0$, $m_j = m_k = 1$ nach (XII; 61) die Gleichung

$$\lambda^5 + 3\lambda^4 + 3\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0,$$

die ersichtlich durch $\lambda = 1$ befriedigt wird, so daß also m_i die Strecke zwischen den beiden endlichen Massen halbiert. Andererseits ergibt sich, daß L_2 und L_3

um etwa $^7/_{10}$ der Strecke $\overline{m_1 m_3}$ außerhalb der endlichen Massen liegen; denn für $m_j = 0$, $m_i = m_k = 1$ ergibt (XII; 61)

$$2\lambda^5 + 5\lambda^4 + 4\lambda^3 - (1 + \lambda)^2 = 0$$

mit der Wurzel $\lambda = 0.698406$.

Sind schließlich alle drei Massen gleich, so bestimmt man λ in *allen drei* Fällen aus

$$2\lambda^5 + 5\lambda^4 + 4\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$$

zu $\lambda = 1$, d.h., eine der drei Massen ruht im Mittelpunkt zwischen den beiden anderen, der gleichzeitig der Schwerpunkt des Systems ist.

KAPITEL XIII

LIBRATIONSBEWEGUNGEN IM EINGESCHRÄNKTEN DREIKÖRPERPROBLEM

114. *Eigenschaften der Potentialfunktion des eingeschränkten Dreikörperproblems*

In Abschnitt 113 haben wir bewiesen, daß die Bewegung dreier Massen in ähnlichen oder kongruenten Kegelschnittbahnen nach den KEPLERschen Gesetzen erfolgt, wenn sich die dritte Masse in bezug auf die beiden anderen in einem der fünf Librationszentren $L_1, \ldots, L_5$ befindet. Wir haben dort auch die Frage aufgeworfen, ob ein Körper, der die Bedingungen dieser von LAGRANGE gefundenen speziellen Lösungen des Dreikörperproblems nur angenähert erfüllt, gegebenenfalls in der Nähe eines dieser Librationszentren verweilen und Bahnen um diesen ausgezeichneten Punkt beschreiben wird, Bahnen also, auf denen sein Abstand vom Librationszentrum eine Zeitlang oder auch beliebig lange unterhalb einer kleinen endlichen Schranke bleibt.

Die astronomische Erfahrung hat gelehrt, daß es Planetoiden gibt, die solche Librationen um die Zentren L_4 und L_5 der Jupiterbahn ausführen. Bis jetzt sind insgesamt 14 dieser „Planetoiden der Jupitergruppe" bekannt geworden, die sich teils um L_4, teils um L_5 scharen; der erste wurde 1906 von MAX WOLF in Heidelberg aufgefunden. Er erhielt den Namen (588) Achilles, und da auch die übrigen dieser nach und nach (sämtlich in Heidelberg) entdeckten Planetoiden mit Namen aus dem Sagenkreis der Ilias bedacht wurden, pflegt man sie allgemein als „Trojaner" zu bezeichnen. Die Trojaner sind bisher die einzigen Mitglieder des Sonnensystems geblieben, von denen wir wissen, daß sie Librationsbahnen um die LAGRANGEschen Dreieckspunkte eines der großen Planeten beschreiben. Librationen um L_1, L_2 oder L_3 sind in keinem Falle beobachtet worden. Wir werden in Abschnitt 117 zeigen, daß solche Bahnen theoretisch möglich, aber instabil sind. Von manchen Astronomen (z. B. MOULTON in seiner „Einführung in die Himmelsmechanik") ist vermutet worden, daß der sogenannte Gegenschein des Zodiakallichts von Teilchen interplanetarer Materie herrührt, die sich um das Librationszentrum L_2 der Erdbahn (das von der Erde aus im Gegenpunkt der Sonne erscheint) anhäufen und dort längere Zeit festgehalten werden. Neuere Untersuchungen haben diese Vermutung allerdings nicht bestätigen können.

Die Bewegungstheorie der Trojaner ist schon längere Zeit vor der Entdeckung des Planetoiden Achilles Gegenstand reizvoller mathematischer Untersuchungen gewesen. So hat C. V. L. CHARLIER im zweiten Band[1]) seiner „Mechanik des Himmels" eine vollständige Theorie kleiner Librationsbewegungen

[1]) Auf die Entdeckung des Planetoiden Achilles konnte CHARLIER in diesem 1907 erschienenen Band in einem Schlußwort noch durch den Vermerk hinweisen, daß „spätere Entdeckungen die praktische Wichtigkeit dieser Lösungen dargetan" hätten.

gegeben, d.h. solcher Bewegungen, bei denen der Abstand eines Planetoiden vom Librationszentrum, verglichen mit der Längeneinheit (Abstand Sonne–Planet), für beschränkte oder auch beliebig lange Zeiten als differentiell angesehen werden kann. Genauere Lösungen, in denen auf diese Einschränkungen mehr oder weniger verzichtet wird, sind später entstanden, nachdem das Problem aktuelles Interesse erlangt hatte. Die wichtigsten dieser Untersuchungen sollen in diesem Kapitel gewürdigt werden. Dabei werden wir uns, um die Verhältnisse zu vereinfachen und das Wesentliche an diesen Erscheinungen auf Kosten sekundärer Effekte (die durch die Neigung der Planetoidenbahn, die Exzentrizität der Planetenbahn und durch Störungen hervorgerufen werden) hervorzuheben, jenes stark idealisierten Schemas (des „problème restreint") bedienen, das wir in Abschnitt 99 beschrieben haben. Die beiden endlichen Massen, die wir hier mit m (Sonne) und μ (Jupiter) bezeichnen wollen, sollen den konstanten Abstand $a = 1$ haben, sich also in einer Kreisbahn mit der Winkelgeschwindigkeit $n = k\sqrt{m+\mu}$ umeinander bewegen. Insbesondere sei die Masseneinheit so gewählt, daß $m + \mu = 1$ ist, und wir behalten uns vor, auch die Zeiteinheit so festzusetzen, daß $n = k = 1$ wird. Die dritte, unendlich kleine Masse P bewege sich in der Bahnebene des Planeten; ihre Abstände von Sonne und Jupiter seien mit r bzw. ϱ bezeichnet (Abb. 16). In einem rotierenden Koordinatensystem ξ, η, das sich gegen das Inertialsystem um den Massenmittelpunkt von m und μ mit der Winkelgeschwindigkeit n dreht, haben Sonne und Jupiter die festen Örter $(-\mu, 0)$ bzw. $(m, 0)$. Die Differentialgleichungen der Bewegung des infinitesimalen Körpers (Planetoiden) lauten dann gemäß (XI; 88)

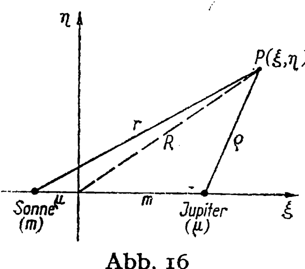


Abb. 16
„Problème restreint"

(XIII; 1)
$$\left\{\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2n\dot{\eta} &= \frac{\partial\Omega}{\partial\xi}, \\ \ddot{\eta} + 2n\dot{\xi} &= \frac{\partial\Omega}{\partial\eta}, \end{aligned}\right.$$

wo

(XIII; 2)
$$\left\{\begin{aligned} &\Omega = k^2\left(\frac{m}{r} + \frac{\mu}{\varrho}\right) + \frac{n^2}{2}(\xi^2 + \eta^2), \\ &r^2 = (\xi + \mu)^2 + \eta^2; \quad \varrho^2 = (\xi - m)^2 + \eta^2 \end{aligned}\right.$$

ist. Diese Gleichungen haben das JACOBIsche Integral

(XIII; 3)
$$C = 2\Omega - (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2).$$

Die Funktion $\Omega(\xi, \eta)$ darf man als „Potentialfunktion" im rotierenden System bezeichnen. Sie setzt sich aus zwei Termen zusammen, dem Gravitationspotential

$$\Omega_1 = k^2\left(\frac{m}{r} + \frac{\mu}{\varrho}\right)$$

und dem Ausdruck
$$\Omega_2 = \frac{n^2}{2}(\xi^2 + \eta^2) = \frac{1}{2} n^2 R^2, \qquad \left(R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right),$$
der sich als das Potential der durch die Rotation des Systems auf den Punkt (ξ, η) hervorgerufenen und vom Koordinatenanfang ausgehenden Zentrifugalbeschleunigung erweist; denn diese ist ja von der Form
$$n^2 R = \frac{\partial \Omega_2}{\partial R}.$$
An Stelle des Ausdrucks (XIII; 2) für Ω darf man (wenn man durch passende Wahl der Zeiteinheit dafür sorgt, daß $n = k = 1$ ist) den gleichwertigen Ausdruck

(XIII; 4)
$$2\Omega = m\left(r^2 + \frac{2}{r}\right) + \mu\left(\varrho^2 + \frac{2}{\varrho}\right)$$
setzen. Wegen $m + \mu = 1$ ist nämlich

(XIII; 5)
$$m\, r^2 + \mu\, \varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + m\,\mu,$$
und da in den Differentialgleichungen (XIII; 1) nur die partiellen Ableitungen von Ω nach ξ und η vorkommen, darf man auf der rechten Seite von (XIII; 5) den konstanten Term $m\,\mu$ unterdrücken, wie es in (XIII; 4) geschehen ist.

Lassen wir die Beschränkung der Planetoidenbewegung auf die $\xi\,\eta$-Ebene fallen, so wird das System (XIII; 1) um die Gleichung
$$\ddot{\zeta} = \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}$$
erweitert, und es muß, mit $n = k = 1$,

(XIII; 6)
$$\begin{cases} 2\Omega = m\left(r^2 + \dfrac{2}{r}\right) + \mu\left(\varrho^2 + \dfrac{2}{\varrho}\right) - \zeta^2, \\ r^2 = (\xi + \mu)^2 + \eta^2 + \zeta^2; \quad \varrho^2 = (\xi - m)^2 + \eta^2 + \zeta^2 \end{cases}$$
gesetzt werden.

Die geometrischen Eigenschaften der Potentialfunktion Ω lassen enge Beziehungen zu den Librationszentren des Systems erkennen: Alle Extrema der Funktion $\Omega(\xi, \eta, \zeta)$ liegen in der $\xi\,\eta$-Ebene an den Stellen $L_1, \ldots, L_5$, die den Massen m und μ zugeordnet sind. Da[1]) nach (XIII; 6)
$$\Omega_\zeta = m\left(r - \frac{1}{r^2}\right) r_\zeta + \mu\left(\varrho - \frac{1}{\varrho^2}\right)\varrho_\zeta - \zeta, \quad \left(r_\zeta = \frac{\zeta}{r}; \quad \varrho_\zeta = \frac{\zeta}{\varrho}\right)$$
und $m + \mu = 1$ ist, verschwindet
$$\Omega_\zeta = \zeta\left[m\left(1 - \frac{1}{r^3}\right) + \mu\left(1 - \frac{1}{\varrho^3}\right) - 1\right] = -\zeta\left(\frac{m}{r} + \frac{\mu}{\varrho}\right)$$

[1]) Wir bezeichnen in der Folge die partiellen Ableitungen einer Funktion $f(x, y)$, wie üblich, mit $f_x, f_y; f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ usw.

nur für $\zeta = 0$, so daß es genügt, die Extremaleigenschaften der Fläche (XIII; 4)

$$\Omega = \Omega(\xi, \eta) = \Omega(r, \varrho)$$

zu untersuchen. Diese Funktion hat keine Nullstellen, da sie überall wesentlich positiv ist, wird aber unendlich groß für $r = 0$ (Ort von m) und $\varrho = 0$ (Ort von μ) sowie für den unendlich fernen Punkt der Ebene. Für die Extrema der Fläche gilt die notwendige Bedingung

$$\text{(XIII; 7)} \qquad \begin{cases} \Omega_\xi = \Omega_r r_\xi + \Omega_\varrho \varrho_\xi = 0, \\ \Omega_\eta = \Omega_r r_\eta + \Omega_\varrho \varrho_\eta = 0, \end{cases}$$

wobei nach (XIII; 2) und (XIII; 4)

$$\text{(XIII; 8)} \qquad \begin{cases} \Omega_r = m\left(r - \frac{1}{r^2}\right); & r_\xi = \frac{\xi + \mu}{r}, \quad r_\eta = \frac{\eta}{r}, \\ \Omega_\varrho = \mu\left(\varrho - \frac{1}{\varrho^2}\right); & \varrho_\xi = \frac{\xi - m}{\varrho}, \quad \varrho_\eta = \frac{\eta}{\varrho} \end{cases}$$

zu setzen ist.

Die Gleichungen (XIII; 7) sind offenbar erfüllt, wenn $r = \varrho = 1$ ist, also für die beiden Punkte der $\xi\eta$-Ebene, die mit m und μ gleichseitige Dreiecke bilden, d.h. für die LAGRANGEschen Dreieckspunkte L_4 und L_5. Sind hingegen r und ϱ nicht beide gleich 1, so lassen die homogenen linearen Gleichungen (XIII; 7) für Ω_r, Ω_ϱ Lösungen nur zu, falls die Determinante

$$\text{(XIII; 9)} \qquad \begin{vmatrix} r_\xi & \varrho_\xi \\ r_\eta & \varrho_\eta \end{vmatrix} = \frac{\eta(m + \mu)}{r\varrho} = \frac{\eta}{r\varrho}$$

verschwindet. Das ist aber nur für $\eta = 0$ der Fall. Die übrigen Extrema von Ω liegen also sämtlich auf der ξ-Achse, und zwar gibt es deren sicher drei. Legt man nämlich einen Schnitt $\eta = 0$ durch die Fläche $\Omega(\xi, \eta)$, so erhält man eine Kurve $\Omega = \Omega(\xi)$, die etwa die Gestalt der Kurve in Abb. 17 hat und für $\xi = \pm\infty$, $\xi = -\mu$ (Sonne) und $\xi = m$ (Jupiter) Unendlichkeitsstellen (Pole) hat. In den drei Intervallen

$$-\mu < \xi < m; \quad m < \xi < \infty; \quad -\infty < \xi < -\mu$$

gibt es also sicher je ein Extremum (Minimum) von $\Omega(\xi)$. Man beweist leicht, daß es tatsächlich in jedem dieser Intervalle nur ein einziges Extremum gibt, das dann natürlich ein Minimum sein wird, und daß diese Minima an den Stellen L_1, L_2 und L_3 liegen. Im ersten Intervall (zwischen Sonne und Jupiter) ist nämlich

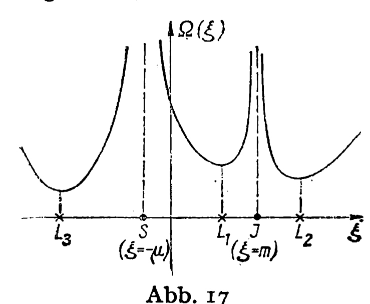


Abb. 17
Minima von $\Omega(\xi)$, schematisch

$$r = \xi + \mu, \quad \varrho = 1 - r; \quad r_\xi = -\varrho_\xi = 1.$$

Die erste Gleichung (XIII; 7) ergibt also

(XIII; 10) $$\Omega_r - \Omega_\varrho = 0$$

oder wegen (XIII; 8)

$$m\left(r - \frac{1}{r^2}\right) - \mu\left(\varrho - \frac{1}{\varrho^2}\right) = 0,$$

während die zweite die triviale Form $0 = 0$ annimmt. Setzt man also wie in (XII; 58)

$$\lambda = \frac{\varrho}{r} = \frac{1-r}{r}; \quad r = \frac{1}{1+\lambda}, \quad \varrho = \frac{\lambda}{1+\lambda},$$

so lautet diese Gleichung (nach Fortschaffen der Nenner)

$$m\,\lambda^2[(1+\lambda)^3 - 1] = \mu[(1+\lambda)^3 - \lambda^3]$$

oder, wenn man $m = 1$ setzt[1]) (so daß μ die in Einheiten der Sonnenmasse ausgedrückte Planetenmasse ist),

$$\lambda^5 + 3\lambda^4 + 3\lambda^3 = \mu(3\lambda^2 + 3\lambda + 1).$$

Sie erweist sich also mit (XII; 63) identisch und hat daher eine einzige reelle Lösung, die auf den Punkt L_1 führt.

Durch entsprechende Schlußfolgerungen zeigt man, daß im zweiten Intervall (rechts vom Jupiter)

(XIII; 11) $$r = \xi + \mu, \quad \varrho = r - 1; \quad r_\xi = \varrho_\xi = 1; \quad \Omega_r + \Omega_\varrho = 0$$

gilt und die Lösung auf L_2 führt. Schließlich erhält man im dritten Intervall (links von der Sonne)

(XIII; 12) $$r = -(\xi + \mu), \quad \varrho = r + 1; \quad r_\xi = \varrho_\xi = -1; \quad \Omega_r + \Omega_\varrho = 0$$

und als einzige reelle Lösung L_3.

Die einzigen Extrema der Fläche $\Omega(\xi, \eta)$ befinden sich also genau an den Stellen der fünf Librationszentren. Es muß nun noch untersucht werden, ob es sich um echte Minima oder um Sattelpunkte handelt. Zu diesem Zweck bilde man die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung:

(XIII; 13) $$\left\{\begin{aligned} \Omega_{\xi\xi} &= \Omega_{rr} r_\xi^2 + \Omega_{\varrho\varrho} \varrho_\xi^2 + \Omega_r r_{\xi\xi} + \Omega_\varrho \varrho_{\xi\xi}, \\ \Omega_{\xi\eta} &= \Omega_{rr} r_\xi r_\eta + \Omega_{\varrho\varrho} \varrho_\xi \varrho_\eta + \Omega_r r_{\xi\eta} + \Omega_\varrho \varrho_{\xi\eta}, \\ \Omega_{\eta\eta} &= \Omega_{rr} r_\eta^2 + \Omega_{\varrho\varrho} \varrho_\eta^2 + \Omega_r r_{\eta\eta} + \Omega_\varrho \varrho_{\eta\eta}, \end{aligned}\right.$$

---

[1]) Das ist hier erlaubt, da in die Gleichung nur das Verhältnis $\mu : m$ eingeht, die Bedingung $m + \mu = 1$ also nicht berücksichtigt zu werden braucht.

wobei neben (XIII; 8)

$$(\text{XIII}; 14)\quad \left\{\begin{aligned} &\Omega_{rr} = m\left(1 + \frac{2}{r^3}\right); \quad \Omega_{r\varrho} = 0; \quad \Omega_{\varrho\varrho} = \mu\left(1 + \frac{2}{\varrho^3}\right), \\ &r_{\xi\xi} = \frac{1}{r}\left[1 - \left(\frac{\xi + \mu}{r}\right)^2\right]; \quad r_{\xi\eta} = -\frac{(\xi + \mu)\,\eta}{r^3}; \\ &r_{\eta\eta} = \frac{1}{r}\left[1 - \left(\frac{\eta}{r}\right)^2\right], \\ &\varrho_{\xi\xi} = \frac{1}{\varrho}\left[1 - \left(\frac{\xi - m}{\varrho}\right)^2\right]; \quad \varrho_{\xi\eta} = -\frac{(\xi - m)\,\eta}{\varrho^3}; \\ &\varrho_{\eta\eta} = \frac{1}{\varrho}\left[1 - \left(\frac{\eta}{\varrho}\right)^2\right] \end{aligned}\right.$$

zu berücksichtigen ist.

Für die Dreieckspunkte L_4, L_5 gilt

$$r = \varrho = 1; \quad \xi = \frac{1}{2} - \mu; \quad \eta = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

und daher nach (XIII; 8), (XIII; 13) und (XIII; 14)

$$r_\xi = \frac{1}{2}, \quad r_\eta = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}; \quad \varrho_\xi = \frac{1}{2} - (m + \mu) = -\frac{1}{2},$$
$$\varrho_\eta = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3},$$
$$\Omega_r = \Omega_\varrho = 0, \quad \Omega_{rr} = 3m, \quad \Omega_{\varrho\varrho} = 3\mu,$$
$$\Omega_{\xi\xi} = \frac{3}{4}, \quad \Omega_{\xi\eta} = \pm\frac{3}{4}\sqrt{3}\,(m - \mu) = \pm\frac{3}{4}\sqrt{3}\,(1 - 2\mu), \quad \Omega_{\eta\eta} = \frac{9}{4}.$$

Da $\Omega_{\xi\xi}\Omega_{\eta\eta} - \Omega_{\xi\eta}^2 = {}^{27}/_{16}[1 - (1 - 2\mu)^2] > 0$ wegen $\mu < {}^1/_2$ und sowohl $\Omega_{\xi\xi}$ als auch $\Omega_{\eta\eta}$ positiv sind, handelt es sich hier um *echte Minima*.

In den drei kollinearen Librationszentren L_1, L_2, L_3 ist

$$r_\xi = \pm 1, \quad \varrho_\xi = \pm 1; \quad r_\eta = \varrho_\eta = 0,$$
$$r_{\xi\xi} = r_{\xi\eta} = \varrho_{\xi\xi} = \varrho_{\xi\eta} = 0; \quad r_{\eta\eta} = \frac{1}{r}, \quad \varrho_{\eta\eta} = \frac{1}{\varrho},$$
$$\Omega_{rr} > 0, \quad \Omega_{\varrho\varrho} > 0,$$

also wegen (XIII; 13) und (XIII; 14) in allen drei Fällen

$$\Omega_{\xi\xi} = m\left(1 + \frac{2}{r^3}\right) + \mu\left(1 + \frac{2}{\varrho^3}\right) > 0; \quad \Omega_{\xi\eta} = 0,$$
$$\Omega_{\eta\eta} = \frac{1}{r}\Omega_r + \frac{1}{\varrho}\Omega_\varrho = m\left(1 - \frac{1}{r^3}\right) + \mu\left(1 - \frac{1}{\varrho^3}\right).$$

In L_1 ist aber

$$r + \varrho = 1, \quad \text{also} \quad r < 1, \quad \varrho < 1; \quad \Omega_{\eta\eta} < 0.$$

In L_2 und L_3 ist nach (XIII; 11) und (XIII; 12)

$$\Omega_r = -\Omega_\varrho = m\left(r - \frac{1}{r^2}\right) = -\mu\left(\varrho - \frac{1}{\varrho^2}\right),$$

also

(XIII; 15)
$$\Omega_{\eta\eta} = m\left(r - \frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho}\right)$$

oder

(XIII; 16)
$$\Omega_{\eta\eta} = \mu\left(\varrho - \frac{1}{\varrho^2}\right)\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r}\right).$$

In L_2 ist aber $r = 1 + \varrho > 1, r > \varrho$, also die erste Klammer in (XIII; 15) positiv, die zweite negativ. In L_3 ist dagegen $\varrho = 1 + r > 1$, $\varrho > r$, und es gilt dasselbe für (XIII; 16). In allen drei Punkten ist daher $\Omega_{\eta\eta}$ negativ, d.h., es gilt

$$\Omega_{\xi\xi}\,\Omega_{\eta\eta} - \Omega_{\xi\eta}^2 = \Omega_{\xi\xi}\,\Omega_{\eta\eta} < 0.$$

Damit ist bewiesen, daß es sich bei den kollinearen Librationszentren um *Sattelpunkte* der Funktion $\Omega(\xi, \eta)$ handelt.

Bezeichnet man mit $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_5$ die numerischen Werte, die für gegebene Massen m, μ die Potentialfunktion in $L_1, L_2, \ldots, L_5$ annimmt, so gilt für $0 < \mu \leqq 1/2$ die Abschätzung

$$\Omega_1 > \Omega_2 \geqq \Omega_3 > \Omega_4 = \Omega_5 = \frac{3}{2},$$

wobei das Gleichheitszeichen zwischen Ω_2 und Ω_3 sich auf den Grenzfall $m = \mu = 1/2$ bezieht. Von der Gültigkeit dieser Abschätzung überzeugt man sich, indem man die numerischen Werte $\Omega_1, \ldots, \Omega_5$ für eine Reihe von μ-Werten zwischen 0 und $1/2$ berechnet. Hier genügt es, dies für zwei Grenzfälle, nämlich für $\mu = 1/2$ und für sehr kleine μ, zu zeigen.

Für $r = \varrho = 1$ (L_4 und L_5) folgt zunächst aus (XIII; 4)

$$2\Omega_4 = 2\Omega_5 = 3(m + \mu) = 3.$$

Im Falle gleicher Massen ($m = \mu = 1/2$) ist für L_2, L_3 nach Abschnitt 113

$$r = 0.6984; \quad \varrho = 1.6984$$

zu setzen, und man erhält

$$2\Omega_2 = 2\Omega_3 = \frac{1}{2}\left(r^2 + \frac{2}{r} + \varrho^2 + \frac{2}{\varrho}\right) \approx 3.7,$$

ebenso für L_1 ($r = \varrho = 1/2$)

$$2\Omega_1 = r^2 + \frac{2}{r} = 4.25,$$

also

$$\Omega_1 > \Omega_2 = \Omega_3 > \frac{3}{2} = \Omega_4 = \Omega_5.$$

Ist μ sehr klein, so bedienen wir uns der Entwicklungen (XII; 69), (XII; 70) und (XII; 71). Für L_1 ist dann

$$\varrho = \nu - \frac{1}{3}\nu^2 - \cdots; \quad r = 1 - \varrho; \quad \mu = 3\nu^3; \quad m = 1 - 3\nu^3,$$

also

$$2\Omega_1 = (1 - 3\nu^3)\left[(1-\varrho)^2 + \frac{2}{1-\varrho}\right] + 3\nu^3\left(\varrho^2 + \frac{2}{\varrho}\right).$$

Entwickelt man diesen Ausdruck nach Potenzen von ν und berücksichtigt, daß ϱ von der Ordnung ν ist, so ergibt sich bis zu Gliedern dritter Ordnung

$$2\Omega_1 = 3 + 9\nu^2 - 7\nu^3 + \cdots.$$

In derselben Weise findet man unschwer

$$2\Omega_2 = 3 + 9\nu^2 - 11\nu^3 + \cdots,$$

$$2\Omega_3 = 3 + \frac{3}{2}\mu + \cdots = 3 + \frac{9}{2}\nu^3 + \cdots,$$

woraus

$$\Omega_1 > \Omega_2 > \Omega_3 > \frac{3}{2}$$

folgt.

115. *Die Hillschen Grenzkurven*

Im eingeschränkten Dreikörperproblem existiert das Jacobische Integral

$$V^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = 2\Omega - C, \tag{XIII; 17}$$

wo C eine für jede spezielle Bahn konstante Größe, die *Jacobische Konstante*, darstellt. G.W. Hill[1]) hat gezeigt, daß diese Gleichung benutzt werden kann, um die Bereiche in der $\xi\,\eta$-Ebene abzugrenzen, auf die alle reellen, durch einen bestimmten Wert der Jacobischen Konstante charakterisierten Bewegungen der infinitesimalen Masse beschränkt bleiben. Da nämlich für eine und dieselbe Bahn stets $V^2 \geqq 0$ ist, muß in jedem ihrer Punkte die Ungleichung

$$2\Omega(\xi, \eta) \geqq C$$

erfüllt sein. Mit anderen Worten: Ist C gegeben, so stellt die Kurve

$$V^2 = f(\xi, \eta) = 2\Omega(\xi, \eta) - C = 0 \tag{XIII; 18}$$

eine Schranke dar, die der Körper während der ganzen Dauer seiner Bewegung nicht überschreiten kann; er hält sich stets auf derjenigen Seite dieser Kurve auf, für die $f(\xi, \eta) > 0$ ist. Erreicht der Körper zu irgendeiner Zeit diese *Hillsche Grenzkurve*, so wird seine Geschwindigkeit im rotierenden System Null. Die Bahnkurve hat an dieser Stelle eine Spitze (einen Umkehrpunkt) S, wie in Abb. 18 angedeutet ist.

---

[1]) G. W. Hill, American Journal Math. *1*, 5, 23 (1898).

Ist $C < 3$, so existiert keine Grenzkurve, da im vorigen Abschnitt bewiesen worden ist, daß $2\Omega \geqq 3$ ist. Der infinitesimale Körper kann sich dann in der ganzen Ebene bewegen, soweit die übrigen Bedingungen es zulassen. Dagegen gibt es für $C > 3$ stets „verbotene Bereiche" (wie das schraffierte Gebiet in Abb. 18), in die der Körper unter keinen Umständen eindringen kann und deren Begrenzung – siehe (XIII; 4) – durch

$$m\left(r^2 + \frac{2}{r}\right) + \mu\left(\varrho^2 + \frac{2}{\varrho}\right) = C \qquad \text{(XIII; 19)}$$

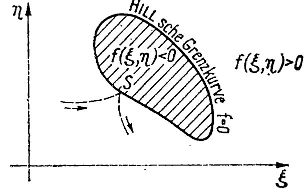


Abb. 18. HILLsche Grenzkurve, schematisch

gegeben ist, wenn wir (XIII; 18) in Polarkoordinaten r, ϱ schreiben.

Die Form sämtlicher HILLscher Grenzkurven erhalten wir, wenn wir in einem $\xi\,\eta\,z$-Raum die Fläche

$$z = 2\Omega(\xi, \eta)$$

mit der Ebene $z = C$ zum Schnitt bringen. Ist C sehr groß, so läßt sich (XIII; 19) erfüllen, wenn r oder ϱ sehr klein ist oder wenn r und ϱ beide sehr groß sind. Im erstgenannten Fall lautet (XIII; 19) genähert

$$r = \frac{2m}{C} \quad \text{bzw.} \quad \varrho = \frac{2\mu}{C}, \qquad \text{(XIII; 20)}$$

im zweiten, ebenfalls genähert [siehe (XIII; 5)],

$$m\,r^2 + \mu\,\varrho^2 \approx \xi^2 + \eta^2 = C. \qquad \text{(XIII; 21)}$$

Die Grenzkurve besteht mithin aus drei voneinander getrennten Zweigen, nämlich aus zwei kreisähnlichen Kurven (XIII; 20) um die beiden endlichen Massen, deren Halbmesser klein von der Ordnung $1/C$ und den Massen m bzw. μ proportional sind, und aus einer ebenfalls kreisähnlichen Kurve (XIII; 21), die das System der endlichen Massen in sehr weitem Abstand umschließt und deren Halbmesser von der Ordnung $\sqrt{C}$ ist. Alle denkbaren Bahnen mit sehr großem C liegen also innerhalb der kleinen Kreise (Satelliten) oder außerhalb des großen Kreises (entfernter Begleiter eines engen Doppelsterns); denn nur dort ist $2\Omega > C$.

Nimmt C von großen Anfangswerten her ab, so wird es nacheinander die Werte $2\Omega_1, 2\Omega_2, 2\Omega_3$ durchlaufen, bis schließlich $C = 2\Omega_4 = 2\Omega_5 = 3$ erreicht ist. Dann wird die Kurve $2\Omega = C$ auf die Punkte L_4 und L_5 zusammenschrumpfen, und für $C < 3$ schneidet die Ebene $z = C$ die Fläche $2\Omega(\xi, \eta)$ überhaupt nicht mehr, und es existiert daher keine Grenzkurve.

Für die speziellen Werte $C = 2\Omega_1, 2\Omega_2, 2\Omega_3$ geht die Ebene $z = C$ durch die in L_1, L_2, L_3 liegenden Sattelpunkte der Potentialfläche; die entsprechenden HILLschen Grenzkurven haben also an diesen Stellen Doppelpunkte mit zwei reellen Tangenten. Im Falle $C = 2\Omega_1$, der zuerst erreicht wird, wenn C von großen Werten her abnimmt, werden also die beiden kreisähnlichen Kurven (XIII; 20) aneinanderstoßen und eine lemniskatenähnliche Kurve (Achter-

kurve) bilden, deren Doppelpunkt in L_1 liegt. Für $2\Omega_1 > C > 2\Omega_2$ fließen die beiden Kreise zu einer sanduhrförmigen Kurve zusammen, die beide endlichen Massen umschließt. Während also für $C > 2\Omega_1$ ein Satellit einen gewissen Bereich um seinen Zentralkörper niemals verlassen kann, wird dies für $C < 2\Omega_1$ möglich: Es öffnet sich bei L_1 eine zunächst enge, mit abnehmendem C aber immer breiter werdende Lücke, durch die der Satellit aus dem Anziehungsbereich des einen Körpers in den des anderen hinüberwechseln kann. Ist $C = 2\Omega_2$, so entsteht ein Doppelpunkt bei L_2, in dem die sanduhrförmige Kurve die inzwischen enger gewordene äußere Grenzkurve berührt. Für

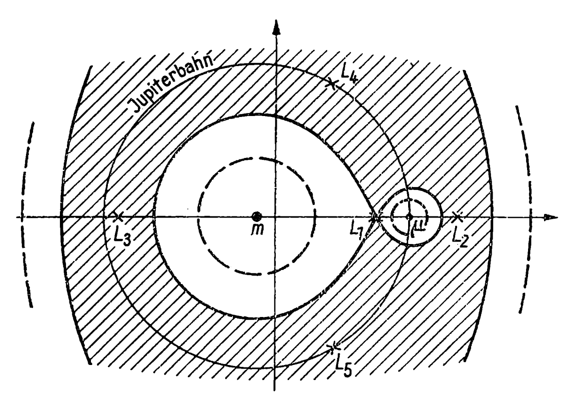


Abb. 19a. Hillsche Grenzkurven, schematisch
--- für $C > 2\Omega_1$; —— für $C = 2\Omega_1$ (verbotenes Gebiet schraffiert)

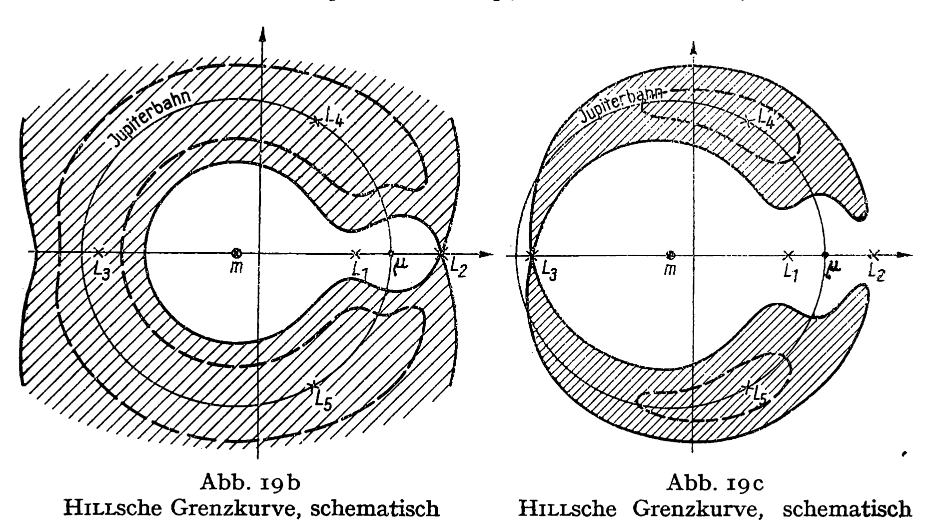


Abb. 19b
Hillsche Grenzkurve, schematisch
—— für $C = 2\Omega_2$, Sanduhrkurve (verbotenes Gebiet schraffiert);
--- für $2\Omega_2 > C > 2\Omega_3$ (verbotenes Gebiet hufeisenförmig begrenzt)

Abb. 19c
Hillsche Grenzkurve, schematisch
—— für $C = 2\Omega_3$ (verbotenes Gebiet schraffiert);
--- für $2\Omega_3 > C > 2\Omega_4 = 3$ (zwei getrennte verbotene Gebiete, bohnenförmig begrenzt)

$2\Omega_2 > C > 2\Omega_3$ wird die Grenzkurve dann nur noch aus einem einzigen Kurvenzug bestehen, der den verbotenen Bereich umschließt und dessen Form man mit einem Hufeisen vergleichen kann. Ist $C = 2\Omega_3$, so schnürt sich das Hufeisen in der Mitte (bei L_3) ein und bildet dort wiederum einen Doppelpunkt. Nimmt C noch weiter ab, so zerfällt die Kurve in zwei zur ξ-Achse symmetrisch liegende bohnenförmige Teilkurven, die zwei getrennte verbotene Felder abgrenzen, während die ganze übrige Ebene nunmehr für die Bewegung frei geworden ist. Im Innern dieser geschlossenen Teilbereiche liegen die Librationszentren L_4 und L_5, auf die sich die Grenzkurve zusammenzieht, wenn C den Wert $2\Omega_4 = 2\Omega_5 = 3$ erreicht. In Abb. 19a, b, c findet man die verschiedenen Formen der HILLschen Grenzkurve skizzenhaft dargestellt.

Für manche Zwecke ist es nützlich, diese Betrachtungen auch auf das räumliche „problème restreint" auszudehnen, in dem ja, wie in Abschnitt 99 bewiesen wurde, das JACOBIsche Integral ebenso wie im ebenen Problem existiert. Den HILLschen Grenzkurven im ebenen Problem entsprechen im räumlichen Problem *Grenzflächen*, die der infinitesimale Körper nicht überschreiten kann. Besonderes Interesse verdient der Fall, daß C sehr groß ist. Aus (XIII; 6) leitet man leicht ab, daß die HILLsche Grenzfläche in drei getrennte Flächen zerfällt, nämlich in zwei kugelähnliche, geschlossene Flächen um die endlichen Massen und in eine zylinderähnliche Fläche von sehr großem Durchmesser, deren Achse senkrecht auf der Bahnebene der endlichen Massen steht. Satelliten können also unter den hier gegebenen Verhältnissen auch bei räumlicher Bewegungsfreiheit einen abgegrenzten Bereich um ihren Zentralkörper nicht verlassen.

Auch der andere Grenzfall, daß C nur wenig von 3 abweicht, ist wichtig. Wir werden auf ihn im Zusammenhang mit der Theorie der Trojaner zurückkommen.

116. *Enge Bahnen um die LAGRANGEschen Dreieckspunkte*

Das Problem der Librationsbewegungen im ebenen „problème restreint" um die Zentren $L_1, \ldots, L_5$ ist, wie erwähnt, schon längere Zeit vor der Entdeckung der ersten „Trojaner" diskutiert worden. CHARLIER hat diese Aufgabe unter der Einschränkung gelöst, daß der Abstand des infinitesimalen Körpers (Planetoiden) von einem der Librationszentren beständig so klein bleibt, daß zweite und höhere Potenzen des Abstandes gegen die Längeneinheit (Abstand Sonne–Planet) vernachlässigt werden können. Für die Bahnbewegung der Trojaner um L_4 und L_5 der Jupiterbahn, den einzigen Fall solcher Librationsbewegungen, den wir in der Natur beobachten, trifft das allerdings keineswegs zu. Nicht nur findet man, daß die Trojaner beträchtliche Abstände von den Librationszentren erreichen, sondern ihre Bewegungen sind auch nicht auf die Ebene der Jupiterbahn beschränkt. Trotzdem liefert die CHARLIERsche Theorie eine interessante Näherungslösung des Problems, die schon viele charakteristische Eigenschaften der wirklichen Trojanerbewegung erkennen läßt und die vor allem ihrer Einfachheit und Durchsichtigkeit wegen bemerkenswert ist.

Die Librationsbewegungen um die LAGRANGEschen Dreieckspunkte L_4 und L_5 unterscheiden sich wesentlich von denen um die „kollinearen" Zentren L_1, L_2 und L_3. Wir werden ihre Theorien daher getrennt behandeln.

In den Bewegungsgleichungen des ebenen eingeschränkten Dreikörperproblems

$$\text{(XIII; 22)} \qquad \begin{cases} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial \xi}, \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial \eta} \end{cases}$$

setzen wir

$$\xi = a + x; \quad \eta = b + y,$$

wo

$$a = \frac{1}{2} - \mu; \quad b = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

die rechtwinkligen Koordinaten von L_4 bedeuten und x, y kleine Zusätze sind, deren Quadrate man vernachlässigen kann. In der Umgebung von L_4 läßt sich dann die Potentialfunktion $\Omega(\xi, \eta)$ in die TAYLORsche Reihe

$$\Omega(a + x, b + y) = \Omega(a, b) + x\Omega_a + y\Omega_b + \\ + \frac{1}{2}(x^2\Omega_{aa} + 2xy\Omega_{ab} + y^2\Omega_{bb}) + \cdots$$

entwickeln, in der zur Abkürzung

$$\Omega_a, \Omega_b; \quad \Omega_{aa}, \Omega_{ab} = \Omega_{ba}, \Omega_{bb}; \quad \ldots$$

für die numerischen Werte der partiellen Ableitungen

$$\Omega_\xi, \Omega_\eta; \quad \Omega_{\xi\xi}, \Omega_{\xi\eta} = \Omega_{\eta\xi}, \Omega_{\eta\eta}; \quad \ldots$$

an der Stelle $x = 0$, $y = 0$, also im Librationszentrum, gesetzt worden ist. Da nun für alle Librationszentren

$$\Omega_a = \Omega_b = 0$$

ist und $\Omega_\xi = \Omega_x$, $\Omega_\eta = \Omega_y$ gilt, erhält man für x und y die Differentialgleichungen

$$\text{(XIII; 23)} \qquad \begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = x\Omega_{aa} + y\Omega_{ab} + \cdots, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = x\Omega_{ba} + y\Omega_{bb} + \cdots, \end{cases}$$

in der die höheren Glieder rechts unterdrückt werden können. Sie nehmen dann die Gestalt linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten an, die das partikuläre Integral

$$\text{(XIII; 24)} \qquad x = A\,e^{\lambda t}; \quad y = B\,e^{\lambda t}$$

besitzen. Schreibt man nämlich

$$\dot{x} = \lambda A\,e^{\lambda t}, \quad \dot{y} = \lambda B\,e^{\lambda t}; \quad \ddot{x} = \lambda^2 A\,e^{\lambda t}, \quad \ddot{y} = \lambda^2 B\,e^{\lambda t}$$

und setzt dies und (XIII; 24) in (XIII; 23) ein, so erhält man, wenn man noch den allen Gliedern gemeinsamen, stets von Null verschiedenen Faktor $e^{-\lambda t}$ herausdividiert, für die Konstanten A und B die homogenen linearen Gleichungen

(XIII; 25)
$$\begin{cases} A(\lambda^2 - \Omega_{aa}) - B(2\lambda + \Omega_{ab}) = 0, \\ A(2\lambda - \Omega_{ab}) + B(\lambda^2 - \Omega_{bb}) = 0. \end{cases}$$

Diese sind, außer dem trivialen Fall $A = B = 0$, der auf die strenge LAGRANGEsche Dreieckslösung führt, dann und nur dann erfüllbar, wenn λ die Gleichung

(XIII; 26)
$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - \Omega_{aa} & -(2\lambda + \Omega_{ab}) \\ 2\lambda - \Omega_{ab} & \lambda^2 - \Omega_{bb} \end{vmatrix} = 0$$

befriedigt. Das partikuläre Integral (XIII; 24) besteht also unter der Voraussetzung, daß λ der biquadratischen Gleichung

(XIII; 27)
$$\lambda^4 - \lambda^2(\Omega_{aa} + \Omega_{bb} - 4) + \Omega_{aa}\Omega_{bb} - \Omega_{ab}^2 = 0$$

genügt. Offenbar gilt diese Bedingung für enge Bewegungen um alle fünf Librationszentren, wenn für $\Omega_{aa}, \Omega_{ab}, \Omega_{bb}$ die an diesen Stellen angenommenen numerischen Werte der zweiten partiellen Ableitungen der Potentialfunktion eingesetzt werden. Insbesondere ist für L_4 nach Abschnitt 114

$$\Omega_{aa} = \frac{3}{4}; \quad \Omega_{ab} = \frac{3}{4}\sqrt{3}\,(1 - 2\mu); \quad \Omega_{bb} = \frac{9}{4},$$

also

$$\Omega_{aa} + \Omega_{bb} - 4 = -1; \quad \Omega_{aa}\Omega_{bb} - \Omega_{ab}^2 = \frac{27}{4}\mu(1-\mu) > 0.$$

Die Gleichung (XIII; 27) nimmt daher die Gestalt

(XIII; 28)
$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0$$

an und hat nur rein imaginäre Wurzeln; denn es ist

(XIII; 29)
$$\lambda^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)} < 0.$$

Hieraus aber folgt weiter, daß reelle λ^2 nur existieren, falls

(XIII; 30)
$$0 \leqq k = 27\mu(1-\mu) \leqq 1$$

ist. Die Planetenmasse μ muß dann unterhalb einer Schranke μ_0 liegen, für die

$$\mu_0(1-\mu_0) = \frac{1}{27}; \quad \mu_0 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}} = 0.03852 = \frac{1}{25.96}$$

gilt. Das Verhältnis $\mu : (1-\mu)$ der Masse des Planeten zur Masse der Sonne darf also höchstens

$$\frac{\mu_0}{1-\mu_0} = \frac{1}{24.96} = 0.040064$$

betragen, damit Lösungen der angenommenen Art möglich sind. Andernfalls sind die Lösungen λ^2 komplex. Diese Fälle „asymptotischer Lösungen" werden wir im Abschnitt 169 gesondert behandeln.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen (XIII; 23), die vier unabhängige Konstanten erfordert, lautet dann

$$\text{(XIII; 31)} \qquad \begin{cases} x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + A_3 e^{\lambda_3 t} + A_4 e^{\lambda_4 t}, \\ y = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} + B_3 e^{\lambda_3 t} + B_4 e^{\lambda_4 t}, \end{cases}$$

wo λ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ die vier Wurzeln von (XIII; 27) bedeuten, die A_i vier willkürliche (komplexe) Konstanten sind und die B_i mit den A_i durch (XIII; 25) zusammenhängen, d. h., es ist

$$\text{(XIII; 32)} \qquad B_i = A_i \frac{\lambda_i^2 - \Omega_{aa}}{2\lambda_i + \Omega_{ab}} \equiv A_i \frac{\Omega_{ab} - 2\lambda_i}{\lambda_i^2 - \Omega_{bb}}.$$

Nun sind aber [unter der Bedingung (XIII; 30)] die vier Wurzeln von (XIII; 27) von der Form

$$\lambda_1 = i\,\nu_1, \quad \lambda_2 = -i\,\nu_1; \quad \lambda_3 = i\,\nu_2, \quad \lambda_4 = -i\,\nu_2,$$

wo ν_1, ν_2 reelle positive Größen sind. Man kann daher auch

$$\text{(XIII; 33)} \qquad \begin{cases} x = A_1 e^{i\nu_1 t} + A_2 e^{-i\nu_1 t} + A_3 e^{i\nu_2 t} + A_4 e^{-i\nu_2 t}, \\ y = B_1 e^{i\nu_1 t} + B_2 e^{-i\nu_1 t} + B_3 e^{i\nu_2 t} + B_4 e^{-i\nu_2 t} \end{cases}$$

schreiben. Setzt man ferner

$$e^{i\nu t} = \cos\nu t + i\sin\nu t; \quad e^{-i\nu t} = \cos\nu t - i\sin\nu t,$$

so nimmt (XIII; 33) die Form

$$\text{(XIII; 34)} \begin{cases} x = \alpha_1 \cos\nu_1 t + \alpha_2 \sin\nu_1 t + \alpha_3 \cos\nu_2 t + \alpha_4 \sin\nu_2 t, \\ y = \beta_1 \cos\nu_1 t + \beta_2 \sin\nu_1 t + \beta_3 \cos\nu_2 t + \beta_4 \sin\nu_2 t \end{cases}$$

an. Die α_i sind willkürliche reelle Konstanten, nach deren Wahl auch die β_i mitbestimmt sind. Es ist nämlich

$$\alpha_1 = A_1 + A_2, \alpha_2 = i(A_1 - A_2); \quad \beta_1 = B_1 + B_2, \beta_2 = i(B_1 - B_2),$$

woraus nach (XIII; 32)

$$\text{(XIII; 35)} \qquad \beta_1 = \frac{2\alpha_2 \nu_1 - \alpha_1 \Omega_{ab}}{\nu_1^2 + \Omega_{bb}}; \quad \beta_2 = -\frac{2\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2 \Omega_{ab}}{\nu_1^2 + \Omega_{bb}}$$

oder

$$\text{(XIII; 35a)} \quad \alpha_1 = -\frac{2\beta_2 \nu_1 + \beta_1 \Omega_{ab}}{\nu_1^2 + \Omega_{aa}}; \quad \alpha_2 = \frac{2\beta_1 \nu_1 - \beta_2 \Omega_{ab}}{\nu_1^2 + \Omega_{aa}}$$

folgt. Entsprechende Zusammenhänge bestehen zwischen β_3, β_4 einerseits und $\alpha_3, \alpha_4, \nu_2$ andererseits.

Unter Umständen ist es vorteilhaft, als unabhängige Konstante die Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten $x_0, y_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0$ (die *lokalen Elemente*) zur Zeit $t = 0$ einzuführen. Dann ist nach (XIII; 34)

$$\text{(XIII; 36)} \qquad \begin{cases} x_0 = \alpha_1 + \alpha_3; & \dot{x}_0 = \nu_1 \alpha_2 + \nu_2 \alpha_4, \\ y_0 = \beta_1 + \beta_3; & \dot{y}_0 = \nu_1 \beta_2 + \nu_2 \beta_4. \end{cases}$$

Hieraus und aus (XIII; 35) sowie (XIII; 35a) lassen sich dann die α_i, β_i als Funktionen der lokalen Elemente ausdrücken. Man erhält zunächst aus (XIII; 35) und (XIII; 35a)

$$\text{(XIII; 37)} \qquad \begin{cases} \alpha_1(\nu_1^2 + \Omega_{aa}) + \beta_1 \Omega_{ab} + 2\beta_2 \nu_1 = 0, \\ \beta_1(\nu_1^2 + \Omega_{bb}) + \alpha_1 \Omega_{ab} - 2\alpha_2 \nu_1 = 0 \end{cases}$$

und entsprechend

$$\text{(XIII; 38)} \qquad \begin{cases} \alpha_3(\nu_2^2 + \Omega_{aa}) + \beta_3 \Omega_{ab} + 2\beta_4 \nu_2 = 0, \\ \beta_3(\nu_2^2 + \Omega_{bb}) + \alpha_3 \Omega_{ab} - 2\alpha_4 \nu_2 = 0. \end{cases}$$

Aus (XIII; 36) folgt

$$\text{(XIII; 39)} \qquad \begin{cases} \alpha_3 = x_0 - \alpha_1; & \nu_2 \alpha_4 = \dot{x}_0 - \nu_1 \alpha_2, \\ \beta_3 = y_0 - \beta_1; & \nu_2 \beta_4 = \dot{y}_0 - \nu_1 \beta_2. \end{cases}$$

Setzt man dies in (XIII; 38) ein, so erhält man für $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2$ die beiden Gleichungen

$$\text{(XIII; 40)} \qquad \begin{cases} \alpha_1(\nu_2^2 + \Omega_{aa}) + \beta_1 \Omega_{ab} + 2\beta_2 \nu_1 = \\ \qquad = M_1 = x_0(\nu_2^2 + \Omega_{aa}) + y_0 \Omega_{ab} + 2\dot{y}_0, \\ \beta_1(\nu_2^2 + \Omega_{bb}) + \alpha_1 \Omega_{ab} - 2\alpha_2 \nu_1 = \\ \qquad = N_1 = y_0(\nu_2^2 + \Omega_{bb}) + x_0 \Omega_{ab} - 2\dot{x}_0, \end{cases}$$

die zusammen mit (XIII; 37) genügen, um diese vier Konstanten als Funktionen von M_1 und N_1 und damit der vier Anfangswerte $x_0, y_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0$ zu bestimmen, und zwar ergibt sich, wenn man (XIII; 37) von (XIII; 40) subtrahiert,

$$\text{(XIII; 41)} \qquad \alpha_1(\nu_2^2 - \nu_1^2) = M_1; \quad \beta_1(\nu_2^2 - \nu_1^2) = N_1,$$

sodann aus (XIII; 37)

$$\text{(XIII; 42)} \qquad \begin{cases} 2\nu_1(\nu_2^2 - \nu_1^2)\alpha_2 = N_1(\nu_1^2 + \Omega_{bb}) + M_1 \Omega_{ab}, \\ -2\nu_1(\nu_2^2 - \nu_1^2)\beta_2 = M_1(\nu_1^2 + \Omega_{aa}) + N_1 \Omega_{ab}. \end{cases}$$

Die entsprechenden Konstanten mit den Indizes 3 und 4 folgen dann unmittelbar aus (XIII; 39).

Aus Symmetriegründen erhält man Formeln für $\alpha_3, \alpha_4; \beta_3, \beta_4$ auch direkt aus (XIII; 41) und (XIII; 42), indem man bei ν, M, N die Indizes 1 und 2

miteinander vertauscht, bei α, β dagegen die Indizes 1 und 2 mit 3 bzw. 4. Es folgt dann

(XIII; 43)
$$\begin{cases} M_2 = x_0(\nu_1^2 + \Omega_{aa}) + y_0\Omega_{ab} + 2\dot{y}_0, \\ N_2 = y_0(\nu_1^2 + \Omega_{bb}) + x_0\Omega_{ab} - 2\dot{x}_0, \\ \alpha_3(\nu_2^2 - \nu_1^2) = -M_2; \quad \beta_3(\nu_2^2 - \nu_1^2) = -N_2, \\ -2\nu_2(\nu_2^2 - \nu_1^2)\alpha_4 = N_2(\nu_2^2 + \Omega_{bb}) + M_2\Omega_{ab}, \\ 2\nu_2(\nu_2^2 - \nu_1^2)\beta_4 = M_2(\nu_2^2 + \Omega_{aa}) + N_2\Omega_{ab}. \end{cases}$$

Die durch das allgemeine Integral (XIII; 34) gegebene Bewegung ist periodisch und setzt sich additiv aus zwei reinen Sinusschwingungen mit den Perioden

(XIII; 44)
$$p_1 = \frac{2\pi}{\nu_1}; \quad p_2 = \frac{2\pi}{\nu_2}$$

zusammen. Die Amplituden dieser Schwingungen lassen sich durch geeignete Festsetzung der willkürlichen Konstanten α_i bzw. der Anfangsbedingungen so klein wählen, daß die auf L_4 bezüglichen Koordinaten x, y für alle Zeiten klein genug gegen die Einheit bleiben und somit die dieser Fassung des Problems zugrunde liegenden Voraussetzungen erfüllt sind. Die Bewegung ist daher *stabil*; denn wenn kleine Stöße oder Störungen die Anfangsbedingungen ändern, werden sie lediglich kleine Änderungen der Amplituden und Phasen der beiden Elementarschwingungen hervorrufen. Eine Änderung der Periodenlänge tritt dagegen nicht ein; denn aus (XIII; 29) folgt ja, daß

(XIII; 45)
$$\nu^2 = -\lambda^2 = \frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{1-k}); \quad k = 27\mu(1-\mu)$$

nur von den Massen, nicht aber von den Integrationskonstanten abhängt.

Im Falle der großen Planeten unseres Sonnensystems ist μ sehr klein. Selbst für Jupiter ist das Verhältnis der Planetenmasse zur Sonnenmasse nur

$$\frac{\mu}{1-\mu} = \frac{1}{1047.35}, \quad \text{d.h., es ist} \quad \mu = \frac{1}{1048.35}, \quad k = 0.025730.$$

Die Bedingung $k < 1$ ist also für alle Planeten erfüllt, und man kann die Größen ν_1, ν_2 in rasch konvergierende Potenzreihen nach k entwickeln. Es ist

(XIII; 46)
$$\begin{cases} \nu_1^2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-k}) = \frac{1}{4}k\left(1 + \frac{1}{4}k + \frac{1}{8}k^2 + \frac{5}{64}k^3 + \cdots\right), \\ \nu_2^2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-k}) = 1 - \nu_1^2 \end{cases}$$

bzw.

(XIII; 46a)
$$\begin{cases} \nu_1 = \frac{1}{2}\sqrt{k}\left(1 + \frac{1}{8}k + \frac{7}{128}k^2 + \frac{31}{1024}k^3 + \cdots\right), \\ \nu_2 = 1 - \left(\frac{1}{8}k + \frac{5}{128}k^2 + \frac{21}{1024}k^3 + \cdots\right), \end{cases}$$

und man erhält für Jupiter, mit $k = 0.025730$,

$$\nu_1 = 0.080464; \quad \nu_2 = 0.99676.$$

Die Umlaufsperioden sind dann durch (XIII; 44) gegeben, während die Umlaufszeit des Planeten um die Sonne, in der gleichen Zeiteinheit ausgedrückt, $T = 2\pi$ ist. Es ist also

$$p_i = \frac{T}{\nu_i},$$

wobei nun p_i und T in beliebigen Zeiteinheiten ausgedrückt werden können. Mit $T = 11^a.862$ (siderische Umlaufszeit des Jupiter) erhält man für die Elementarperioden der Bewegung von Planetoiden um L_4 oder L_5

$$p_1 = 147^a.42; \quad p_2 = 11^a.900 = T + 13^d.$$

Die beiden Perioden sind im allgemeinen inkommensurabel, so daß die Librationsbahnen keine geschlossenen Kurven sind, sofern nicht eine der beiden Elementarschwingungen ausfällt. Andernfalls tritt Kommensurabilität nur dann ein, wenn

$$\frac{\nu_1^2}{\nu_2^2} = \frac{1 - \sqrt{1-k}}{1 + \sqrt{1-k}} = \varkappa^2$$

das Quadrat einer rationalen Zahl $\varkappa$ ist.

Jede der beiden sich überlagernden periodischen Bewegungen hat die Form einer Ellipse mit L_4 (bzw. L_5) als Mittelpunkt, die nach Art der „harmonischen Bewegung" durchlaufen wird. Setzt man die Konstanten α_3, α_4 in (XIII; 34) und damit auch β_3, β_4 willkürlich gleich Null, so führt der Planetoid die rein harmonische Bewegung

$$\text{(XIII; 47)} \qquad \begin{cases} x = \alpha_1 \cos\nu_1 t + \alpha_2 \sin\nu_1 t, \\ y = \beta_1 \cos\nu_1 t + \beta_2 \sin\nu_1 t \end{cases}$$

mit der Periode p_1 aus. Entsprechende Gleichungen erhält man für die Elementarbewegung mit der Periode p_2, wenn man in diesen Gleichungen ν_1 mit ν_2 sowie α_1, β_1 mit α_3, β_3 und α_2, β_2 mit α_4, β_4 vertauscht. Es genügt also, die Gleichungen (XIII; 47) zu diskutieren. Aus ihnen bestimmt man

$$\cos\nu_1 t = \frac{x\beta_2 - y\alpha_2}{\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2}; \quad \sin\nu_1 t = \frac{y\alpha_1 - x\beta_1}{\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2},$$

woraus wegen $\cos^2\nu_1 t + \sin^2\nu_1 t = 1$

$$(x\beta_2 - y\alpha_2)^2 + (y\alpha_1 - x\beta_1)^2 = (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)^2$$

oder

$$\text{(XIII; 48)} \quad x^2(\beta_1^2 + \beta_2^2) - 2xy(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) + y^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) = (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)^2$$

als Gleichung der Bahnkurve folgt.

Um den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten dieser Ellipsengleichung und der Periode der Elementarschwingung sichtbar zu machen, ist eine Umformung von (XIII; 48) notwendig. Nach (XIII; 35) ist

$$\text{(XIII; 49)}\qquad \begin{cases} \beta_1(\nu_1^2+\Omega_{bb}) = 2\alpha_2\nu_1-\alpha_1\Omega_{ab}, \\ \beta_2(\nu_1^2+\Omega_{bb}) = -2\alpha_1\nu_1-\alpha_2\Omega_{ab}. \end{cases}\qquad \begin{array}{c|c} \text{(I)} & \text{(II)} \\ \alpha_1 & -\alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{array}$$

Multipliziert man (XIII; 49) mit den Faktoren (I) bzw. (II) und addiert, so erhält man

$$\text{(I)}\qquad (\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)(\nu_1^2+\Omega_{bb}) = -(\alpha_1^2+\alpha_2^2)\,\Omega_{ab},$$

$$\text{(II)}\qquad (\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)(\nu_1^2+\Omega_{bb}) = -2\nu_1(\alpha_1^2+\alpha_2^2),$$

während die Quadratsumme der beiden Gleichungen (XIII; 49)

$$\text{(III)}\qquad (\beta_1^2+\beta_2^2)(\nu_1^2+\Omega_{bb})^2 = (\alpha_1^2+\alpha_2^2)(4\nu_1^2+\Omega_{ab}^2)$$

liefert. Da wegen (XIII; 32)

$$\text{(XIII; 50)}\qquad (\nu_1^2+\Omega_{aa})(\nu_1^2+\Omega_{bb}) = 4\nu_1^2+\Omega_{ab}^2$$

ist, kann man statt (III) auch

$$\text{(IV)}\qquad (\beta_1^2+\beta_2^2)(\nu_1^2+\Omega_{bb}) = (\alpha_1^2+\alpha_2^2)(\nu_1^2+\Omega_{aa})$$

schreiben. Multipliziert man nun (XIII; 48) mit

$$\frac{\nu_1^2+\Omega_{bb}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2} = \frac{\nu_1^2+\Omega_{aa}}{\beta_1^2+\beta_2^2}$$

und benutzt die Formeln (I), (II) und (IV), so ergibt sich

$$\text{(XIII; 51)}\qquad x^2(\nu_1^2+\Omega_{aa})+2xy\Omega_{ab}+y^2(\nu_1^2+\Omega_{bb}) =$$

$$= \frac{4\nu_1^2}{\nu_1^2+\Omega_{bb}}(\alpha_1^2+\alpha_2^2) = \frac{4\nu_1^2}{\nu_1^2+\Omega_{aa}}(\beta_1^2+\beta_2^2) = R^2$$

als neue Gleichung einer Ellipse, deren Mittelpunkt mit L_4 zusammenfällt. Führt man das xy-System durch Drehung um einen Winkel φ in ein uv-System über, setzt also (Abb. 20)

$$x = u\cos\varphi+v\sin\varphi;\quad y = -u\sin\varphi+v\cos\varphi,$$

so erhält man statt (XIII; 51)

$$\begin{aligned} R^2 = {} & u^2[(\nu_1^2+\Omega_{aa})\cos^2\varphi-\Omega_{ab}\sin 2\varphi+(\nu_1^2+\Omega_{bb})\sin^2\varphi] + \\ & + uv[(\nu_1^2+\Omega_{aa})\sin 2\varphi+2\Omega_{ab}\cos 2\varphi-(\nu_1^2+\Omega_{bb})\sin 2\varphi] + \\ & + v^2[(\nu_1^2+\Omega_{aa})\sin^2\varphi+\Omega_{ab}\sin 2\varphi+(\nu_1^2+\Omega_{bb})\cos^2\varphi]. \end{aligned}$$

Diese Gleichung nimmt die Normalform

$$\frac{u^2}{U^2}+\frac{v^2}{V^2} = 1$$

an, wenn

$$\text{(XIII; 52)} \qquad \tan 2\varphi = \frac{2\Omega_{ab}}{\Omega_{bb} - \Omega_{aa}} = \sqrt{3}\,(1 - 2\mu)$$

ist. Der Winkel, um den man das $x\,y$-System im Uhrzeigersinn zu drehen hat, damit die große Achse der Bahnellipse mit der u-Richtung zusammenfällt, ist also von 30° nur wenig verschieden: Im Extremfall ($\mu \approx 1/_{26}$) würde

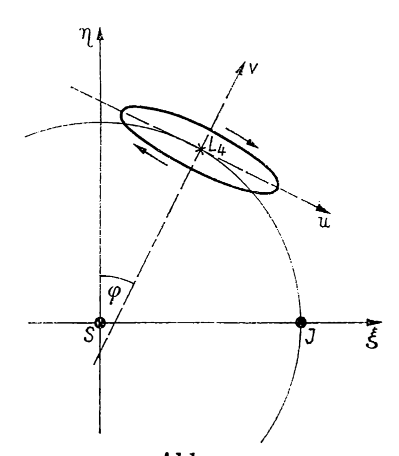


Abb. 20
Infinitesimale Librationsbahn um L_4 (Größenverhältnisse stark übertrieben)

$\varphi = 28°\,59'$ folgen. Bestimmt man φ aus (XIII; 52), so erhält man die Hauptachsen U, V der Ellipse aus

$$\text{(XIII; 53)} \quad \begin{cases} \dfrac{R^2}{U^2} = \Omega_{aa}\cos^2\varphi - \Omega_{ab}\sin 2\varphi + \Omega_{bb}\sin^2\varphi + \nu_1^2, \\[2ex] \dfrac{R^2}{V^2} = \Omega_{aa}\sin^2\varphi + \Omega_{ab}\sin 2\varphi + \Omega_{bb}\cos^2\varphi + \nu_1^2, \end{cases}$$

wobei

$$R = \frac{2\nu_1}{\sqrt{\nu_1^2 + \Omega_{bb}}}\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} = \frac{2\nu_1}{\sqrt{\nu_1^2 + \Omega_{aa}}}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}$$

ist. Sämtliche partikulären Lösungen mit der Periode p_1 bilden also eine Schar konzentrischer und koaxialer ähnlicher Ellipsen, deren Parameter durch $\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ gegeben ist. Entsprechendes gilt für die Lösungen mit der Periode p_2.

Um das Achsenverhältnis der Ellipsen zu bestimmen, setzte man in (XIII; 53)

$$\sin^2\varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}; \quad \cos^2\varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}.$$

Dann ist für $\nu = \nu_1$ oder ν_2

$$\frac{2R^2}{U^2} = \Omega_{aa} + \Omega_{bb} - (\Omega_{bb} - \Omega_{aa})\cos 2\varphi - 2\Omega_{ab}\sin 2\varphi + 2\nu^2,$$

$$\frac{2R^2}{V^2} = \Omega_{aa} + \Omega_{bb} + (\Omega_{bb} - \Omega_{aa})\cos 2\varphi + 2\Omega_{ab}\sin 2\varphi + 2\nu^2$$

oder, wenn man Ω_{ab} durch (XIII; 52) eliminiert,

$$\frac{2R^2}{U^2}\cos 2\varphi = (\Omega_{aa} + \Omega_{bb} + 2\nu^2)\cos 2\varphi - (\Omega_{bb} - \Omega_{aa}),$$

$$\frac{2R^2}{V^2}\cos 2\varphi = (\Omega_{aa} + \Omega_{bb} + 2\nu^2)\cos 2\varphi + (\Omega_{bb} - \Omega_{aa}).$$

Mit $\Omega_{aa} = 3/4$, $\Omega_{bb} = 9/4$ ergibt sich also

$$\frac{R^2}{U^2} = \nu^2 + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\sec 2\varphi\right); \quad \frac{R^2}{V^2} = \nu^2 + \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\sec 2\varphi\right)$$

und daher

$$\text{(XIII; 54)} \qquad \gamma^2 = \frac{V^2}{U^2} = \frac{\nu^2 + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\sec 2\varphi\right)}{\nu^2 + \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\sec 2\varphi\right)}.$$

Diese strenge Formel liefert das Achsenverhältnis V/U der beiden Ellipsenscharen, wenn man rechts $\nu = \nu_1$ bzw. $\nu = \nu_2$ einsetzt. Aus (XIII; 52) folgt

$$\tan^2 2\varphi = 3(1 - 2\mu)^2; \quad \sec^2 2\varphi = 1 + \tan^2 2\varphi = 4(1 - 3\mu + 3\mu^2),$$

also

$$\sec 2\varphi = 2\sqrt{1 - 3\mu(1 - \mu)} = 2\sqrt{1 - \frac{1}{9}k}.$$

Setzt man ferner nach (XIII; 46)

$$\nu_1^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - k}\right); \quad \nu_2^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - k}\right),$$

so ergibt sich für das Achsenverhältnis $\gamma = V/U$ in den beiden Fällen

$$\gamma_1^2 = \frac{1 - \frac{1}{4}\sqrt{1 - k} - \frac{3}{4}\sqrt{1 - \frac{1}{9}k}}{1 - \frac{1}{4}\sqrt{1 - k} + \frac{3}{4}\sqrt{1 - \frac{1}{9}k}},$$

$$\gamma_2^2 = \frac{1 + \frac{1}{4}\sqrt{1 - k} - \frac{3}{4}\sqrt{1 - \frac{1}{9}k}}{1 + \frac{1}{4}\sqrt{1 - k} + \frac{3}{4}\sqrt{1 - \frac{1}{9}k}}$$

oder, wenn man nach Potenzen von k entwickelt,

$$\gamma_1 = \frac{1}{3}\sqrt{k}\left(1 + \frac{5}{72}k + \cdots\right); \quad \gamma_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{24}k - \frac{11}{3456}k^2 - \cdots\right).$$

Bis auf Größen der Ordnung μ ist also

$$\gamma_1 \approx \sqrt{3\mu}; \quad \gamma_2 \approx \frac{1}{2}.$$

Für den Jupiter ($\mu = 1/1048.3$) erhält man speziell

$$\gamma_1 = \frac{1}{18.67}.$$

Es gibt also zwei Scharen von periodischen Bahnen um L_4. (Die entsprechenden um L_5 liegen ihnen symmetrisch in bezug auf die Achse Sonne–Jupiter gegenüber.) Jede dieser Scharen besteht aus konzentrischen, koaxialen und ähnlichen Ellipsen. Man pflegt sie als die *periodischen Bahnen der Familien d bzw. e* zu bezeichnen. Die Hauptachsen beider Familien fallen zusammen; die Richtung der kleinen Achsen führt vom Librationszentrum aus fast genau zur Sonne: Sie bildet mit der Richtung Sonne–Jupiter den Winkel $90° - \varphi$, der nur wenig größer als $60°$ ist. Die Bahnen der Familie d sind langgestreckt; im System Sonne–Jupiter ist die große Achse fast 19mal größer als die kleine. Die Exzentrizität dieser Bahnen ist um so größer, je kleiner das Massenverhältnis zwischen Sonne und Planet ist. Das größte Achsenverhältnis wird für $k = 1$ erreicht, d.h., wenn die Planetenmasse den größten zulässigen Wert hat. Dann ist

$$\gamma_1^2 = \frac{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2; \quad \gamma_1 = \sqrt{2} - 1 = 0.4142\ldots$$

Andererseits tritt das kleinste Achsenverhältnis $\gamma_1 = 0$ ein, wenn $k = 0$ ist, also wenn die Masse des großen Planeten so klein ist, daß sie vernachlässigt werden darf. Dann zieht sich die Ellipsenschar der Familie d auf eine kleine gerade Strecke zusammen, die auf der Verbindungsgeraden L_4–Sonne senkrecht steht (und zwar genau, da dann exakt $\varphi = 30°$ gilt) und auf der er sich wegen $\nu = 0$ unendlich langsam bewegt. Praktisch bedeutet das, daß der Planetoid im Punkt L_4 (oder in irgendeinem anderen Punkt des Einheitskreises um die Sonne) ruht, d.h. (im festen System) eine ungestörte Kreisbahn um die Sonne beschreibt.

Die Bahnen der Familie e haben Umlaufszeiten, die stets kleiner sind als die der Familie d. Wenn k gegen 0 abnimmt, strebt ν_2 gegen den Wert 1, d.h., die Umlaufszeit in der Librationsbahn nähert sich der Umlaufszeit T des Planeten. Für kleine k ist die Periode nur wenig größer als T. Für $k = 1$ wird aber $\nu_2^2 = \nu_1^2 = 1/2$, die Periode also $p_2 = p_1 = T\sqrt{2}$. In diesem Extremfall [Doppelwurzel der Gleichung (XIII; 27)] fallen beide Familien zusammen.

Im allgemeinen werden konkrete Librationsbahnen nicht einer der beiden Familien allein angehören, sondern sich gemäß (XIII; 34) aus Bestandteilen der Familien d und e zusammensetzen. Es läßt sich aber zeigen, daß für partikuläre Bewegungen, die nur einer Familie angehören, ein wichtiger Satz über die JACOBIsche Konstante gilt: Die JACOBIsche Konstante aller Bahnen der Familie d ist größer, die aller Bahnen der Familie e kleiner als 3. Das bedeutet aber, daß e-Bahnen ohne Einschränkung möglich sind, während für d-Bahnen eine HILLsche Grenzkurve existiert.

Dieser Satz läßt sich folgendermaßen beweisen: Wenn man die Gleichungen (XIII; 23) mit $\dot{x}$ bzw. $\dot{y}$ multipliziert und addiert, so erhält man die Beziehung

$$\dot{x}\,\ddot{x} + \dot{y}\,\ddot{y} = x\,\dot{x}\,\Omega_{aa} + (\dot{x}\,y + \dot{y}\,x)\,\Omega_{ab} + y\,\dot{y}\,\Omega_{bb},$$

deren Integral

$$\text{(XIII; 55)} \qquad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = x^2\Omega_{aa} + 2x\,y\,\Omega_{ab} + y^2\Omega_{bb} - (C-3)$$

lautet. Die Integrationskonstante ist hier mit $C - 3$ bezeichnet, da für einen im Librationszentrum ruhenden Körper ($x \equiv y \equiv 0$) die JACOBIsche Konstante im $\xi\,\eta$-System $C = 3$ ist. Nun folgt aber aus (XIII; 47) durch Differenzieren

$$\dot{x} = -\alpha_1\,\nu_1 \sin\nu_1 t + \alpha_2\,\nu_1 \cos\nu_1 t,$$
$$\dot{y} = -\beta_1\,\nu_1 \sin\nu_1 t + \beta_2\,\nu_1 \cos\nu_1 t,$$

also

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \nu_1^2[(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\sin^2\nu_1 t - (\alpha_1\,\alpha_2 + \beta_1\,\beta_2)\sin 2\nu_1 t + (\alpha_2^2 + \beta_2^2)\cos^2\nu_1 t].$$

Andererseits leitet man aus (XIII; 47) direkt

$$\nu_1^2(x^2 + y^2) = \nu_1^2[(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\cos^2\nu_1 t + (\alpha_1\,\alpha_2 + \beta_1\,\beta_2)\sin 2\nu_1 t + (\alpha_2^2 + \beta_2^2)\sin^2\nu_1 t]$$

ab. Mithin ist

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \nu_1^2(x^2 + y^2) = \nu_1^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2)$$

oder, wenn man das Geschwindigkeitsquadrat mittels (XIII; 55) eliminiert,

$$x^2(\nu_1^2 + \Omega_{aa}) + 2x\,y\,\Omega_{ab} + y^2(\nu_1^2 + \Omega_{bb}) = C - 3 + \nu_1^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2).$$

Vergleicht man dies mit (XIII; 51), so erhält man

$$R^2 = \frac{4\nu_1^2}{\nu_1^2 + \Omega_{bb}}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) = C - 3 + \nu_1^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2)$$

oder, wenn man $\beta_1^2 + \beta_2^2$ durch (IV), S. 132, eliminiert,

$$(C-3)\,(\nu_1^2 + \Omega_{bb}) = \nu_1^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\,[4 - (\Omega_{aa} + \Omega_{bb}) - 2\nu_1^2].$$

Für L_4 und L_5 gilt $\Omega_{aa} + \Omega_{bb} = 3$. Folglich ist

$$\text{(XIII; 56)} \quad C = 3 + \nu_1^2\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{\nu_1^2 + \Omega_{bb}}(1 - 2\nu_1^2) = 3 + \frac{1}{4}R^2(1 - 2\nu_1^2).$$

Die gleiche Formel gilt für die Familie e, wenn ν_1 mit ν_2 und α_1, α_2 mit α_3 bzw. α_4 vertauscht werden. Da aber $\nu_1^2 < 1/2$ und $\nu_2^2 > 1/2$ ist, ergibt sich aus (XIII; 56) unmittelbar die Behauptung.

In den periodischen Bahnen beider Familien ist der Umlaufssinn um L_4 bzw. L_5 stets negativ, d.h. der Bewegung der beiden endlichen Massen umeinander entgegengesetzt. Um dies zu zeigen, setzen wir, um einen bestimmten Zeitpunkt zu fixieren, $t = 0$ und erhalten dann für die Koordinaten des Ortes und der Geschwindigkeit in einer durch die Konstanten α_1, α_2 determinierten Bahn der Familie d nach (XIII; 34) und (XIII; 35)

$$\text{(XIII; 57)} \quad \begin{cases} x = \alpha_1; & \dot{x} = \alpha_2 \nu_1, \\ y = \beta_1 = \dfrac{2\alpha_2 \nu_1 - \alpha_1 \Omega_{ab}}{\nu_1^2 + \Omega_{bb}}; & \dot{y} = \beta_2 \nu_1 = -\dfrac{2\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2 \Omega_{ab}}{\nu_1^2 + \Omega_{bb}} \nu_1. \end{cases}$$

Nun sei die Zeitskala so festgelegt, daß für $t = 0$

$$y = 0; \quad x = \alpha_1 > 0$$

ist, d.h., daß zu diesem Zeitpunkt der Planetoid die x-Achse rechts vom Librationszentrum überschreitet. Dann erfolgt die Bewegung im negativen Sinn, wenn $\dot{y} < 0$ ist. Setzen wir aber in (XIII; 57) $y = 0$, so folgt

$$\alpha_2 = \alpha_1 \frac{\Omega_{ab}}{2\nu_1}; \quad 2\dot{y} = -\alpha_1 \frac{4\nu_1^2 + \Omega_{ab}^2}{\nu_1^2 + \Omega_{bb}} = -\alpha_1 (\nu_1^2 + \Omega_{aa}),$$

wenn wir noch (XIII; 50) berücksichtigen. Da diese Überlegungen für jedes Librationszentrum gelten und auch Ω_{aa} in jedem dieser Punkte positiv ist, ist dieser Satz hiermit nicht nur für L_4 und L_5, sondern auch für periodische Bahnen um L_1, L_2, L_3 bewiesen. Wir werden im übernächsten Abschnitt zeigen, daß es solche Bahnen wirklich gibt.

Zum Schluß sei daran erinnert, daß durch jeden Punkt der Umgebung von L_4 (L_5) je eine Bahn vom Typus d und vom Typus e hindurchgeht. Hat dieser Punkt die Koordinaten x_0, y_0 bezüglich des Librationszentrums, so ist nach (XIII; 43) die Bedingung dafür, daß eine von ihm aus mit der Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x}_0, \dot{y}_0$ startende Bahn dem Typus d angehört, daß also die Konstanten $\alpha_3, \alpha_4; \beta_3, \beta_4$ verschwinden, durch die Gleichungen $M_2 = N_2 = 0$ gegeben. Diese erlauben, $\dot{x}_0$ und $\dot{y}_0$ als lineare Funktionen von x_0, y_0 zu bestimmen. Ebenso ist $M_1 = N_1 = 0$ die Bedingung dafür, daß die Bahn dem Typus e angehört.

Solange $k < 1$ ist, läßt sich jede infinitesimale Bahn durch Komposition zweier periodischer Bahnen darstellen, von denen eine dem Typus d, die andere dem Typus e zugehört. Geben wir die Anfangswerte vor, so lassen sich die zugehörigen Konstanten α_i, β_i aus linearen Gleichungen eindeutig bestimmen. Dieses Verfahren versagt aber, wenn $k = 1$ ist, also die Planetenmasse den für die Existenz periodischer Librationen noch zulässigen Höchstwert annimmt. Die Gleichungen (XIII; 41), (XIII; 42) und (XIII; 43) werden dann unbrauchbar, da sie die unbestimmte Form $0 = 0$ annehmen; denn es ist ja in diesem Grenzfall $\nu_1 = \nu_2$, und es verschwinden daher alle M_i, N_i. Es gibt also an einem vorgegebenen Ort (x_0, y_0) nur noch eine einzige Geschwindigkeit $(\dot{x}_0, \dot{y}_0)$, die auf eine periodische Bahn führt. Je mehr sich k dem kritischen Wert 1 nähert, desto schwieriger wird bei beliebig vorgegebenen Anfangswerten

die Bestimmung der α_i, β_i. Ist genau $\nu_1 = \nu_2$, so folgt durch Vergleich von (XIII; 37) mit (XIII; 40), daß $M_1 = N_1 = 0$ ist, und dasselbe gilt für M_2, N_2. Es sind dann $\dot{x}_0, \dot{y}_0$ nicht mehr willkürlich, sondern durch die dann gleichlautenden Gleichungen (XIII; 40) oder (XIII; 43) als lineare Funktionen von x_0, y_0 eindeutig festgelegt.

117. *Räumliche infinitesimale Bahnen um L_4 und L_5*

Die CHARLIERsche Theorie der infinitesimalen Bahnen um die LAGRANGEschen Dreieckspunkte läßt sich unschwer auch auf räumliche Bewegungen ausdehnen. Es gelten dann die Gleichungen (XI; 88) mit (XIII; 6):

$$2\Omega = m\left(r^2 + \frac{2}{r}\right) + \mu\left(\varrho^2 + \frac{2}{\varrho}\right) - \zeta^2,$$

$$r^2 = (\xi + \mu)^2 + \eta^2 + \zeta^2; \quad \varrho^2 = (\xi - m)^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

In L_4, L_5 ($r = \varrho = 1$, $\zeta = 0$) ist dann, wie im ebenen Problem,

$$\Omega_\xi = \Omega_\eta = 0; \quad \Omega_{\xi\xi} = \frac{3}{4}, \quad \Omega_{\xi\eta} = \pm\frac{3}{4}\sqrt{3}\,(1 - 2\mu), \quad \Omega_{\eta\eta} = \frac{9}{4},$$

ferner

$$\Omega_\zeta = 0; \quad \Omega_{\xi\zeta} = \Omega_{\eta\zeta} = 0, \quad \Omega_{\zeta\zeta} = -1.$$

Setzen wir also, indem wir den Gedankengang des vorigen Abschnitts auf das räumliche Problem übertragen,

$$\xi = a + x; \quad \eta = b + y; \quad \zeta = c + z,$$

wobei $a = {}^1/_2 - \mu$, $b = \pm{}^1/_2\sqrt{3}$, $c = 0$ die Koordinaten von L_4 (L_5) bedeuten und x, y, z infinitesimale Koordinaten eines Planetoiden in bezug auf den Librationspunkt sind, so führt die TAYLORsche Entwicklung der Potentialfunktion in dieser Umgebung,

$$\Omega(a + x, b + y, c + z) =$$
$$= \Omega(a, b, c) + \frac{1}{2}\{x^2\Omega_{aa} + 2xy\Omega_{ab} + y^2\Omega_{bb} + z^2\Omega_{cc}\} + \cdots,$$

auf homogene lineare Differentialgleichungen der Form

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = x\Omega_{aa} + y\Omega_{ab},$$
$$\ddot{y} + 2\dot{x} = x\Omega_{ab} + y\Omega_{bb},$$
$$\ddot{z} \qquad = -z,$$

und man erkennt sofort, daß die beiden Differentialgleichungen für x, y dieselbe Gestalt behalten wie im ebenen Problem, so daß für ihre Lösungen alles unverändert gültig bleibt, was im vorigen Abschnitt ermittelt worden ist. Andererseits genügt z einer Differentialgleichung, deren allgemeine Lösung

$$z = \gamma_1 \cos t + \gamma_2 \sin t$$

geschrieben werden kann, wo γ_1, γ_2 zwei willkürliche infinitesimale Konstanten sind, die zu den aus der Integration der beiden ersten Gleichungen stammenden Konstanten $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2$ hinzukommen. Während also die Projektion der Bahn auf die $x\,y$-Ebene die Form der ebenen Librationsbahn behält, also als Komposition je einer elliptischen Bewegung der Familien d und e erscheint, führt die z-Koordinate eine harmonische Schwingung senkrecht zur Jupiterbahn aus. Die Periode dieser Schwingung ist gleich 2π, d.h. gleich der Umlaufszeit T des Jupiter, da ja in der Formulierung der Bewegungsgleichungen $n = 2\pi/T = 1$ als Zeiteinheit verwendet worden ist. Diese Periode hat also genau denjenigen Wert, gegen den die Librationsperiode der Familie e konvergiert, wenn die Jupitermasse gegen Null abnimmt.

Dieser Grenzfall (in dem, wie wir gesehen haben, die lange Periode der Bahnen der Familie d unendlich groß wird, d.h. die Bewegung in dieser Bahnkomponente zum Stillstand kommt) entspricht daher im festen Koordinatensystem einer ungestörten KEPLERschen Ellipse mit der Umlaufszeit T, die sich aber auf Grund unserer Annahmen beliebig wenig von derjenigen Kreisbahn unterscheidet, die ein in L_4 (oder L_5) ruhender Körper beschreibt. Die räumliche infinitesimale Bahn um das Librationszentrum läßt sich demnach, abgesehen von der langperiodischen Komponente, als eine durch Jupiter nur wenig gestörte KEPLERsche Ellipse auffassen, deren große Halbachse gleich dem Halbmesser der (als kreisförmig angenommenen) Jupiterbahn und deren mittlere Länge gleich der um 60° vermehrten (oder verminderten) Länge des Jupiter ist. Es ist interessant und aufschlußreich, die Librationsbewegung des Planetoiden unter diesem Gesichtswinkel genauer zu betrachten.

Wir nehmen zu diesem Zweck an, daß ein Planetoid in einer Bahn um die Sonne kreist, deren große Halbachse gleich der Einheit ist und deren Exzentrizität e und Neigung i sehr klein sind, so daß Quadrate dieser Größen vernachlässigt werden dürfen. Die rechtwinkligen Koordinaten dieses Körpers in einem festen heliozentrischen $x\,y\,z$-System, dessen $x\,y$-Ebene die Jupiterbahnebene ist, wird dann nach (IV; 13) durch

$$\text{(XIII; 58)} \qquad \begin{cases} x = r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y = r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z = r \sin u \sin i \end{cases}$$

gegeben sein, wo $u = \omega + v$ das Argument der Breite, v die wahre Anomalie und $r = a(1 - e\cos E)$ der Radiusvektor der Bahn ist, während ω (Perihelabstand vom Knoten) und Ω (Länge des aufsteigenden Knotens) Konstanten sind. Setzen wir $a = 1$ und ist M die mittlere Anomalie, die in der Zeit $T = 2\pi$ gleichförmig um 360° wächst, so darf man, wenn Größen von der Ordnung e^2 vernachlässigt werden, nach (VII; 64)

$$r = 1 - e\cos M$$

setzen, ferner nach (VII; 66)

$$u = \omega + v = \omega + M + 2e\sin M.$$

Setzen wir nun außerdem $\cos i = 1$, $\sin i = i$, so erhalten wir statt (XIII; 58)

$$\begin{aligned} x &= (1 - e\cos M)\cos(\Omega + \omega + M + 2e\sin M), \\ y &= (1 - e\cos M)\sin(\Omega + \omega + M + 2e\sin M), \\ z &= (1 - e\cos M)\, i\sin(\omega + M + 2e\sin M). \end{aligned}$$

In einem mit der Winkelgeschwindigkeit $n = 1$ rotierenden System ist dann

$$\begin{aligned} \xi &= x\cos M + y\sin M = (1 - e\cos M)\cos(\Omega + \omega + 2e\sin M), \\ \eta &= -x\sin M + y\cos M = (1 - e\cos M)\sin(\Omega + \omega + 2e\sin M), \\ \zeta &= z = (1 - e\cos M)\, i\sin(\omega + M + 2e\sin M). \end{aligned}$$

Wenn man die ξ-Achse so orientiert, daß $\Omega + \omega = 0$ ist, d.h., daß die positive ξ-Richtung nach dem Perihel ($M = 0$) zeigt, so ergibt sich schließlich bis auf Terme höherer Ordnung in e und i

$$\begin{aligned} \xi &= 1 - e\cos M, \\ \eta &= \phantom{1 -{}} 2e\sin M, \\ \zeta &= i\sin(\omega + M) = i\sin(M - \Omega). \end{aligned}$$

Die Projektion der Bahn auf die $\xi\eta$-Ebene ist also eine Ellipse mit dem Mittelpunkt $(1, 0)$ und dem Achsenverhältnis $2:1$, deren kleine Achse nach der Sonne zu gerichtet ist und die in der Zeit T im Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Die ζ-Koordinate führt mit derselben Periode Sinusschwingungen aus und verschwindet für $M = \Omega$ und $M = \Omega + 180°$. Verlegen wir (Abb. 21) durch eine Drehung der $\xi\eta$-Ebene den Mittelpunkt C der Ellipse nach L_4 oder L_5, so ergibt sich genau das Bild einer Librationsbahn der Familie e für den Fall, daß die Jupitermasse vernachlässigt wird.

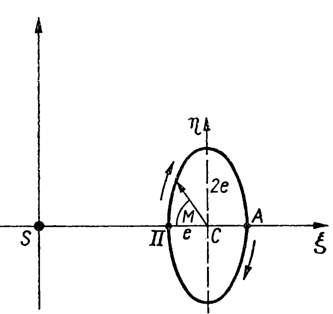


Abb. 21. Schwach exzentrische KEPLERsche Ellipse im rotierenden System
Π = Perihel; M = mittlere Anomalie

Die CHARLIERschen Bahnen der Familie e kann man daher als KEPLERsche Ellipsen im rotierenden System auffassen, die geringe Exzentrizitäten und Neigungen haben, deren große Halbachsen gleich Eins sind und die durch Jupiter geringfügige Störungen erleiden. Diese Störungen haben folgende Wirkungen: 1. Die kleine Ellipse erfährt eine geringfügige Drehung um einen Winkel, der nach (XIII; 52) für $\mu = 1/1048$ (Jupitermasse) nur $1'\!.4$ beträgt, also kaum ins Gewicht fällt. 2. Die Umlaufsperiode in der $\xi\eta$-Ebene ist ein wenig größer als T, so daß in den Formeln für ξ und η die mittlere Anomalie M durch $M - \alpha t$ zu ersetzen ist, wo α eine kleine Konstante ist. Das bedeutet, daß der Körper nicht nach einem Jupiterumlauf, sondern etwas später zu seinem Perihel zurückkehrt. Die Perihelrichtung im festen Koordinatensystem ist also nicht konstant, sondern dreht sich langsam im positiven Sinn. 3. Die Knotenlänge der Bahn erleidet keine merkliche Störung.

Wir können diese Betrachtungen über enge räumliche Librationen um die LAGRANGEschen Dreieckspunkte nicht abschließen, ohne kurz auf die Frage einzugehen, ob die Freizügigkeit dieser infinitesimalen Librationen durch HILLsche Grenzflächen im $\xi\,\eta\,\zeta$-Raum eingeschränkt wird oder nicht. In der Ebene ist für die Librationen der Familie e, wie wir bewiesen haben, $C < 3$, und es existiert für sie daher keine unüberschreitbare Grenzkurve. Im Raum gibt es dagegen immer Flächen

$$2\Omega = m\left(r^2 + \frac{2}{r}\right) + \mu\left(\varrho^2 + \frac{2}{r}\right) - \zeta^2 = C,$$

deren Lage in der Nähe der Librationszentren untersucht werden muß. Ihre Gleichung folgt unmittelbar aus (XIII; 55); denn wenn wir in ihr das Quadrat der Geschwindigkeit auf der linken Seite gleich Null setzen, so erscheint die Gleichung der Grenzkurve in der $x\,y$-Ebene in der für die unmittelbare Umgebung des Librationszentrums gültigen Form

$$x^2\Omega_{aa} + 2x\,y\Omega_{ab} + y^2\Omega_{bb} = C - 3, \tag{XIII; 59}$$

die, wie man sieht, für $C > 3$ reelle Ellipsen darstellt, deren große Achsen (für L_4 im Uhrzeigersinn) um den Winkel φ (XIII; 52) gegen die x-Achse gedreht sind. Ebenso erhält man für räumliche Librationsbewegungen HILLsche Grenz*flächen* mit der Gleichung

$$x^2\Omega_{aa} + 2x\,y\Omega_{ab} + y^2\Omega_{bb} + z^2\Omega_{cc} = C - 3, \qquad (\Omega_{cc} = -1), \tag{XIII; 60}$$

die für $C > 3$ einschalige Hyperboloide, für $C < 3$ zweischalige Hyperboloide darstellen, deren Achsen in die z-Richtung fallen. Im ersten Fall ist die Kurve (XIII; 59) die „Kehlellipse" des einschaligen Hyperboloids, dessen Inneres den verbotenen Raum für Librationsbewegungen mit der JACOBIschen Konstanten C darstellt. Im zweiten Fall ist das Innere der beiden Hyperboloidschalen für den Planetoiden unerreichbar, während die Bewegung auf der $\xi\,\eta$-Ebene, die ja die Schalen nicht schneidet, ungehindert bleibt.

Alle Hyperboloide (XIII; 60) haben einen gemeinsamen Asymptotenkegel $C = 3$, dessen Spitze in L_4 (L_5) liegt. Um die extremalen Öffnungswinkel dieses Kegels zu berechnen, setzen wir in dessen Gleichung

$$x = \bar{r}\cos\varphi; \quad y = -\bar{r}\sin\varphi$$

ein, wo φ und $\varphi - 90°$ die beiden Lösungen von (XIII; 52) sind. Der kleinste und größte Öffnungswinkel ψ des elliptischen Asymptotenkegels ist dann durch

$$\cot\psi = \frac{z}{\bar{r}} = \sqrt{\Omega_{aa}\cos^2\varphi - \Omega_{ab}\sin 2\varphi + \Omega_{bb}\sin^2\varphi}$$

gegeben. Für sehr kleines μ erhält man, wenn für L_4

$$\Omega_{aa} = \frac{3}{4}; \quad \Omega_{ab} = \frac{3}{4}\sqrt{3}\,(1 - 2\mu); \quad \Omega_{bb} = \frac{9}{4}$$

gesetzt wird, genähert

$$\cot^2\psi_1 = \frac{9}{4}\mu; \quad \cot^2\psi_2 = 3 - \frac{9}{4}\mu,$$

also bis zu Termen von der Ordnung μ

$$\psi_1 = \operatorname{arctan} \frac{2}{3\sqrt{\mu}}; \quad \psi_2 = \operatorname{arctan} \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 + \frac{3}{8}\mu\right).$$

Der Kegel hat also in der Richtung der Tangente der Jupiterbahn eine Öffnung (ψ_2) von etwa 30°, während er in der Radialrichtung (auf die Sonne zu) sehr flach ist ($\psi_1 = 87°21'$). Das gleiche gilt für die diesen Kegel umschließenden bzw. von ihm umschlossenen Hyperboloide, die HILLschen Grenzflächen.

Es braucht nicht besonders betont zu werden, daß diese Überlegungen nur für die unmittelbare Nachbarschaft der LAGRANGEschen Dreieckspunkte gelten. In der weiteren Umgebung werden die Grenzflächen merklich von der Hyperboloidform abweichen, ebenso wie ja auch in der $\xi\eta$-Ebene die HILLschen Grenzkurven nur in der Nachbarschaft von L_4 und L_5 die Gestalt der Ellipsen (XIII; 59) zeigen, in der weiteren Umgebung aber die bohnenförmigen Umrisse der gestrichelten Kurve in Abb. 19c, S. 124, annehmen.

118. *Enge Bahnen um die kollinearen Librationszentren*

Die Betrachtungen der vorigen Abschnitte lassen sich sinngemäß auch auf Bewegungen ausdehnen, die in unmittelbarer Nähe der kollinearen Librationszentren L_1, L_2, L_3 verlaufen. Die Konstanten A, B des partikulären Integrals (XIII; 24) der auch hier (mit entsprechenden Werten der partiellen Ableitungen von Ω) gültigen Differentialgleichungen (XIII; 23) folgen aus den homogenen linearen Gleichungen (XIII; 25), falls deren Eigenwert λ eine Lösung der biquadratischen Gleichung (XIII; 27) ist. Nun ist aber für L_1, L_2, L_3 nach Abschnitt 114

$$\Omega_{aa} > 0; \quad \Omega_{ab} = 0; \quad \Omega_{bb} < 0.$$

Schreiben wir daher Gleichung (XIII; 27) und ihre Lösung in der Form

$$\lambda^4 - 2p\,\lambda^2 = q; \quad \lambda^2 = p \pm \sqrt{p^2 + q}, \qquad (q = -\Omega_{aa}\Omega_{bb}),$$

so ist $q > 0$, und die beiden Wurzeln λ^2 haben verschiedene Vorzeichen. Im einzelnen findet man, wenn

$$\frac{m}{r^3} + \frac{\mu}{\varrho^3} = 2f, \qquad (m + \mu = 1)$$

gesetzt wird und r, ϱ die Abstände des Librationszentrums von den endlichen Massen sind,

$$\text{(XIII; 61)} \quad \begin{cases} \Omega_{aa} = m\left(1 + \frac{2}{r^3}\right) + \mu\left(1 + \frac{2}{\varrho^3}\right) = 1 + 4f, \\ \Omega_{bb} = m\left(1 - \frac{1}{r^3}\right) + \mu\left(1 - \frac{1}{\varrho^3}\right) = 1 - 2f < 0, \end{cases}$$

also

$$p = \frac{1}{2}(\Omega_{aa} + \Omega_{bb}) - 2 = f - 1; \quad q = -\Omega_{aa}\Omega_{bb} = 8f^2 - 2f - 1$$

und somit

$$\lambda^2 = f - 1 \pm \sqrt{9f^2 - 4f}.$$

Die vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung haben, wenn ν_1, ν_2 zwei positive Konstante sind, die Form

$$\lambda_1 = i\nu_1, \quad \lambda_2 = -i\nu_1; \quad \lambda_3 = \nu_2, \quad \lambda_4 = -\nu_2,$$

und das vollständige Integral der Bewegungsgleichungen (XIII; 23) lautet daher

$$x = A_1 e^{i\nu_1 t} + A_2 e^{-i\nu_1 t} + A_3 e^{\nu_2 t} + A_4 e^{-\nu_2 t},$$

$$y = B_1 e^{i\nu_1 t} + B_2 e^{-i\nu_1 t} + B_3 e^{\nu_2 t} + B_4 e^{-\nu_2 t}$$

oder, wenn man

$$e^{\pm i\nu_1 t} = \cos\nu_1 t \pm i \sin\nu_1 t, \quad e^{\pm\nu_2 t} = \cosh\nu_2 t \pm \sinh\nu_2 t$$

setzt,

(XIII; 62) $$\begin{cases} x = \alpha_1 \cos\nu_1 t + \alpha_2 \sin\nu_1 t + \alpha_3 \cosh\nu_2 t + \alpha_4 \sinh\nu_2 t, \\ y = \beta_1 \cos\nu_1 t + \beta_2 \sin\nu_1 t + \beta_3 \cosh\nu_2 t + \beta_4 \sinh\nu_2 t, \end{cases}$$

wo

$$\alpha_1 = A_1 + A_2, \quad \alpha_2 = i(A_1 - A_2); \quad \alpha_3 = A_3 + A_4, \quad \alpha_4 = A_3 - A_4,$$

$$\beta_1 = B_1 + B_2, \quad \beta_2 = i(B_1 - B_2); \quad \beta_3 = B_3 + B_4, \quad \beta_4 = B_3 - B_4$$

ist und die β_i Funktionen der α_i sind, und zwar ist für den periodischen Anteil von (XIII; 62) nach (XIII; 35) wegen $\Omega_{ab} = 0$

$$\beta_1 = \alpha_2 \frac{2\nu_1}{\nu_1^2 + \Omega_{bb}}; \quad \beta_2 = -\alpha_1 \frac{2\nu_1}{\nu_1^2 + \Omega_{bb}}$$

oder auch, da wegen (XIII; 26) mit $\lambda_1^2 = -\nu_1^2$

(XIII; 63) $$(\nu_1^2 + \Omega_{aa})(\nu_1^2 + \Omega_{bb}) = 4\nu_1^2$$

gilt,

$$\beta_1 = \alpha_2 \frac{\nu_1^2 + \Omega_{aa}}{2\nu_1}; \quad \beta_2 = -\alpha_1 \frac{\nu_1^2 + \Omega_{aa}}{2\nu_1}.$$

Andererseits ist für den nichtperiodischen Teil $\lambda = \pm\nu_2$ zu setzen, und man erhält nach (XIII; 32)

$$B_3 = -A_3 \frac{2\nu_2}{\nu_2^2 - \Omega_{bb}}; \quad B_4 = A_4 \frac{2\nu_2}{\nu_2^2 - \Omega_{bb}}$$

und daher

$$\beta_3 = -\alpha_4 \frac{2\nu_2}{\nu_2^2 - \Omega_{bb}}; \quad \beta_4 = -\alpha_3 \frac{2\nu_2}{\nu_2^2 - \Omega_{bb}}$$

oder, da aus (XIII; 26), wegen $\lambda_2^2 = \nu_2^2$, jetzt

(XIII; 64) $$(\nu_2^2 - \Omega_{aa})(\nu_2^2 - \Omega_{bb}) = -4\nu_2^2$$

folgt,

$$\beta_3 = \alpha_4 \frac{\nu_2^2 - \Omega_{aa}}{2\nu_2}; \quad \beta_4 = \alpha_3 \frac{\nu_2^2 - \Omega_{aa}}{2\nu_2}.$$

Die Bewegung um die kollinearen Librationszentren setzt sich also im allgemeinen aus einem periodischen und einem nichtperiodischen (exponentiellen bzw. hyperbolischen) Anteil zusammen. Sie ist daher *instabil*; denn selbst wenn zu irgendeiner Zeit die Bewegung mit den Konstanten $(\alpha_1, \alpha_2; 0, 0)$ periodisch verläuft, genügt ein geringer Anstoß (Störung), um die Bahnkonstanten in $(\alpha_1 + \delta\alpha_1, \alpha_2 + \delta\alpha_2; \delta\alpha_3, \delta\alpha_4)$ zu ändern, so daß eine exponentielle Komponente hinzutritt, die den Körper nach einer gewissen (wenn auch unter Umständen sehr langen) Zeit aus der engeren Umgebung des Librationszentrums entfernen wird. Aus demselben Grund sind die Bewegungen um die LAGRANGEschen Dreieckspunkte *stabil*, da Störungen nur die periodischen Elemente, nicht aber die Periodizität der Bewegung selbst zu ändern vermögen, sofern sie ein gewisses Maß nicht überschreiten.

Wenn wir von der Instabilität absehen und annehmen, daß die Konstanten α_3, α_4 dauernd verschwinden, so gibt es also um jedes der drei kollinearen Librationszentren eine Familie periodischer Bahnen, deren Eigenschaften wir untersuchen wollen. Wir bezeichnen die Bahnfamilie um L_1 mit a, die um L_2 mit b, die um L_3 mit c. Jede Familie besteht, ebenso wie die Familien d und e um die Dreieckspunkte, aus einer Schar konzentrischer, koaxialer und ähnlicher Ellipsen, die im negativen Sinne (s. Abschnitt 116) durchlaufen werden und deren Umlaufszeiten innerhalb jeder Familie konstant sind. Die Periode $p = T/\nu_1$ ergibt sich aus der positiven Lösung der Gleichung (XIII; 63):

(XIII; 65)
$$\nu_1^2 = -\lambda_1^2 = 1 - f + \sqrt{9f^2 - 4f}\,.$$

Die Bahnbewegung selbst erfolgt gemäß (XIII; 51), wenn dort $\Omega_{ab} = 0$ gesetzt wird, d.h., die Bahn ist eine Ellipse:

(XIII; 66)
$$\begin{cases} x^2(\nu_1^2 + \Omega_{aa}) + y^2(\nu_1^2 + \Omega_{bb}) = \dfrac{4\nu_1^2}{\nu_1^2 + \Omega_{bb}}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\,; \\ \dfrac{x^2}{U^2} + \dfrac{y^2}{V^2} = 1, \end{cases}$$

deren Achsen mit denen des $x\,y$-Systems zusammenfallen; denn wegen $\Omega_{aa} > 0$ und (XIII; 63) ist $\nu_1^2 + \Omega_{bb} > 0$. Andererseits ist wegen $\Omega_{bb} < 0$ das Achsenverhältnis

$$\gamma = \frac{V}{U} = \sqrt{\frac{\nu_1^2 + \Omega_{aa}}{\nu_1^2 + \Omega_{bb}}} > 1,$$

d.h., die große Achse steht auf der x-Achse, deren Richtung mit derjenigen der ξ-Achse des rotierenden Systems zusammenfällt, senkrecht.

Für $\mu \to 0$ strebt γ gegen gewisse Grenzwerte. Da nämlich bei sehr kleinem μ wegen (XII; 69) und (XII; 70) für L_1 und L_2 der Abstand des Librationszentrums vom Jupiter $\varrho \approx \sqrt[3]{\mu/3}$ ist, gilt dort $\mu/\varrho^3 \to 3$, außerdem $m/r^3 = (1 - \mu)/r^3 \to 1$, so daß

$$2f = \frac{m}{r^3} + \frac{\mu}{\varrho^3} \to 4$$

ist. Für L_3 hingegen gilt $\varrho \to 2$, $r \to 1$, $\mu/\varrho^3 \to 0$, $m/r^3 \to 1$, also $2f \to 1$. Nach (XIII; 61) und (XIII; 65) erhält man also für $\mu \to 0$ die Grenzwerte

$$\begin{aligned} &\Omega_{aa} \to 9; \quad \Omega_{bb} \to -3; \quad \nu_1^2 \to \sqrt{28} - 1 \quad \text{für} \quad L_1, L_2, \\ &\Omega_{aa} \to 3; \quad \Omega_{bb} \to 0; \quad \nu_1^2 \to 1 \quad \text{für} \quad L_3. \end{aligned}$$

Der Grenzwert des Achsenverhältnisses ist also

$$\begin{aligned} &\gamma \to \sqrt{\frac{\sqrt{28} + 8}{\sqrt{28} - 4}} \approx 3.208 \quad \text{für} \quad L_1, L_2, \\ &\gamma \to \sqrt{4} = 2 \quad \text{für} \quad L_3, \end{aligned}$$

und die Grenzwerte der Perioden sind, wenn T die Dauer des Jupiterumlaufs bedeutet,

$$\begin{aligned} p = \frac{T}{\nu_1} &\to 0.4827\,T \quad \text{für} \quad L_1, L_2, \\ p &\to T \quad \text{für} \quad L_3. \end{aligned}$$

Damit ist folgendes gezeigt:

1. Die periodischen Librationsbahnen um L_3 gehen – ebenso wie die Bahnen der kurzperiodischen Librationen um L_4, L_5 – für $\mu \to 0$ in schwach exzentrische KEPLERsche Ellipsen über, deren Umlaufszeiten gleich der des Jupiter sind. Das war nach den Überlegungen des vorigen Abschnitts auch ohne Rechnung zu erwarten.

2. Für die periodischen Librationen um L_1, L_2 gilt das nicht; denn obwohl die Librationszentren für $\mu \to 0$ in den Ort des Jupiter hineinrücken, gehen diese Librationsbewegungen keineswegs in die für das rotierende System charakteristischen Bahnkurven über, die den schwach exzentrischen KEPLERschen Ellipsen mit der Umlaufszeit T entsprechen und die Form kleiner Ellipsen mit dem Achsenverhältnis 2:1 und der Umlaufszeit T haben; vielmehr ist hier das Achsenverhältnis > 3 und die Umlaufszeit $< T/2$. Daß hier ganz andere Grenzwerte auftreten, ist verständlich. Da die Potentialfunktion Ω für den Ort des Jupiter unendlich groß wird, also an dieser Stelle eine Singularität besitzt, ist der Bereich um die jupiternahen Librationszentren, in denen Ω_x, Ω_y durch die rechten Seiten von (XIII; 23) genau genug dargestellt werden, sehr klein gegen den Abstand des Librationszentrums vom Planeten, also um so kleiner, je näher das Librationszentrum an den Jupiterort heranrückt. Ein Planetoid, der in L_1 oder L_2 verharrt, ist als ein Satellit des Jupiter aufzufassen, dessen siderische Umlaufszeit gleich der des Jupiter um die Sonne ist und der also – vom Jupiter aus gesehen – beständig als „Neumond" (L_1) bzw. „Vollmond" (L_2) erscheint. Die periodischen Librationen der Familien a und b sind somit als kleine periodische Störungen der Kreisbewegung dieses Satelliten aufzufassen, deren Perioden im rotierenden System für $\mu \to 0$ dem Grenzwert 0.4827 T zustreben und deren Amplituden stets klein gegen den Abstand Jupiter–Satellit bleiben.

Die nichtperiodischen Bahnen um die kollinearen Librationszentren haben in der unmittelbaren Umgebung dieser Punkte die Form von Hyperbeln:

$$\text{(XIII; 67)} \qquad \begin{cases} x = \alpha_3 \cosh \nu_2 t + \alpha_4 \sinh \nu_2 t, \\ y = \beta_3 \cosh \nu_2 t + \beta_4 \sinh \nu_2 t, \end{cases}$$

wobei nach S. 143 unten

$$\text{(XIII; 68)} \qquad \beta_3 = k\,\alpha_4, \quad \beta_4 = k\,\alpha_3; \quad k = \frac{\nu_2^2 - \Omega_{aa}}{2\nu_2} = -\frac{2\nu_2}{\nu_2^2 - \Omega_{bb}} < 0$$

gesetzt werden muß. Diese Gleichungen haben, wenn man den Parameter t eliminiert, die Gestalt

$$\text{(XIII; 69)} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1.$$

Aus (XIII; 67) erhält man nämlich, wenn a und b zwei zunächst willkürliche Konstante bedeuten und wenn man die β_i durch (XIII; 68) eliminiert,

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = (b^2 \alpha_3^2 - a^2 k^2 \alpha_4^2) \cosh^2 \nu_2 t + 2\alpha_3 \alpha_4 (b^2 - a^2 k^2) \cosh \nu_2 t \sinh \nu_2 t + \\ + (b^2 \alpha_4^2 - a^2 k^2 \alpha_3^2) \sinh^2 \nu_2 t.$$

Bestimmt man nun a und b durch die Festsetzung

$$b = \pm a\,k; \quad a^2 = |\alpha_3^2 - \alpha_4^2|,$$

so erhält man

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = b^2 (\alpha_3^2 - \alpha_4^2)(\cosh^2 \nu_2 t - \sinh^2 \nu_2 t) = b^2 (\alpha_3^2 - \alpha_4^2),$$

d.h. (XIII; 69). Das Vorzeichen auf der rechten Seite dieser Gleichung ist durch das Vorzeichen der Differenz $\alpha_3^2 - \alpha_4^2$ bestimmt. Die Kurven bilden also eine Schar ähnlicher, koaxialer Hyperbeln und der zu ihnen konjugierten Hyperbeln, deren gemeinsamer Mittelpunkt im Librationszentrum liegt. Ist $\alpha_3^2 > \alpha_4^2$, so fällt die reelle Achse der Hyperbeln mit der x-Achse zusammen. Dagegen fällt sie in die y-Achse, wenn $\alpha_3^2 < \alpha_4^2$ ist. Beide Scharen haben die gemeinsamen Asymptoten $b^2 x^2 = a^2 y^2$ mit den Richtungskonstanten $b/a = \pm k$.

Besonderes Interesse verdient hier der Fall der nichtperiodischen Bahnen in der Nachbarschaft von L_3. In L_3 ist nach (XII; 73) bis auf Terme der Ordnung μ^3

$$r = 1 - \frac{7}{12}\mu + \cdots; \quad \varrho = 2\left(1 - \frac{7}{24}\mu + \cdots\right)$$

und daher mit der gleichen Genauigkeit

$$2f = \frac{1-\mu}{r^3} + \frac{\mu}{\varrho^3} = 1 + \frac{7}{8}\mu + \frac{77}{192}\mu^2 + \cdots,$$

$$\Omega_{aa} = 1 + 4f = 3 + \frac{7}{4}\mu + \cdots; \quad \Omega_{bb} = 1 - 2f = -\frac{7}{8}\mu + \cdots.$$

Nun ist $\lambda^2 = \nu_2^2$ die positive Lösung von (XIII; 27), d.h.

$$\nu_2^2 = f - 1 + \sqrt{9f^2 - 4f} = \frac{21}{8}\,\mu - \frac{119}{64}\mu^2 + \cdots.$$

Damit ergibt sich die Richtungskonstante der Asymptoten, $\pm k$, mit

$$k = \frac{\nu_2^2 - \Omega_{aa}}{2\nu_2} = -\sqrt{\frac{6}{7\mu}}\left(1 - \frac{\mu}{16} + \cdots\right).$$

Im Falle Jupiter ($\mu = 1/1048$) erhält man also, wenn man sich auf das Hauptglied beschränkt, bis auf einen Fehler von nur 0.06 ‰,

$$k = -\sqrt{898.2} = -29.97.$$

Die Asymptoten schließen also mit der y-Achse sehr kleine Winkel ($\pm 1°\,54'.7$) ein. Es gibt somit eine Schar sehr flacher Hyperbeln, deren Scheitel auf der x-Achse liegen, und eine dazu konjugierte Schar sehr spitzer Hyperbeln, die mit der x-Achse keine Schnittpunkte haben.

Um die Richtung festzustellen, in welcher der Planetoid die Hyperbeln durchläuft, setzen wir für die Bewegung in der ersten Schar $\alpha_3^2 > \alpha_4^2 = 0$, also

$$x = \pm\alpha_3 \cosh \nu_2 t; \quad y = \pm\alpha_3\, k \sinh \nu_2 t,$$

wo α_3 ein positiver Parameter ist. Da

$$\dot{y} = \pm\alpha_3\, k\, \nu_2 \cosh \nu_2 t = k\, \nu_2\, x$$

und $k < 0$ ist, folgt, daß die Bewegung auf dem rechten Ast ($x > 0$) von oben nach unten ($\dot{y} < 0$), auf dem linken ($x < 0$) dagegen von unten nach oben ($\dot{y} > 0$) verläuft. Setzt man für die Bewegung in der konjugierten Schar, deren reelle Achse auf der Verbindung Sonne–Jupiter senkrecht steht, $\alpha_4^2 > \alpha_3^2 = 0$, so erhält man, wenn $\alpha_4 > 0$ ist,

$$x = \pm\alpha_4 \sinh \nu_2 t; \quad y = \pm\alpha_4\, k \cosh \nu_2 t$$

und

$$\dot{x} = \pm\alpha_4\, \nu_2 \cosh \nu_2 t = \frac{\nu_2}{k}\, y.$$

Auf dem oberen Ast ($y > 0$) verläuft also die Bewegung von rechts nach links ($\dot{x} < 0$), auf dem unteren ($y < 0$) von links nach rechts ($\dot{x} > 0$). In Abb. 22 ist dieser Befund, der weiter unten (bei der Diskussion der Trojanerbewegung, Abschnitt 120) noch nützliche Aufschlüsse ermöglichen wird, schematisch wiedergegeben.

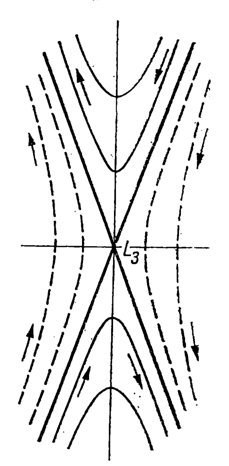


Abb. 22 Nichtperiodische infinitesimale Bahnen um L_3

Entsprechende Regeln gelten für die nichtperiodischen Bewegungen in der unmittelbaren Umgebung von L_1 und L_2. Es sei dem Leser überlassen, mit Hilfe der dort gültigen Zahlenwerte für $f, \Omega_{aa}, \Omega_{bb}, \nu_2$ diese Regeln zu bestätigen.

Zum Abschluß mögen noch einige Bemerkungen über die JACOBIsche Konstante in diesen drei Fällen (periodische Bahnen, Hyperbeln, konjugierte

Hyperbeln) hinzugefügt werden. Wir begnügen uns hier mit einer heuristischen Überlegung. Im Librationszentrum L_3, das wir diesen Betrachtungen zugrunde legen wollen, ist $2\Omega_3 > 3$ der Wert der Potentialfunktion, die an dieser Stelle die Gestalt eines Sattels hat. In der infinitesimalen Umgebung von L_3 hat die Schnittkurve $C = 2\Omega_3$ die Gestalt zweier sich schneidender Geraden, nämlich der Asymptoten der beiden konjugierten Hyperbelscharen. Ist C etwas größer als $2\Omega_3$, so ist die Schnittfigur eine Hyperbel der ersten Schar (Scheitel auf der x-Achse), ist C etwas kleiner als $2\Omega_3$, so ist sie eine Hyperbel der konjugierten Schar (Scheitel auf der y-Achse). Die verbotenen Gebiete, in denen eine Bewegung mit der JACOBIschen Konstanten C nicht stattfinden kann, sind diejenigen Teile der Ebene, in denen $2\Omega < C$ ist. Diese Gebiete sind in Abb. 23 für die drei Fälle $C \gtreqless 2\Omega_3$ schraffiert gezeichnet. Hieraus folgt sofort, daß eine periodische Bewegung (Familie c) um L_3 nur möglich ist, wenn $C < 2\Omega_3$ ist. Die hyperbolische Bewegung mit Scheitel auf der x-Achse ist immer möglich, aber für $C > 2\Omega_3$ nur, wenn die reelle Halbachse a größer ist als ein Minimalwert, der $C - 2\Omega_3$ proportional ist. Hyperbeln der konjugierten Schar sind nur dann mögliche Bahnformen, wenn $C < 2\Omega_3$ ist, und zwar ist die reelle Halbachse dann notwendig kleiner als ein $2\Omega_3 - C$ proportionaler Maximalwert.

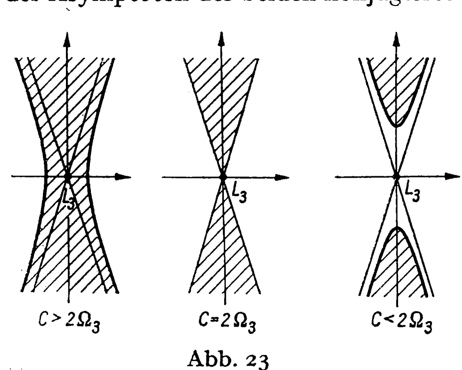


Abb. 23
Verbotene Gebiete in der Umgebung von L_3

Entsprechende Regeln gelten auch für die Bewegungen in der Umgebung von L_1 und L_2.

119. *Periodische Bahnen um die kollinearen Librationszentren. Theorie von* PLUMMER

Daß die CHARLIERsche Theorie der Librationsbewegungen um die fünf LAGRANGEschen Punkte nur eine erste und praktisch unzureichende Lösung des Problems darstellt, macht sich namentlich im Falle der langperiodischen Librationen um L_4 und L_5 unliebsam bemerkbar, also gerade in dem besonders interessanten Fall der Trojanerbewegung. Es zeigt sich nämlich, daß die meisten Planetoiden der Jupitergruppe sehr weite Schwankungen um die LAGRANGEschen Dreieckspunkte der Jupiterbahn ausführen, so daß hier die Voraussetzung der CHARLIERschen Theorie, daß die Librationsamplituden klein gegen die Längeneinheit sind, auch nicht annähernd erfüllt ist. H.C. PLUMMER[1]) hat als erster einen Versuch unternommen, die Theorie durch Mitnahme höherer Glieder in der Entwicklung der rechten Seiten der Differentialgleichungen

[1]) H. C. PLUMMER, M.N. *62*, 6 (1901); M.N. *63*, 436 (1903); M.N. *64*, 98 (1904).

(XIII; 23) zu erweitern, beschränkt sich aber auf den mathematisch einfacheren Fall der periodischen Librationen um die kollinearen Zentren L_1, L_2, L_3. Später hat H.R. WILLARD[1]) dieses Verfahren auf die Librationsbahnen der Familie e, also die kurzperiodischen Schwankungen um L_4 und L_5, ausgedehnt. Obwohl auch diese Untersuchungen keine Schlüsse auf die Form der Bahnen bei beliebig großer Amplitude erlauben, geben sie doch wertvolle Aufschlüsse darüber, wie sich Bahnformen und Perioden ändern, wenn man von unendlich kleinen Librationen auf solche übergeht, bei denen niedrige Potenzen der Abstände vom Librationszentrum nicht mehr vernachlässigt werden dürfen. Wir beschränken uns hier darauf, die PLUMMERschen Ergebnisse wiederzugeben, die sich auf Bahnen der Familien a, b und c beziehen und die qualitativ, d.h. in bezug auf wesentliche Eigenschaften der Bahnen, auch für die übrigen Familien gelten.

Für die numerischen Werte, die von den partiellen Ableitungen der Potentialfunktion $\Omega(\xi, \eta)$ in einem Librationszentrum $\xi = a$, $\eta = b$ angenommen werden, führen wir jetzt die Bezeichnungen

$$\Omega_{mn} = \frac{\partial^{m+n}\Omega}{\partial \xi^m \partial \eta^n}, \qquad (\xi = a, \eta = b)$$

ein, so daß an die Stelle der früher benutzten Bezeichnungen die neuen

$$\Omega(a, b) = \Omega_{00}; \quad \Omega_a = \Omega_{10}, \quad \Omega_b = \Omega_{01}; \quad \Omega_{aa} = \Omega_{20}, \quad \Omega_{ab} = \Omega_{11}, \quad \Omega_{bb} = \Omega_{02}; \quad \ldots$$

treten. Die Entwicklungen (XIII; 23) lauten dann vollständiger

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = x\Omega_{20} + y\Omega_{11} + \frac{1}{2}(x^2\Omega_{30} + 2xy\Omega_{21} + y^2\Omega_{12}) + \frac{1}{6}(x^3\Omega_{40} + 3x^2y\Omega_{31} + 3xy^2\Omega_{22} + y^3\Omega_{13}) + \cdots,$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = x\Omega_{11} + y\Omega_{02} + \frac{1}{2}(x^2\Omega_{21} + 2xy\Omega_{12} + y^2\Omega_{03}) + \frac{1}{6}(x^3\Omega_{31} + 3x^2y\Omega_{22} + 3xy^2\Omega_{13} + y^3\Omega_{04}) + \cdots.$$

Im Falle der kollinearen Librationszentren ist $b = 0$, und man erhält für diese Punkte $\Omega_{mn} = 0$, wenn n ungerade ist. Da nämlich $\Omega(\xi, \eta)$ in bezug auf die ξ-Achse symmetrisch verläuft, enthält die Entwicklung dieser Funktion um $\xi = a$, $\eta = b$ nach Potenzen von $x = \xi - a$, $y = \eta - b$ nur gerade Potenzen von y, und es verschwinden daher in der Entwicklung

$$\Omega(x, y) = \Omega_{00} + x\Omega_{10} + y\Omega_{01} + \frac{1}{2}(x^2\Omega_{20} + 2xy\,\Omega_{11} + y^2\Omega_{02}) + \cdots$$

außer Ω_{10}, Ω_{01}, die wegen der Extremalbedingung Null sind, auch alle Ω_{mn}, die mit ungeraden Potenzen von y multipliziert sind.

---

[1]) H. R. WILLARD, M.N. *73*, 471 (1913).

Für L_1, L_2, L_3 lauten die Gleichungen (XIII; 23) also einfacher

$$\text{(XIII; 70)} \quad \begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = x\Omega_{20} + \frac{1}{2}(x^2\Omega_{30} + y^2\Omega_{12}) + \frac{1}{6}(x^3\Omega_{40} + \\ \qquad + 3xy^2\Omega_{22}) + \cdots, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = y\Omega_{02} + xy\Omega_{12} + \frac{1}{6}(3x^2y\Omega_{22} + y^3\Omega_{04}) + \cdots. \end{cases}$$

Ferner ist klar, daß die Bahnen $x(t), y(t)$ zur x-Achse symmetrisch verlaufen und daher die Form

$$\text{(XIII; 71)} \quad \begin{cases} x = a_0 + a_1 \cos\nu t + a_2 \cos 2\nu t + a_3 \cos 3\nu t + \cdots, \\ y = \qquad b_1 \sin\nu t + b_2 \sin 2\nu t + b_3 \sin 3\nu t + \cdots \end{cases}$$

haben, wenn der Zeitpunkt $t = 0$ so festgesetzt wird, daß in ihm der Planetoid die x-Achse überschreitet. Schließlich ist aus der CHARLIERschen Theorie bekannt, daß (XIII; 71) in

$$x = a_1 \cos\nu t; \quad y = b_1 \sin\nu t$$

übergeht, wenn die Amplitude so klein ist, daß zweite und höhere Potenzen von a_1, b_1 bzw. eines in ihnen enthaltenen Parameters α unter der Genauigkeitsschwelle bleiben. Es ist daher vernünftig anzunehmen, daß a_0, a_2, b_2 von der zweiten, a_3, b_3 von der dritten, allgemein (für $n > 0$) a_n, b_n von der n-ten Ordnung in bezug auf den Parameter sind. Entwickelt man unter dieser Annahme die Ausdrücke $x^2, xy, y^2; x^3, \ldots$ in (XIII; 70) mit Hilfe von (XIII; 71) bis zur dritten Ordnung einschließlich und benutzt die Beziehungen

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi); \quad \sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi);$$

$$2\sin n\varphi \cos m\varphi = \sin(n+m)\varphi + \sin(n-m)\varphi$$

usw., um Potenzen und Produkte der trigonometrischen Funktionen in Funktionen der Vielfachen des Arguments νt umzuwandeln, so erhält man nach elementarer Rechnung Entwicklungen der Form

$$\text{(XIII; 72)} \quad \begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = A_0 + A_1 \cos\nu t + A_2 \cos 2\nu t + \cdots, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = \qquad B_1 \sin\nu t + B_2 \sin 2\nu t + \cdots. \end{cases}$$

Andererseits ist aber, wenn man die beiden ersten Ableitungen von (XIII; 71) benutzt,

$$\text{(XIII; 73)} \quad \begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = -(a_1\nu^2 + 2b_1\nu)\cos\nu t - 4(a_2\nu^2 + b_2\nu)\cos 2\nu t - \cdots, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = -(b_1\nu^2 + 2a_1\nu)\sin\nu t - 4(b_2\nu^2 + a_2\nu)\sin 2\nu t - \cdots. \end{cases}$$

Wegen der Identität der rechten Seiten von (XIII; 72) und (XIII; 73) ist aber

$$A_0 = 0; \quad A_1 + a_1\nu^2 + 2b_1\nu = 0; \quad A_2 + 4a_2\nu^2 + 4b_2\nu = 0; \quad \ldots,$$

$$B_1 + b_1\nu^2 + 2a_1\nu = 0; \quad B_2 + 4b_2\nu^2 + 4a_2\nu = 0;$$

Setzt man die Ausdrücke, die man nach dem oben geschilderten Verfahren für die A_i, B_i gefunden hat, ein, so erhält man, bis zur dritten Ordnung einschließlich, folgende sieben Gleichungen:

$$(\text{XIII}; 74)\quad \begin{cases} \text{(a)} \quad 0 = \Omega_{20}\, a_0 + \frac{1}{4}(\Omega_{30}\, a_1^2 + \Omega_{12}\, b_1^2), \\ \text{(b)} \quad 0 = (\nu^2 + \Omega_{20})\, a_1 + 2\nu\, b_1 + L, \\ \text{(c)} \quad 0 = (4\nu^2 + \Omega_{20})\, a_2 + 4\nu\, b_2 + \frac{1}{4}(\Omega_{30}\, a_1^2 - \Omega_{12}\, b_1^2), \\ \text{(d)} \quad 0 = (9\nu^2 + \Omega_{20})\, a_3 + 6\nu\, b_3 + P, \\ \text{(e)} \quad 0 = (\nu^2 + \Omega_{02})\, b_1 + 2\nu\, a_1 + M, \\ \text{(f)} \quad 0 = (4\nu^2 + \Omega_{02})\, b_2 + 4\nu\, a_2 + \frac{1}{2}\Omega_{12}\, a_1\, b_1, \\ \text{(g)} \quad 0 = (9\nu^2 + \Omega_{02})\, b_3 + 6\nu\, a_3 + Q, \end{cases}$$

in denen unter L, M, P, Q diejenigen Größen dritter Ordnung

$$(\text{XIII}; 75)\quad \begin{cases} L = \frac{1}{2}\Omega_{30}\, a_1(2a_0 + a_2) + \frac{1}{2}\Omega_{12}\, b_1\, b_2 + \frac{1}{8} a_1(\Omega_{40}\, a_1^2 + \Omega_{22}\, b_1^2), \\ M = \frac{1}{2}\Omega_{12}(2a_0\, b_1 + a_1\, b_2 - a_2\, b_1) + \frac{1}{8} b_1(\Omega_{22}\, a_1^2 + \Omega_{04}\, b_1^2), \\ P = \frac{1}{2}\Omega_{30}\, a_1\, a_2 - \frac{1}{2}\Omega_{12}\, b_1\, b_2 + \frac{1}{24} a_1(\Omega_{40}\, a_1^2 - 3\Omega_{22}\, b_1^2), \\ Q = \frac{1}{2}\Omega_{12}(a_1\, b_2 + a_2\, b_1) + \frac{1}{24} b_1(3\Omega_{22}\, a_1^2 - \Omega_{04}\, b_1^2) \end{cases}$$

zusammengefaßt sind, die a_3, b_3 nicht enthalten.

Aus (XIII; 74) lassen sich $a_0, a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3$ als Funktionen von ν berechnen, während ν aus dem JACOBIschen Integral

$$V^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = 2(\Omega - \Omega_{00}) + C_0 - C$$

folgt. Hier bedeutet $2\Omega_{00} = C_0$ den Wert, den 2Ω im Librationszentrum annimmt; denn dort ist ja $C = C_0$ und $V = 0$. Da aber

$$-\dot{\xi} = \nu\, a_1 \sin\nu t + 2\nu\, a_2 \sin 2\nu t + 3\nu\, a_3 \sin 3\nu t + \cdots,$$
$$\dot{\eta} = \nu\, b_1 \cos\nu t + 2\nu\, b_2 \cos 2\nu t + 3\nu\, b_3 \cos 3\nu t + \cdots$$

ist, erhält man bis zur vierten Ordnung einschließlich

$$(\text{XIII}; 76)\quad V^2 = \nu^2 \left[\frac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2) + 2(a_2^2 + b_2^2) + \cdots\right] + \langle\text{periodische Glieder}\rangle.$$

Ferner ist, für L_1, L_2, L_3 als Ausgangspunkt der Entwicklung,

$$2\Omega = 2\Omega_{00} + \Omega_{20}\,x^2 + \Omega_{02}\,y^2 + \frac{1}{3}\,\Omega_{30}\,x^3 + \Omega_{12}\,x\,y^2 + \frac{1}{12}\,\Omega_{40}\,x^4 + \\ + \frac{1}{2}\,\Omega_{22}\,x^2\,y^2 + \frac{1}{12}\,\Omega_{04}\,y^4 + \cdots$$

oder, wenn man die Ausdrücke $x^m\,y^n$ nach (XIII; 71) bildet,

(XIII; 77)

$$2(\Omega - \Omega_{00}) = \frac{1}{2}\,(\Omega_{20}\,a_1^2 + \Omega_{02}\,b_1^2) + R + \cdots + \langle\text{periodische Glieder}\rangle.$$

Dabei enthält R die konstanten Glieder vierter Ordnung:

$$R = \frac{1}{2}\,\Omega_{20}(2\,a_0^2 + a_2^2) + \frac{1}{2}\,\Omega_{02}\,b_2^2 + \frac{1}{4}\,\Omega_{30}\,a_1^2(2\,a_0 + a_2) + \\ + \frac{1}{4}\,\Omega_{12}\,b_1(2\,a_0\,b_1 + 2\,a_1\,b_2 - a_2\,b_1) + \frac{1}{32}\,\Omega_{40}\,a_1^4 + \\ + \frac{1}{16}\,\Omega_{22}\,a_1^2\,b_1^2 + \frac{1}{32}\,\Omega_{04}\,b_1^4,$$

die man auch, wenn man (XIII; 74a, c, f) und (XIII; 75) benutzt, in der Form

(XIII; 78) $$R = \frac{1}{4}\,(a_1 L + b_1 M) - 4\nu\,a_2\,b_2 - 2\,\nu^2(a_2^2 + b_2^2)$$

schreiben kann. Das JACOBIsche Integral nimmt dann die Gestalt

(XIII; 79) $$0 = C_0 - C + \frac{1}{2}\,a_1^2(\Omega_{20} - \nu^2) + \frac{1}{2}\,b_1^2(\Omega_{02} - \nu^2) + N + \cdots$$

an, wo $N = R - 2\,\nu^2(a_2^2 + b_2^2)$ die Summe der Glieder vierter Ordnung darstellt. In (XIII; 79) sind also Glieder von höherer als vierter Ordnung unterdrückt; periodische Terme treten dagegen nicht auf, da ja $C - C_0$ eine Konstante ist: Die periodischen Glieder in (XIII; 76) und (XIII; 77) sind identisch und fallen bei der Differenzbildung heraus.

Die CHARLIERsche Theorie folgt aus den Gleichungen (XIII; 74b, e) und (XIII; 79), wenn man die Terme dritter Ordnung L, M, N vernachlässigt. Die homogenen Gleichungen (XIII; 74b, e) erfordern dann das Verschwinden ihrer Determinante:

(XIII; 80) $$(\nu^2 + \Omega_{20})\,(\nu^2 + \Omega_{02}) - 4\,\nu^2 = 0.$$

Sind a_1, b_1 klein von der ersten Ordnung, so sind nach (XIII; 74a, c, f) a_0, a_2, b_2 von der zweiten und nach (XIII; 74d, g) a_3, b_3 von der dritten Ordnung. Wenn man also nach CHARLIER auf Glieder höherer als erster Ordnung ver-

zichtet, so nimmt die Bahngleichung die Form (XIII; 71a) an, und es ist, übereinstimmend mit den Ergebnissen von Abschnitt 118, nach (XIII; 74b, e)

(XIII; 81) $$\frac{b_1}{a_1} = -\frac{\nu^2 + \Omega_{20}}{2\nu} = -\frac{2\nu}{\nu^2 + \Omega_{02}}$$

und damit nach (XIII; 80)

(XIII; 81a) $$\frac{b_1^2}{a_1^2} = \frac{\nu^2 + \Omega_{20}}{\nu^2 + \Omega_{02}}.$$

Ist also α ein Bahnparameter, so gilt für die Hauptachsen der infinitesimalen Bahnellipsen

(XIII; 82) $$a_1 = \alpha \sqrt{\nu^2 + \Omega_{02}}; \quad b_1 = \alpha \sqrt{\nu^2 + \Omega_{20}},$$

wo $b_1 > a_1$ die Länge der auf der ξ-Achse senkrecht stehenden Halbachse ist. Setzt man diese Werte in (XIII; 79) ein, so ergibt sich das JACOBIsche Integral in der Form

(XIII; 83) $$C - C_0 = \alpha^2(\Omega_{20}\Omega_{02} - \nu^4), \quad (\Omega_{02} < 0 < \Omega_{20}),$$

aus der noch einmal das schon in Abschnitt 118 gefundene Ergebnis sichtbar wird, daß für die periodischen Bahnen um die kollinearen Librationszentren die JACOBIsche Konstante stets kleiner ist als $C_0 = 2\Omega_{00}$, d.h. als der doppelte Betrag der Potentialfunktion an diesen ausgezeichneten Stellen.

Will man nun die Theorie durch Hinzunahme der Terme zweiter Ordnung erweitern, so bleiben die Gleichungen (XIII; 80) und (XIII; 82) unverändert, da die Beziehungen (XIII; 74b, e), aus denen sie folgen, außer den Termen erster Ordnung nur noch solche der dritten enthalten. Insbesondere *scheint* also der Satz zu gelten: Sofern Terme dritter Ordnung vernachlässigt werden dürfen, ist die Periode $p = T/\nu$ der Bewegung für jede der drei Familien konstant, d.h., die Bewegung ist für alle Werte des Parameters α innerhalb gewisser Grenzen *tautochron*. Aus den Gleichungen (XIII; 74a, c, f) erhält man sodann a_0, a_2, b_2 als Funktionen von a_1, b_1, ν:

(XIII; 84) $$\begin{cases} \Delta \cdot a_2 = 2\nu\Omega_{12}\, a_1 b_1 - \frac{1}{4}(4\nu^2 + \Omega_{02})(\Omega_{30}\, a_1^2 - \Omega_{12}\, b_1^2), \\ \Delta \cdot b_2 = \nu(\Omega_{30}\, a_1^2 - \Omega_{12}\, b_1^2) - \frac{1}{2}(4\nu^2 + \Omega_{20})\,\Omega_{12}\, a_1 b_1 \end{cases}$$

mit

$$\Delta = (4\nu^2 + \Omega_{20})(4\nu^2 + \Omega_{02}) - 16\nu^4.$$

Läßt man jetzt auch die Glieder dritter Ordnung zu, so sind die Gleichungen (XIII; 74b, e) nicht mehr homogen. Die Bedingung (XIII; 80) für ν gilt dann nicht, ist vielmehr ausgeschlossen. Die aus (XIII; 80) und (XIII; 82) folgenden Werte a_1, b_1, ν sind um kleine Größen δa_1, δb_1, $\delta \nu$ zu verbessern, um den

Einfluß von L, M, N in (XIII; 74b, e) bzw. (XIII; 79) in Rechnung zu ziehen. Durch Variation dieser Gleichungen erhält man das System

$$\text{(XIII; 84a)} \left\{\begin{aligned} (\nu^2 + \Omega_{20})\,\delta a_1 + 2\nu\,\delta b_1 + 2(\nu\,a_1 + b_1)\,\delta\nu + L &= 0, \\ 2\nu\,\delta a_1 + (\nu^2 + \Omega_{02})\,\delta b_1 + 2(\nu\,b_1 + a_1)\,\delta\nu + M &= 0, \\ (\Omega_{20} - \nu^2)\,a_1\,\delta a_1 + (\Omega_{02} - \nu^2)\,b_1\,\delta b_1 - \nu(a_1^2 + b_1^2)\,\delta\nu + N &= 0 \end{aligned}\right.$$

zur Bestimmung von $\delta a_1, \delta b_1, \delta\nu$. Die ersten beiden dieser Gleichungen zeigen, daß δa_1 und δb_1 von der dritten Ordnung sind, $\delta\nu$ aber von der zweiten Ordnung ist. Die dritte Gleichung (XIII; 84a) erfordert den Term vierter Ordnung N, da in ihr δa_1 und δb_1 mit Faktoren erster Ordnung behaftet sind, $\delta\nu$ aber mit einem Faktor zweiter Ordnung.

Benutzt man die Beziehungen (XIII; 81) und (XIII; 81a):

$$\nu^2 + \Omega_{20} = -2\nu\frac{b_1}{a_1}; \quad \nu^2 + \Omega_{02} = -2\nu\frac{a_1}{b_1},$$
$$a_1^2 = \alpha^2(\nu^2 + \Omega_{02}); \quad b_1^2 = \alpha^2(\nu^2 + \Omega_{20}),$$

so erhalten die Gleichungen (XIII; 84a) die Form

$$-2\nu\left(\frac{\delta a_1}{a_1} - \frac{\delta b_1}{b_1}\right) + 2\delta\nu\left(1 + \nu\frac{a_1}{b_1}\right) + \frac{L}{b_1} = 0,$$
$$2\nu\left(\frac{\delta a_1}{a_1} - \frac{\delta b_1}{b_1}\right) + 2\delta\nu\left(1 + \nu\frac{b_1}{a_1}\right) + \frac{M}{a_1} = 0,$$
$$(\Omega_{20} - \nu^2)(\Omega_{02} + \nu^2)\frac{\delta a_1}{a_1} + (\Omega_{20} + \nu^2)(\Omega_{02} - \nu^2)\frac{\delta b_1}{b_1} -$$
$$- \nu(2\nu^2 + \Omega_{20} + \Omega_{02})\,\delta\nu + \frac{N}{\alpha^2} = 0,$$

woraus sich unmittelbar

$$2\delta\nu\left[\nu\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{b_1}{a_1}\right) + 2\right] = -\left(\frac{L}{b_1} + \frac{M}{a_1}\right),$$
$$4\nu\left(\frac{\delta a_1}{a_1} - \frac{\delta b_1}{b_1}\right) = 2\nu\,\delta\nu\left(\frac{a_1}{b_1} - \frac{b_1}{a_1}\right) + \left(\frac{L}{b_1} - \frac{M}{a_1}\right),$$
$$(\Omega_{20}\Omega_{02} - \nu^4)\left(\frac{\delta a_1}{a_1} + \frac{\delta b_1}{b_1}\right) = -\nu^2(\Omega_{20} - \Omega_{02})\left(\frac{\delta a_1}{a_1} - \frac{\delta b_1}{b_1}\right) +$$
$$+ \nu\,\delta\nu(2\nu^2 + \Omega_{20} + \Omega_{02}) - \frac{N}{\alpha^2}$$

ergibt. Nach (XIII; 81) ist aber

$$2\nu\left(\frac{a_1}{b_1} - \frac{b_1}{a_1}\right) = \Omega_{20} - \Omega_{02},$$
$$2\nu\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{b_1}{a_1}\right) + 4 = -\frac{1}{\nu^2}[2\nu^4 + \nu^2(\Omega_{20} + \Omega_{02}) - 4\nu^2]$$

oder, da nach (XIII; 80) $\nu^2(\Omega_{20} + \Omega_{02}) - 4\nu^2 = -(\nu^4 + \Omega_{20}\Omega_{02})$ ist,

$$2\nu\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{b_1}{a_1}\right) + 4 = -\frac{1}{\nu^2}(\nu^4 - \Omega_{20}\Omega_{02}).$$

Setzt man daher

$$\frac{\delta a_1}{a_1} - \frac{\delta b_1}{b_1} = \delta u; \quad \frac{\delta a_1}{a_1} + \frac{\delta b_1}{b_1} = \delta v,$$

so erhält man schließlich

$$\text{(XIII; 84b)} \quad \begin{cases} \delta\nu(\nu^4 - \Omega_{20}\Omega_{02}) = \nu^2\left(\dfrac{L}{b_1} + \dfrac{M}{a_1}\right), \\ 4\nu\,\delta u = \delta\nu(\Omega_{20} - \Omega_{02}) + \dfrac{L}{b_1} - \dfrac{M}{a_1}, \\ \delta v(\nu^4 - \Omega_{20}\Omega_{02}) = \nu^2\,\delta u(\Omega_{20} - \Omega_{02}) - \\ \qquad - \nu\,\delta\nu(2\nu^2 + \Omega_{20} + \Omega_{02}) + \dfrac{N}{\alpha^2} \end{cases}$$

zur Bestimmung von $\delta\nu$, δu, δv und

$$\delta a_1 = \frac{1}{2}a_1(\delta v + \delta u); \quad \delta b_1 = \frac{1}{2}b_1(\delta v - \delta u).$$

Die Koeffizienten a_3, b_3 findet man sodann aus (XIII; 74d, g).

Setzt man in den Formeln die für das jeweilige Librationszentrum gültigen numerischen Werte der partiellen Ableitungen Ω_{mn} ein, so kann man feststellen, in welcher Weise sich die elliptischen Librationsbahnen deformieren, wenn man von unendlich kleinen Amplituden zu größeren übergeht. Man findet, da a_0 von Null um Terme zweiter Ordnung abweicht, daß der Bahnmittelpunkt aus dem Librationszentrum herausrückt, ferner, daß die Ellipsen ihre Symmetrie in bezug auf die y-Achse verlieren und allmählich eine bohnenartig verkrümmte Gestalt annehmen.

Aus der ersten Gleichung (XIII; 84b) bestätigt man, daß $\delta\nu$ von der zweiten Ordnung ist, wenn a_1, b_1 von der ersten Ordnung sind; denn es sind ja L und M von der dritten Ordnung. Daraus folgt aber, daß die oben ausgesprochene Vermutung, die Librationsbewegungen seien tautochron, wenn Terme der dritten Ordnung vernachlässigt werden dürfen, einer Berichtigung bedarf: In Wirklichkeit würde er nur dann gelten, wenn L, M von der vierten Ordnung wären, was aber offensichtlich nicht zutrifft. Die Periode kleiner Librationen hat also, wenn α ein Scharparameter von der Größenordnung der Amplituden ist, die Form

$$P = P_0 + \alpha^2 P_2 + \cdots,$$

wo P_0 die Periode T/ν der infinitesimalen Bahnen darstellt. Wir werden am Schluß des nächsten Abschnitts zeigen, daß dasselbe auch für die Librationen um L_4 und L_5, insbesondere für die langperiodischen „Trojanerbahnen“ (Familie d), gilt.

120. *Die Bewegung der Trojaner. Theorie von E. W. Brown*

Die im vorigen Abschnitt entwickelte Theorie ist nur von geringem praktischem Interesse. Sie ist hier bis zu dem Punkt durchgeführt worden, daß, nach Einsetzen der numerischen Werte Ω_{mn} für die kollinearen Librationszentren, die Berechnung der Koeffizienten a_i, b_i der FOURIERschen Reihen (XIII; 71) bis zur dritten Ordnung möglich ist. Wir werden uns an anderer Stelle daran erinnern: Die hier ermittelten Bahnen stellen spezielle periodische Lösungen des „problème restreint" dar, deren allgemeine Theorie in Kapitel XIX ausführlicher behandelt werden soll. So sind die periodischen Bahnen um L_3 durch Jupiter gestörte, im rotierenden System periodische, schwach exzentrische Bahnen vom Kommensurabilitätstypus 1:1, die so beschaffen sind, daß die mittlere Länge des Planetoiden gleich der um 180° vermehrten oder verminderten Länge des Planeten (Jupiter) ist und deren Koordinaten nunmehr bis zu Gliedern von der Ordnung e^3 hingeschrieben werden können; denn wir haben ja in Abschnitt 117 bewiesen, daß die Librationsamplituden im rotierenden System von der Ordnung der Exzentrizität der ungestörten KEPLERschen Ellipse sind, aus der diese Bahn durch Berücksichtigung der Jupiterstörungen hervorgeht. Ebenso lassen sich mit Hilfe der Formeln des Abschnitts 119 die periodischen Störungen von Satelliten, deren siderische Umlaufszeit gleich der des Planeten ist, bis zur dritten Ordnung entwickeln. Hier werden die PLUMMERschen Ergebnisse geeignet sein, umfassendere Satellitentheorien an gewissen speziellen Fällen zu prüfen.

Der erste Versuch, auch die langperiodischen Bahnen der Familie d um L_4 bzw. L_5 genauer zu diskutieren, als dies auf Grund der CHARLIERschen Untersuchungen möglich ist, wurde von E. W. BROWN unternommen.[1]) Er beschränkte sich dabei von vornherein auf den praktisch besonders wichtigen Fall, daß das Massenverhältnis $\mu/(1-\mu)$ der beiden endlichen Massen klein von der Ordnung 10^{-3} ist (im Falle Sonne–Jupiter ist ja $\mu = 1/1048.3$).

Die CHARLIERsche Theorie hat gelehrt, daß (bei Beschränkung auf Librationen mit sehr kleiner Amplitude) die Bahnen der Familie d Ellipsen um L_4 (L_5) als Mittelpunkt mit folgenden Eigenschaften sind:

1. Das Achsenverhältnis ist klein, es beträgt (bis auf Glieder höherer Ordnung in μ) $\sqrt{3\mu}:1$. Im Fall Jupiter ist es angenähert $1:19$.

2. Die kleine Achse der Librationsellipse zeigt fast genau in die Richtung nach der Sonne, die Bewegung selbst erfolgt also bis auf geringfügige Abweichungen längs der Tangente des Einheitskreises um die Sonne (Jupiterbahn).

3. Die Periode der Librationsbewegung ist lang, sie beträgt angenähert $2T/3\sqrt{3\mu}$, wenn T die siderische Umlaufszeit des Planeten ist, im Fall Jupiter also rund $12.4T = 148$ Jahre. Die mittlere Geschwindigkeit in der Bahn, die angenähert gleich der heliozentrischen Winkelgeschwindigkeit ist, ist also proportional $\alpha\sqrt{\mu}$, wenn α die Librationsamplitude vertritt. Selbst wenn man annimmt, daß die Librationsperiode auch für endliche Amplituden konstant

---

[1]) E. W. BROWN, M.N. *71*, 438 (1911).

bleibt, werden Bahn- und Winkelgeschwindigkeit immer noch klein von der Ordnung $\sqrt{\mu}$ bleiben, da α dann von der Ordnung 1 ist. In Wirklichkeit nimmt die Periode mit wachsendem α noch zu, und zwar anfänglich um ein Glied proportional α^2, so daß (ebenso wie bei den Librationen um L_1, L_2 und L_3) die Bewegung tautochron ist, wenn Terme von höherer Ordnung in α vernachlässigt werden dürfen. Der Beweis für diese nach den Ergebnissen des vorigen Abschnitts einleuchtende Behauptung läßt sich in entsprechender Weise führen. Die oben ausgesprochene Abschätzung, daß die Bahngeschwindigkeit V im rotierenden System auch bei großen Librationsamplituden von der Ordnung $\sqrt{\mu}$ bleibt, wird also erst recht gelten. Aus dem JACOBIschen Integral

$$V^2 = 2\Omega - C$$

folgt daher, daß längs der ganzen Bahn der Ausdruck $2\Omega - C$ von der Ordnung μ ist und stellenweise auch von höherer Ordnung sein kann. Die Bahn selbst wird also von der HILLschen Grenzkurve

$$2\Omega - C = 0$$

nirgends sehr abweichen. Jede Bahn der Familie d wird sich somit eng um die zugehörige, d. h. mit dem gleichen Wert der JACOBIschen Konstante gebildete, HILLsche Grenzkurve (Nullgeschwindigkeitskurve) anschließen, und zwar wird die Bahn die Grenzkurve *umschließen*, da deren Inneres ja „verbotenes Gebiet" darstellt.

Für infinitesimale Bahnen läßt sich dies unmittelbar bestätigen. Die Bahn ist eine Ellipse um L_4 (für L_5 gilt Entsprechendes) als Mittelpunkt mit der Gleichung (XIII; 51):

$$\text{(XIII; 85)} \qquad x^2(\nu^2 + \Omega_{20}) + 2xy\Omega_{11} + y^2(\nu^2 + \Omega_{02}) = R^2 = \frac{4\nu^2}{\nu^2 + \Omega_{02}}\alpha^2,$$

wo $\nu = T/p$ die zu der langen Librationsperiode p gehörige Frequenz ist und α einen von den Anfangsbedingungen abhängigen und der Elongation der Librationsbahn proportionalen Scharparameter bedeutet. Andererseits hat die zugehörige HILLsche Grenzkurve nach (XIII; 55) und (XIII; 56) die Gleichung

$$\text{(XIII; 86)} \qquad x^2\Omega_{20} + 2xy\Omega_{11} + y^2\Omega_{02} = C - 3 = \frac{1}{4}R^2(1 - 2\nu^2).$$

Beide Kurven sind koaxiale Ellipsen: Schreibt man ihre Gleichungen in der gemeinsamen Form

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = \varrho^2,$$

so kann man sie durch Drehung um einen Winkel φ in die Normalform

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1$$

überführen, wobei nach (XIII; 52) $\tan 2\varphi = 2\Omega_{11}/(\Omega_{02} - \Omega_{20})$ in beiden Fällen denselben Wert für φ liefert. Für die beiden Halbachsen a, b erhält man dann

$$a^2 = \frac{2\varrho^2}{a_{11} + a_{22} - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}};$$

$$b^2 = \frac{2\varrho^2}{a_{11} + a_{22} + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}.$$

Mit den für L_4 gültigen Werten der partiellen Ableitungen der Potentialfunktion

$$\Omega_{20} = \frac{3}{4}; \quad \Omega_{11} = \frac{3}{4}\sqrt{3}\,(1 - 2\mu); \quad \Omega_{02} = \frac{9}{4}$$

und dem für die langperiodische Libration gültigen Eigenwert (XIII; 46)

$$\nu_1^2 = \frac{1}{4}k + \frac{1}{16}k^2 + \cdots = \frac{27}{4}\mu\left(1 + \frac{23}{4}\mu + \cdots\right)$$

folgt für die Halbachsen der Bahnkurve, bis zu Gliedern von der Ordnung μ,

(XIII; 87) $$a = \frac{2\alpha}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{3}{4}\mu\right); \quad b = 2\alpha\sqrt{\mu},$$

für die Halbachsen der Hillschen Grenzkurve aber

$$a = \frac{2\alpha}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{21}{4}\mu\right); \quad b = \alpha\sqrt{\mu}.$$

Die großen Achsen beider Ellipsen sind also, bis auf Terme von der Ordnung μ, einander gleich, während die kleine Achse der Bahnkurve etwa doppelt so groß ist wie die der Grenzkurve. Das war auch zu erwarten. Die Bahnbewegung, eine harmonische Bewegung in einer langgestreckten Ellipse, geht ja so vor sich, daß das Maximum der Geschwindigkeit an den Endpunkten der kleinen Achse, das Minimum an den Endpunkten der großen Achse erreicht wird. Dort, in den „größten Elongationen", findet eine Umkehr in der Bewegung in Länge statt; die Geschwindigkeit ist dort fast Null, die Bahnkurve berührt also nahezu die Grenzkurve. An den Endpunkten der kleinen Achse, von der Sonne aus gesehen beim Vorübergang am Librationszentrum, ist dagegen die Geschwindigkeit des Planetoiden und daher auch der Abstand der Bahn von der Nullgeschwindigkeitskurve am größten. Auf das gleiche Ergebnis führt die Untersuchung der Geschwindigkeit V als Funktion des Abstandes vom Librationszentrum mit Hilfe des Jacobischen Integrals, das wir in der Form

$$V^2 = 2(\Omega - \Omega_{00}) - (C - 3)$$

schreiben. Entwickeln wir Ω um L_4 und bedenken, daß dort

$$\Omega_{00} = 3; \quad \Omega_{10} = \Omega_{01} = 0$$

ist, so erhalten wir, bis zu Gliedern zweiter Ordnung in x, y genau,

$$V^2 = x^2\Omega_{20} + 2xy\Omega_{11} + y^2\Omega_{02} - (C-3) =$$
$$= R^2 - \nu^2(x^2+y^2) - \frac{1}{4}R^2(1-2\nu^2),$$

wobei $C - 3$ durch (XIII; 86) ausgedrückt wurde. Nun ist aber $x^2 + y^2$ das Quadrat des Abstandes des Planetoiden von L_4, das zwischen den Quadraten der beiden Halbachsen eingeschlossen ist. Nach (XIII; 87) ist also genähert

$$4\alpha^2\mu \leqq x^2 + y^2 \leqq \frac{4}{3}\alpha^2\left(1 - \frac{3}{2}\mu\right).$$

Daher liegt V^2 zwischen den Grenzen

$$V^2_{\min} = \frac{3}{4}R^2 - \frac{4}{3}\alpha^2\nu^2\left(1 - \frac{3}{2}\mu\right) + \frac{1}{2}R^2\nu^2 \approx 27\alpha^2\mu^2,$$

$$V^2_{\max} = \frac{3}{4}R^2 - 4\alpha^2\mu\nu^2 + \frac{1}{2}R^2\nu^2 \approx 9\alpha^2\mu,$$

und es gilt, bis zu Gliedern von der Ordnung μ genau,

$$3\sqrt{3}\,\alpha\mu \leqq V \leqq 3\alpha\sqrt{\mu}.$$

Die mittlere und maximale Geschwindigkeit ist also proportional $\alpha\sqrt{\mu}$, die minimale proportional $\alpha\mu$.

E. W. BROWN hat in der oben zitierten Untersuchung bewiesen, daß diese an den infinitesimalen Bahnen demonstrierten Eigenschaften der langperiodischen Librationen im wesentlichen auch für Bahnen beliebiger Amplitude der Familie *d* gelten. Insbesondere läßt sich zeigen, daß

(XIII; 88) { die Bahnkurven die zugehörigen HILLschen Grenzkurven eng umschließen,
in den größten Elongationen die Annäherung an die Grenzkurve von der Ordnung μ ist,
die kleinsten Abstände vom Librationszentrum etwa doppelt so groß wie die der Grenzkurve und von der Ordnung $\sqrt{\mu}$ sind.

Die HILLschen Grenzkurven haben die Gleichungen

$$C = 2\Omega = (1-\mu)\left(r^2 + \frac{2}{r}\right) + \mu\left(\varrho^2 + \frac{2}{\varrho}\right),$$

wo r den Abstand von der Sonne, ϱ den Abstand vom Jupiter bedeuten. In L_4 und L_5 ist, da $r = \varrho = 1$ ist, $C = 3$. In L_3, also gültig für die durch diesen Punkt gehende Grenzkurve (die den Übergang von den geschlossenen Grenzkurven um L_4 und L_5 zu den beide Zentren gemeinsam umschließenden hufeisenförmigen Kurven bildet), ist, bis zu Termen von der Ordnung μ, $r = 1 - {}^7/_{12}\mu$ und $\varrho = 2 - {}^7/_{12}\mu$. Entwickelt man mit diesen Werten den obigen

Ausdruck nach Potenzen von μ, so erhält man $C = 3 + 2\mu + \cdots$, und es ist also für die Familie der Trojanerbahnen

$$3 < C < 3 + 2\mu.$$

Für diesen Bereich der JACOBIschen Konstante läßt sich zeigen, daß sich die HILLsche Grenzkurve eng an den Einheitskreis $r = 1$ anschmiegt und daß $r - 1$ von der Ordnung $\sqrt{\mu}$ ist. Setzt man nämlich $r = 1 + \varepsilon$, so erhält man für die Gleichung der Grenzkurve, wenn $2/r$ bis zur Ordnung ε^2 entwickelt wird,

$$C = (1 - \mu)\,[(1 + \varepsilon)^2 + 2(1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \cdots)] + \mu\left(\varrho^2 + \frac{2}{\varrho}\right).$$

Wir werden weiter unten (S. 164) beweisen, daß ϱ zwischen den Grenzen 0.414 und 2 eingeschlossen bleibt und die Funktion $f(\varrho) = \varrho^2 + 2/\varrho$ Werte annehmen kann, die zwischen 3 und 5 liegen. Es ist also für die Grenzkurven der Trojanerbahnen

$$C = 3(1 - \mu)\,(1 + \varepsilon^2 + \cdots) + \mu\, f(\varrho) = 3 + \delta,$$

wobei $0 < \delta < 2\mu$ ist. Daraus folgt aber, daß ε^2 von der Ordnung μ, also ε von der Ordnung $\sqrt{\mu}$ sein muß.

Da also r von der Einheit nur um Größen der Ordnung $\sqrt{\mu}$ abweicht, wird es vorteilhaft sein, statt der rechtwinkligen Koordinaten ξ, η Polarkoordinaten r, φ mit dem Koordinatenursprung in der Sonne und der Anfangsrichtung $\varphi = 0$ in der Richtung Sonne–Jupiter zu benutzen. Die Differentialgleichungen

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \Omega_\xi; \quad \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = \Omega_\eta$$

transformieren sich dann in

$$\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2 - 2r\,\dot{\varphi} = \Omega_r, \tag{XIII; 89}$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\,\dot{\varphi} + r^2) = \Omega_\varphi, \tag{XIII; 90}$$

und diese haben das JACOBIsche Integral

$$V^2 = \dot{r}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2 = 2\Omega - C, \qquad (3 < C < 3 + 2\mu). \tag{XIII; 91}$$

Da die Bewegung nahezu (bis auf Abweichungen von der Ordnung $\sqrt{\mu}$) auf dem Einheitskreis vor sich geht, ist

$$V = r\,\dot{\varphi} + \langle\text{Glieder höherer Ordnung}\rangle,$$

also $\dot{\varphi}$, ebenso wie V, von der Ordnung $\sqrt{\mu}$. Aus (XIII; 91) folgt dann aber, daß $\dot{r}$ von höherer Ordnung als $\sqrt{\mu}$ ist. Es liegt daher die noch zu bestätigende Annahme nahe, daß

$$r - 1,\ \dot{\varphi} \text{ von der Ordnung } \sqrt{\mu},$$
$$\dot{r},\ \ddot{\varphi} \text{ von der Ordnung } \mu,$$
$$\ddot{r},\ \dddot{\varphi} \text{ von der Ordnung } \mu\sqrt{\mu} \text{ usw.}$$

sein werden. Ist μ genügend klein, so wird man also an Stelle von (XIII; 89) und (XIII; 91), indem man Glieder der höchsten Ordnung unterdrückt, die genäherten Beziehungen

$$r\,\dot{\varphi}^2 + 2r\,\dot{\varphi} = -\Omega_r, \tag{XIII; 92}$$

$$r^2\,\dot{\varphi}^2 = 2\Omega - C \tag{XIII; 93}$$

setzen dürfen. Diese sind aber integrabel; denn eliminiert man $\dot{\varphi}$ aus ihnen, so folgt eine Beziehung

$$f(r, \varphi) = 0,$$

die als (genäherte) Bahngleichung anzusehen ist. Eliminiert man dagegen r, so ergibt sich

$$\dot{\varphi} = g(\varphi),$$

woraus

$$dt = \frac{d\varphi}{g(\varphi)}; \quad t - t_0 = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{g(\varphi)}$$

und damit φ als Funktion der Zeit folgt. Mit Hilfe dieser genäherten Lösung wird es dann möglich sein, die vernachlässigten Größen $\dot{r}, \ddot{r}, \ddot{\varphi}$ in (XIII; 89) und (XIII; 90) als Funktionen der Zeit zu berechnen und damit eine genauere Lösung des Systems zu erzielen.

Hier mag es genügen, den ersten Schritt dieses Verfahrens auszuführen. Aus

$$2\Omega = (1-\mu)\left(r^2 + \frac{2}{r}\right) + \mu\left(\varrho^2 + \frac{2}{\varrho}\right) \tag{XIII; 94}$$

und $\varrho^2 = 1 + r^2 - 2r\cos\varphi$ erhält man

$$\left\{\begin{aligned}
\Omega_r &= (1-\mu)\left(r - \frac{1}{r^2}\right) + \mu\left(1 - \frac{1}{\varrho^3}\right)(r - \cos\varphi),\\
\Omega_\varphi &= \mu\left(1 - \frac{1}{\varrho^3}\right) r\sin\varphi,\\
\Omega_{rr} &= (1-\mu)\left(1 + \frac{2}{r^3}\right) + \mu\left(1 + \frac{2}{\varrho^3}\right) - \frac{3\mu}{\varrho^5}\sin^2\varphi,\\
\Omega_{r\varphi} &= \mu\left(1 - \frac{1}{\varrho^3}\right)\sin\varphi + \frac{3\mu}{\varrho^5} r\sin\varphi(r - \cos\varphi),\\
\Omega_{\varphi\varphi} &= \mu\left(1 - \frac{1}{\varrho^3}\right) r\cos\varphi + \frac{3\mu}{\varrho^5} r^2\sin^2\varphi.
\end{aligned}\right. \tag{XIII; 95}$$

Nach (XIII; 89) ist streng

$$(\dot{\varphi} + 1)^2 = \frac{1}{r}(\ddot{r} - \Omega_r + r). \tag{XIII; 96}$$

Die Ableitung von (XIII; 96) und die Differentialgleichung (XIII; 90) bilden das System

$$\text{(XIII; 97)}\quad \begin{cases} 2(\dot\varphi + 1)\,\ddot\varphi = -\dot r\,\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\,\Omega_r\right) - \dfrac{1}{r}\,\Omega_{r\varphi}\,\dot\varphi + \\ \qquad + \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\ddot r}{r}\right), \\ r^2\,\ddot\varphi = \Omega_\varphi - 2r\,\dot r\,(\dot\varphi + 1), \end{cases} \qquad \begin{matrix} \text{(I)} \\ \\ -r^2 \\ \\ +2(\dot\varphi + 1) \end{matrix}$$

aus dem man durch Multiplikation mit den Faktoren (I) $\ddot\varphi$ eliminiert. Es ist dann, wenn noch $(\dot\varphi + 1)^2$ durch (XIII; 96) ausgedrückt wird,

$$4r\,\dot r\,(\dot\varphi + 1)^2 = 4\,\dot r\,(\ddot r - \Omega_r + r) =$$
$$= 2(\dot\varphi + 1)\,\Omega_\varphi + r^2\,\dot r\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Omega_r}{r}\right) + r\,\dot\varphi\,\Omega_{r\varphi} - r^2\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\ddot r}{r}\right).$$

Vernachlässigt man hierin Glieder mit $\dot r\,\ddot r$ und $\dddot r$ und setzt man

$$r^2\,\dot r\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Omega_r}{r}\right) = r^2\,\dot r\left(\frac{1}{r}\,\Omega_{rr} - \frac{1}{r^2}\,\Omega_r\right) = r\,\dot r\,\Omega_{rr} - \dot r\,\Omega_r,$$

so ergibt sich

$$\text{(XIII; 98)}\qquad \dot r = \frac{2(\dot\varphi + 1)\,\Omega_\varphi + r\,\dot\varphi\,\Omega_{r\varphi}}{4r - 3\Omega_r - r\,\Omega_{rr}}.$$

Nun lehren aber die Formeln (XIII; 95), daß für $r \approx 1$, bis auf Glieder der Ordnung $\sqrt{\mu}$,

$$\Omega_r \approx 0; \quad \Omega_{rr} \approx 3$$

ist, während Ω_φ, $\Omega_{r\varphi}$, $\Omega_{\varphi\varphi}$, also alle partiellen Ableitungen von Ω nach φ, von der Ordnung μ sind. Aus (XIII; 98) folgt daher, daß $\dot r$ von der Ordnung μ ist; denn der Nenner des Bruches ist ungefähr gleich der Einheit, und zwar gilt dies nicht nur für kleine $\dot\varphi$. In ähnlicher Weise läßt sich zeigen, daß $\ddot r$ von der Ordnung $\mu\sqrt{\mu}$ ist.

Diese Abschätzung verliert ihre Gültigkeit, wenn ϱ und damit auch φ sehr klein ist. Wäre nämlich ϱ von der Ordnung $\mu^{1/3} \approx 0.1$, so würden μ/ϱ^3 und $\mu \sin^2\varphi/\varrho^5$ nicht sehr von der Einheit abweichen, und die obigen Abschätzungen wären dann nicht mehr richtig. Daß dieser Fall aber nicht zu befürchten ist, läßt sich leicht zeigen; denn die folgenden Überlegungen werden beweisen, daß für alle Trojanerbahnen die schon weiter oben vorbehaltlich dieses Beweises benutzte Ungleichung

$$\text{(XIII; 99)}\qquad 0.414 = \sqrt{2} - 1 < \varrho < 2$$

gilt. Größere Annäherungen des Planetoiden an Jupiter sind also bei allen periodischen Bahnen der Familie d ausgeschlossen.

Vernachlässigt man $\ddot r$ und $\dot r^2$, also Terme von höherer Ordnung als μ, so gelten die Gleichungen (XIII; 92) und (XIII; 93). In den größten Elongationen, wo $\dot\varphi = 0$ ist, gilt dann auch $\Omega_r = 0$ und $2\Omega - C = 0$, d. h., der Fahr-

strahl tangiert die Nullgeschwindigkeitskurve; Bahn und Nullgeschwindigkeitskurve berühren sich an diesen Stellen, genauer gesagt, sie nähern sich einander bis auf sehr kleine Abstände. Zwischen den Elongationen entfernt sich die Bahnkurve von der zugehörigen HILLschen Grenzkurve, oder – anders ausgedrückt – sie wird zwischen zwei Grenzkurven mit den JACOBIschen Konstanten C und $C' > C$ eingeschlossen sein. Während sie die Kurve $2\Omega = C$ in den Elongationen ($\Omega_r = 0$) berührt, wird sie die Kurve $2\Omega = C'$ berühren, wo $\Omega_\varphi = 0$ ist. Das tritt aber nach (XIII; 95) ein, wenn $\varrho = 1$ oder $\varphi = \pi$ ist, da ja $\varphi = 0$ ausgeschlossen ist. Diejenige HILLsche Grenzkurve, deren größte Elongation für $\varphi = \pi$ eintritt, geht aber, wie wir wissen, durch L_3 und entspricht dem Übergang von den um L_4 geschlossenen (bohnenförmigen) Kurven zu den hufeisenförmigen. Auch diesen Fall dürfen wir, als den äußersten Grenzfall des Trojanerproblems, vorläufig ausschließen. Beschränken wir uns auf die Nullgeschwindigkeitskurven der eigentlichen Trojanerbahnen, so bleibt $\varrho = 1$ als einziges Kriterium dafür, daß $\Omega_\varphi = 0$ ist. An diesen Stellen tangiert die Bahn die Grenzkurve $2\Omega = C'$ von innen; sie hat dort (nahezu) ihre größte Annäherung an L_4, gleichzeitig hat dort $|r - 1|$ sein Maximum.

Um die Gestalt der Bahnkurven wenigstens annähernd zu bestimmen, ist es notwendig,

1. die Positionen φ_1 und φ_2 der größten Elongationen,
2. die Extrema von $r - 1$

zu kennen. Die Gleichungen (XIII; 93) und (XIII; 92) ergeben, wenn 2Ω und Ω_r nach (XIII; 94) und (XIII; 95) eingesetzt werden,

$$\text{(XIII; 100)} \qquad r^2\dot{\varphi}^2 = (1-\mu)\left(r^2 + \frac{2}{r}\right) + \mu\left(\varrho^2 + \frac{2}{\varrho}\right) - C,$$

$$\text{(XIII; 101)} \qquad r^2\dot{\varphi}^2 + 2r^2\dot{\varphi} = -(1-\mu)\left(r^2 - \frac{1}{r}\right) + \mu\left(1 - \frac{1}{\varrho^3}\right) r(r - \cos\varphi).$$

An den größten Elongationen ist $\dot{\varphi} = 0$, also

$$\text{(XIII; 102)} \qquad (1-\mu)\left(r^2 + \frac{2}{r}\right) + \mu\left(\varrho^2 + \frac{2}{\varrho}\right) = C,$$

$$\text{(XIII; 103)} \qquad \frac{1}{r} - r^2 + \mu\left[r^2 - \frac{1}{r} + \left(1 - \frac{1}{\varrho^3}\right) r(r - \cos\varphi)\right] = 0.$$

Für die Trojanerbahn mit den größtmöglichen Elongationen ist $C = 3 + 2\mu$. Nun folgt aber aus (XIII; 103), daß an den größten Elongationen, bis auf Glieder von der Ordnung μ, $r = 1$ gesetzt werden darf. Für die Extremwerte von ϱ gilt also nach (XIII; 102)

$$3(1-\mu) + \mu\left(\varrho^2 + \frac{2}{\varrho}\right) = 3 + 2\mu$$

oder

$$\varrho^3 - 5\varrho + 2 = 0,$$

eine Gleichung, die drei reelle Wurzeln, nämlich

$$\varrho = 2; \quad \varrho = -1 \pm \sqrt{2},$$

besitzt. Da aber ϱ als Distanz wesentlich positiv ist, gelten hier nur die beiden Lösungen

$$\varrho_1 = \sqrt{2} - 1 = 0.414, \quad \varrho_2 = 2$$

als genäherte Extremwerte von ϱ. Der Extremwert $\varrho = 2$ entspricht (bis auf Abweichungen von der Ordnung μ) dem Librationszentrum L_3, während $\varrho = 0.414$ als das absolute Minimum der Distanz Planetoid–Jupiter anzusehen ist und dem Positionswinkel $\varphi_1 = 23{,}^\circ 9$ entspricht; denn wegen $r = 1$ ist an diesem Extremum der Bahn

$$\sin \frac{\varphi_1}{2} = \frac{\varrho_1}{2} = 0.207.$$

Die Funktion $f(\varrho) = \varrho^2 + 2/\varrho$, deren Minimum $f = 3$ für $\varrho = 1$ erreicht wird, nimmt für $\varrho = 2$ und $\varrho = \sqrt{2} - 1$ den Maximalwert 5 an, so daß also die auf S. 160 bereits benutzte Abschätzung $3 \leqq f(\varrho) \leqq 5$ gilt.

Für die HILLsche Grenzkurve $2\Omega - C = 0$ gilt, wenn für 2Ω der Wert (XIII; 94) eingesetzt wird, die Gleichung (XIII; 102), also für die Grenzkurve der äußersten Trojanerbahn $C = 3 + 2\mu$ und für $\varrho = 1$,

$$(1 - \mu)\left(r^2 + \frac{2}{r}\right) + \mu - 3 = 0.$$

Setzen wir $r = 1 + \varepsilon$, so ist genähert $1/r = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \cdots$, also, wenn Glieder dritter und höherer Ordnung in ε unterdrückt werden,

$$(1 - \mu)(3 + 3\varepsilon^2) = 3 - \mu; \quad \varepsilon^2 = \frac{2}{3}\frac{\mu}{1 - \mu} \approx \frac{2}{3}\mu,$$

$$\varepsilon = \pm\sqrt{\frac{2\mu}{3}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1572}} \approx \pm\frac{1}{40}.$$

Diese Grenzkurve ist also zwischen den Kreisen $r = 1 \pm \sqrt{2\mu/3}$ eingeschlossen. Um eine entsprechende Abschätzung für den Verlauf der zugehörigen Bahnkurve, also für die äußerste Trojanerbahn selbst, vorzunehmen, eliminieren wir $\sigma = r\dot{\varphi}$ aus (XIII; 100) und (XIII; 101), indem wir wiederum $\varrho = 1$ und $C = 3 + 2\mu$ setzen. Es ist dann

$$\sigma^2 = (1 - \mu)\left(r^2 + \frac{2}{r}\right) + \mu - 3,$$

$$\sigma^2 + 2r\sigma = (1 - \mu)\left(\frac{1}{r} - r^2\right).$$

Hieraus folgt durch Subtraktion

$$2r\sigma = -(1 - \mu)\left(2r^2 + \frac{1}{r}\right) + 3 - \mu$$

und durch Quadrierung dieses Ausdrucks

$$4r^2\sigma^2 = 4r^2\left[(1-\mu)\left(r^2+\frac{2}{r}\right)+\mu-3\right] = \left[\mu-3+(1-\mu)\left(2r^2+\frac{1}{r}\right)\right]^2.$$

Setzt man hierin wieder $r = 1 + \varepsilon$ und entwickelt nach Potenzen von ε, so ergibt sich nach einfacher Rechnung

$$\varepsilon^2 = \frac{8}{3}\mu + \frac{4}{3}\mu\varepsilon + \cdots,$$

also, wenn man Glieder höherer Ordnung vernachlässigt,

$$\varepsilon = \pm 2\sqrt{\frac{2\mu}{3}} \approx \pm\frac{1}{20}.$$

Damit ist gezeigt, daß selbst für die extreme Trojanerbahn, die an L_3 heranreicht, die Schwankung in r nur rund doppelt so groß ist wie die entsprechende Schwankung in der zugehörigen HILLschen Grenzkurve. Es gelten also die Regeln (XIII; 88), die wir für die infinitesimalen Bahnen der Familie d aus der CHARLIERschen Theorie abgeleitet hatten, auch für Bahnen beliebig großer Amplitude.

Nachdem wir uns einen Überblick über den genäherten Verlauf der Bahnkurven verschafft haben, müssen wir noch den Positionswinkel φ als Funktion der Zeit bestimmen. Streng ist

$$\varrho^2 = 1 + r^2 - 2r\cos\varphi = 4r\sin^2\frac{\varphi}{2} + (1-r)^2.$$

Aus (XIII; 100) findet man

$$\text{(XIII; 104)} \qquad \dot\varphi^2 = (1-\mu)\left(1+\frac{2}{r^2}\right) + \frac{\mu}{r^2}\left(\varrho^2+\frac{2}{\varrho}\right) - \frac{C}{r^2}.$$

Da hierin $f(\varrho) = \varrho^2 + 2/\varrho$ mit μ multipliziert ist, genügt es, $\varrho = 2\sin(\varphi/2)$ zu setzen, was bis auf Terme von der Ordnung ε bzw. $\sqrt{\mu}$ genau genug ist. Entwickelt man (XIII; 104) nach Potenzen von $\varepsilon = r - 1$ und setzt

$$C = 3(1-\mu) + \gamma, \quad (3\mu < \gamma < 5\mu),$$

so erhält man, bis zu Gliedern der Ordnung ε^2 einschließlich,

$$\text{(XIII; 105)} \qquad \dot\varphi^2 = 3\varepsilon^2 + \mu\left[\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}} + 4\sin^2\frac{\varphi}{2}\right] - \gamma.$$

Andererseits folgt aus (XIII; 101)

$$2\dot\varphi = \frac{1}{r^3} - 1 + \langle\text{Glieder der Ordnung } \mu\rangle,$$

also, mit $r = 1 + \varepsilon$,

$$\text{(XIII; 106)} \qquad 2\dot\varphi = -3\varepsilon + h,$$

wo h einen Rest von der Ordnung μ bezeichnet. Es ist also

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{9}{4}\varepsilon^2 + \cdots$$

bis auf Glieder von der Ordnung $\varepsilon\,\mu$ bzw. $\mu\,\sqrt{\mu}$, die vernachlässigt werden dürfen, wenn man diese Formel zur Elimination von ε^2 aus (XIII; 105) benutzt. Es ist also

$$\dot{\varphi}^2 = 3\gamma - 3\mu\left(\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}} + 4\sin^2\frac{\varphi}{2}\right) + \langle\text{Glieder höherer Ordnung}\rangle$$

oder genähert

$$\text{(XIII; 107)}\qquad \sqrt{3}\,dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{\gamma - \mu\left(\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}} + 4\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}}.$$

Die Grenzwerte φ_1, φ_2 der periodischen Bewegung werden erreicht, wenn der Radikand der Quadratwurzel im Nenner von (XIII; 107) verschwindet, also wenn $\dot{\varphi} = 0$ ist und φ die Gleichung

$$\text{(XIII; 108)}\qquad \sin^3\frac{\varphi}{2} - \frac{\gamma}{4\mu}\sin\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} = 0$$

befriedigt. Im Grenzfall $\gamma = 3\mu$ (Planetoid dauernd in L_4) hat die kubische Gleichung (XIII; 108) die Doppelwurzel $\varphi = 60°$, im anderen Grenzfall $\gamma = 5\mu$ (maximale Elongationen, Übergang zu den hufeisenförmigen Kurven) die beiden positiven Wurzeln $\varphi_2 = 180°$ und $\varphi_1 = 23.°9$, wie schon oben bewiesen. In der Tat geht (XIII; 108) in die oben abgeleitete kubische Gleichung für die Grenzwerte von ϱ über, wenn man $\gamma/\mu = 5$ und (genähert) $\varrho = 2\sin(\varphi/2)$ setzt.

Für die Periode der Libration erhält man den brauchbaren Näherungswert

$$\text{(XIII; 109)}\qquad P = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d\varphi}{\sqrt{\gamma - \mu\left(\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}} + 4\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}}.$$

Der Umlaufssinn ist negativ. Aus (XIII; 106) folgt nämlich, daß $\dot{\varphi}$ stets das entgegengesetzte Vorzeichen wie ε hat. Im äußeren Teil der Bahn ($\varepsilon > 0$, $r > 1$) bewegt sich der Planetoid im Uhrzeigersinn ($\dot{\varphi} < 0$), im inneren entgegengesetzt.

Aus (XIII; 109) läßt sich schließlich auch die schon für die periodischen Librationsbahnen um L_1, L_2 und L_3 bewiesene Regel ableiten, daß die Umlaufsperiode in engen Bahnen der Familie d tautochron ist, d.h., wenn a ein

kleiner, den Librationsamplituden proportionaler Parameter ist, unabhängig von a ist, sofern Terme von der Ordnung a^2 unmerklich bleiben.

Um dies zu zeigen, setzen wir, für kleine α,

$$\varphi = 60^\circ + \alpha; \quad \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha - \frac{1}{16}\alpha^2 - \frac{\sqrt{3}}{96}\alpha^3 + \cdots.$$

Es seien nun α_i $(i = 1, 2)$ die beiden Extremwerte von α. Es ist $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$, und die Beträge beider Größen sind nahezu gleich und von der Ordnung des Parameters a. Man setze

$$\text{(XIII; 110)} \quad \Theta_i = \int_{60^\circ}^{\varphi_i} \frac{d\varphi \sqrt{\sin\frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{\frac{\gamma}{4\mu}\sin\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} - \sin^3\frac{\varphi}{2}}} =$$

$$= \int_0^{\alpha_i} \frac{d\alpha\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha - \frac{5}{32}\alpha^2 - \cdots\right)}{\sqrt{\frac{\gamma}{2\mu}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha - \frac{1}{16}\alpha^2 + \cdots\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{8}\alpha + \frac{15}{32}\alpha^2 + \cdots\right)}}.$$

Dann ist nach (XIII; 109)

$$\text{(XIII; 111)} \qquad P = \frac{1}{\sqrt{3\mu}}(\Theta_2 - \Theta_1).$$

Der Radikand des Nenners von (XIII; 110), $R(\alpha)$, verschwindet für $\alpha = \alpha_i$; es ist also

$$\text{(XIII; 112)} \quad R(\alpha_i) = \frac{\gamma}{2\mu}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha_i - \frac{1}{16}\alpha_i^2 + \cdots\right) - $$

$$- \left(\frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{8}\alpha_i + \frac{15}{32}\alpha_i^2 + \cdots\right) = 0,$$

und man darf diesen Ausdruck von $R(\alpha)$ subtrahieren, so daß nun

$$\Theta_i =$$

$$\int_0^{\alpha_i} \frac{d\alpha\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha - \frac{5}{32}\alpha^2 + \cdots\right)}{\sqrt{\frac{\gamma}{2\mu}\left[\frac{\sqrt{3}}{4}(\alpha - \alpha_i) - \frac{1}{16}(\alpha^2 - \alpha_i^2) + \cdots\right] - \left[\frac{3\sqrt{3}}{8}(\alpha - \alpha_i) + \frac{15}{32}(\alpha^2 - \alpha_i^2) + \cdots\right]}}$$

wird. Andererseits folgt aus (XIII; 112)

$$\text{(XIII; 113)} \qquad \frac{\gamma}{2\mu} = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{3}{4}\alpha_i^2 - \frac{3\sqrt{3}}{8}\alpha_i^3 + \cdots\right),$$

und man erhält damit

$$\Theta_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \int\limits_0^{\alpha_i} \frac{d\alpha\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha - \frac{5}{32}\alpha^2 + \cdots\right)}{\sqrt{\frac{3}{8}\alpha_i^2\left(1 - \frac{\alpha^2}{\alpha_i^2}\right) - \frac{3\sqrt{3}}{16}\alpha_i^3\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_i}\right) + \cdots}}.$$

Setzt man $\alpha = \alpha_i \sin\psi$, $d\alpha = \alpha_i \cos\psi\, d\psi$, so folgt

$$\Theta_i = \frac{4}{3} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\alpha_i}{|\alpha_i|} \frac{d\psi\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha_i \sin\psi - \frac{5}{32}\alpha_i^2 \sin^2\psi + \cdots\right)}{\sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_i \frac{1}{1 + \sin\psi} + \cdots}},$$

also, bis auf Glieder von der Ordnung α_i^2,

$$\Theta_i = \pm \frac{4}{3} \int\limits_0^{\pi/2} \left[1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha_i\left(\sin\psi + \frac{1}{1 + \sin\psi}\right) + \cdots\right] d\psi$$

oder, da

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin\psi\, d\psi = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{1 + \sin\psi} = 1$$

ist,

$$\Theta_i = \pm \frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_i + \cdots\right),$$

wobei das positive Vorzeichen für $i = 2$, das negative für $i = 1$ gilt. Nach (XIII; 111) ist also die gesamte Umlaufsperiode

$$P = \frac{1}{\sqrt{3\mu}}\left[\frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + \cdots\right]. \tag{XIII; 114}$$

Nun folgt aber aus Gleichung (XIII; 113), die für beide Werte von i gültig ist, durch Bildung der Differenz

$$\alpha_2^2 - \alpha_1^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_2^3 - \alpha_1^3) + \cdots$$

oder

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) + \cdots,$$

so daß man den zweiten Term von (XIII; 114) auf die Glieder zweiter Ordnung werfen kann. Es ist also in der Tat

$$P = P_0 + P_2 a^2 + \cdots$$

mit

$$P_0 = \frac{4\pi}{3\sqrt{3\mu}} = \frac{2T}{3\sqrt{3\mu}},$$

wo $T = 2\pi$ die Periode des Jupiterumlaufs darstellt, übereinstimmend mit den Ergebnissen der CHARLIERschen Theorie, wenn (wie in den obigen Entwicklungen überhaupt) Glieder höherer Ordnung in μ unberücksichtigt bleiben.

Die BROWNschen Untersuchungen, die schon recht genaue Näherungen für die ebene, periodische Trojanerbewegung liefern, sind später des öfteren erweitert und verbessert worden. Besonderes Interesse verdient eine Arbeit von B. THÜRING (1931), die auf eine sehr elegante Weise zu den gleichen Ergebnissen gelangt und sich unschwer so verbessern läßt, daß noch weitere Feinheiten der Bahnbewegung zutage treten. Wir werden auf diese Theorie, zu deren Entwicklung die im nächsten Kapitel zu vermittelnden Kenntnisse nötig sind, im Abschnitt 163 zurückkommen. Da auch die THÜRINGsche Theorie nur eine Näherungslösung des Problems bietet, ist mitunter bezweifelt worden, ob es überhaupt strenge periodische Lösungen des Trojanerproblems mit beliebig großen Amplituden gibt. Diese Frage ist aber inzwischen durch praktische Versuche, auf dem Wege einer numerischen Integration der Differentialgleichungen solche periodischen Lösungen wirklich herzustellen, positiv beantwortet worden (s. Abschnitt 164), und es kann nunmehr an deren Existenz nicht mehr gezweifelt werden.

KAPITEL XIV

DIE HAMILTON-JACOBISCHE THEORIE

121. *Das Prinzip der kleinsten Wirkung*

Die Arbeiten von W. R. HAMILTON und K. G. J. JACOBI haben zu außerordentlich schönen und tiefen Einsichten in die mathematischen Eigenschaften dynamischer Probleme geführt. Die HAMILTON-JACOBIsche Theorie, unter welcher Bezeichnung die Ergebnisse der unabhängig voneinander geführten Untersuchungen dieser beiden großen Theoretiker des 19. Jahrhunderts in den wissenschaftlichen Sprachgebrauch eingegangen sind, hat sich gerade auch für die Behandlung himmelsmechanischer Probleme in Theorie und Praxis als außerordentlich fruchtbar erwiesen. Wir werden uns in der Folge immer wieder der machtvollen Hilfsmittel zu bedienen haben, die uns diese Theorie und die auf ihr fußende Methode der Variation der Konstanten an die Hand liefert, um jene Fragen zu beantworten, die uns die Bewegungen der Himmelskörper im Planetensystem aufgeben. Es ist daher an der Zeit, den Leser in diesen Gegenstand einzuführen, der demjenigen, der sich durch abstrakte mathematische Deduktionen nicht abschrecken läßt, Bewunderung für die Kühnheit der Gedankengänge abnötigt, die hier mit fast spielerischer Eleganz tief in den Kern der Dinge eindringen.

In Abschnitt 96 haben wir gezeigt, daß die Bewegungsgleichungen eines mechanischen Vorgangs, der durch konservative Kräfte bestimmt wird und dessen zeitlicher Ablauf durch n Koordinaten

$$q_1 = q_1(t); \quad q_2 = q_2(t); \quad \ldots; \quad q_n = q_n(t) \tag{XIV; 1}$$

als Funktionen der Zeit beschrieben wird, stets in Form der LAGRANGEschen Gleichungen

$$L_{q_i} = \frac{\partial S}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{XIV; 2}$$

geschrieben werden können, wo S eine gewisse Funktion von t und den $2n$ Größen $q_i, \dot{q}_i$ ist. In der Folge werden wir zur Abkürzung stets

$$f(x, \dot{x}, t) \quad \text{statt} \quad f(x_1, \ldots, x_n; \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n; t)$$

schreiben. Es ist dann, da nach Voraussetzung die Kräfte, die das System beherrschen, ein Potential haben,

$$S = S(q, \dot{q}, t) = T + U,$$

wo $T = T(q, \dot{q}, t)$ die kinetische Energie, $U = U(q, t)$ das Potential ($-U$ die potentielle Energie) des Systems bedeuten. In den meisten Fällen, so auch fast immer in Problemen der Himmelsmechanik, wird U von der Zeit nicht explizit abhängen, so daß $U = U(q)$ eine Funktion der Ortskoordinaten $q_1, \ldots, q_n$ allein ist. Durchweg enthält auch T die Zeit nicht explizit.

Nach Sir WILLIAM R. HAMILTON (1805–1865) hat die Funktion S eine bemerkenswerte Eigenschaft: Sind t_1 und t_2 zwei Zeitpunkte und betrachten wir eine Schar von Bewegungen

$$q_1(t,\alpha); \quad q_2(t,\alpha); \quad \ldots; \quad q_n(t,\alpha),$$

die stetig und differenzierbar in (XIV; 1) übergehen, wenn der Scharparameter α gegen Null abnimmt, und sind an den Endpunkten des Zeitintervalls

$$q_i(t_1,\alpha) = q_i(t_1); \quad q_i(t_2,\alpha) = q_i(t_2), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

von α unabhängig, so gilt die Ungleichung

$$\text{(XIV; 3)} \qquad J(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} S(\alpha, t)\, dt \geqq J(0),$$

d.h., unter allen Varianten der Bewegung, die zu den Zeiten t_1 und t_2 in die vorgeschriebenen Endpunkte $q_i(t_1), q_i(t_2)$ einmünden, macht die nach den Gleichungen (XIV; 2) erfolgende Bewegung das Integral (XIV; 3) zu einem Extremum, und zwar handelt es sich, wie in (XIV; 3) angedeutet, durchweg um ein Minimum, obwohl in besonderen Fällen auch Maxima vorkommen.

Differenzieren wir nämlich (XIV; 3) nach α, so wird

$$\text{(XIV; 4)} \qquad \frac{dJ}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \right) dt.$$

Andererseits verschwindet die Funktion

$$s(t,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}$$

an den Stellen $t = t_1, t_2$, da ja die q_i dort nicht von α abhängen. Es gilt also

$$\text{(XIV; 5)} \qquad 0 = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{dt}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right) \right] dt.$$

Da aber $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha}$ ist, ergibt die Differenz zwischen (XIV; 4) und (XIV; 5)

$$\text{(XIV; 6)} \qquad \frac{dJ}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial S}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] dt.$$

Nun können aber die $\partial q_i/\partial \alpha$ als Funktionen von t willkürlich festgesetzt werden. Der Ausdruck (XIV; 6) wird also, unabhängig von dieser Festsetzung, dann und nur dann verschwinden, wenn die LAGRANGEschen Ausdrücke

$$\text{(XIV; 7)} \qquad L_{q_i}(S) \equiv \frac{\partial S}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0$$

sind. Das Extremum (XIV; 3) tritt also genau für die Bewegung (XIV; 1) ein.

Die Gleichungen (XIV; 7) behalten ihre Form, wenn statt der Koordinaten q andere (ξ) eingeführt werden, sofern die Transformationsgleichungen

(XIV; 8) $$q = q(\xi, t),$$

welche die q in die ξ überführen, während t unverändert beibehalten wird, umkehrbar eindeutig sind, was immer der Fall ist, wenn die Funktionaldeterminante

$$\left|\frac{\partial q}{\partial \xi}\right| = \left|\frac{\partial(q_1, \ldots, q_n)}{\partial(\xi_1, \ldots, \xi_n)}\right|$$

nicht verschwindet. Dann ist nämlich auch

$$\xi = \xi(q, t); \quad \dot{\xi} = \dot{\xi}(q, \dot{q}, t),$$

und man kann auf die Funktion $S = S(\xi, \dot{\xi}, t)$ die gleichen Schlüsse anwenden wie oben, so daß auch die Gleichungen

$$L_{\xi_i}(S) \equiv \frac{\partial S}{\partial \xi_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial \dot{\xi}_i}\right) = 0$$

gelten.

Das Extremalprinzip (XIV; 3) wird von HAMILTON nicht ganz glücklich als das *Prinzip der kleinsten Wirkung* bezeichnet. Er folgt damit dem Sprachgebrauch von MAUPERTUIS, der schon 1747 den Gedanken ausgesprochen hatte, daß Naturvorgänge immer auf dem Wege des kleinsten Widerstandes erfolgen. Der von MAUPERTUIS geprägte Ausdruck „principe de la moindre action" sollte daher vielleicht besser mit „Prinzip des kleinsten Aufwandes" übersetzt werden. Im Falle, daß $S = T + U$ gesetzt werden darf, bedeutet S die Differenz zwischen der kinetischen Energie (T) und der potentiellen Energie ($-U$) des Systems. Das HAMILTONsche Prinzip ist aber viel umfassender: Es gilt mutatis mutandis auch, wenn die wirksamen Kräfte kein Potential haben. Insbesondere gilt es auch allgemeiner als der Satz von der Erhaltung der Energie, der ja überdies voraussetzt, daß U die Zeit t nicht explizit enthält.

Wenn die Funktion $S = S(q, \dot{q}, t)$ vorgegeben ist, lassen sich die Koordinaten der Bewegung durch Integration der Differentialgleichungen (XIV; 7) bestimmen, und zwar, da diese Gleichungen im allgemeinen von der zweiten Ordnung sind, als Funktionen der Zeit und von $2n$ unabhängigen Integrationskonstanten. Daraus folgt aber nicht die Umkehrung, d. h., es muß noch untersucht werden, ob nicht die gleiche Bewegung auch durch *verschiedene* Funktionen S definierbar ist. In der Tat läßt sich zeigen, daß man S – abgesehen von der Multiplikation mit einem beliebigen Faktor, der aus (XIV; 7) wieder herausfällt – um eine willkürliche Funktion $\varphi = \varphi(q, t)$ mit gewissen Eigenschaften vermehren darf, ohne daß dadurch die Gleichungen (XIV; 7) ihre Gültigkeit verlieren.

Es seien etwa

$$S_1 = S_1(q, \dot{q}, t) \quad \text{und} \quad S_2(q, \dot{q}, t)$$

zwei verschiedene Funktionen, und es sei

$$L_{q_i}(S_1) \equiv L_{q_i}(S_2)$$

für alle Werte von t und $q(t), \dot{q}(t)$. Es wäre dann für $S = S_2 - S_1$

(XIV; 9) $$L_{q_i}(S) = \frac{\partial S}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$$

identisch in $q, \dot{q}, \ddot{q}, t$. Nun ist aber $S = T + U$ eine algebraische Funktion zweiten Grades in den $\dot{q}_i$; denn für rechtwinklige Koordinaten x_i in einem absoluten System ist ja

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i^2,$$

also, wenn wir die x_i durch

$$x = x(q, t)$$

in beliebige andere Koordinaten q_i transformieren,

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j.$$

Daher hat S, da ja U von den $\dot{x}_i$ nicht abhängt, die Form

$$S = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \qquad (b_{ij} = b_{ji}),$$

wo die a_i, b_{ij} Funktionen der q allein (und eventuell auch der Zeit t) sind. Man hat also

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial a_0}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial q_i} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \dot{q}_j \dot{q}_k,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} = a_i + 2 \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \dot{q}_j$$

und

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial a_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + 2 \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k\right) + 2 \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \ddot{q}_j,$$

und es gilt daher, wenn die Behauptung (XIV; 9) zutrifft, für $S = S_2 - S_1$

(XIV; 10) $$L_{q_i}(S) = \left(\frac{\partial a_0}{\partial q_i} - \frac{\partial a_i}{\partial t}\right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial a_j}{\partial q_i} - \frac{\partial a_i}{\partial q_j}\right) \dot{q}_j + Q \equiv 0,$$

wo Q eine Funktion der $\dot{q}$ und $\ddot{q}$ ist, deren Koeffizienten die Größen $b_{ij}(q, t)$ und deren partielle Ableitungen enthalten. Da aber (XIV; 10) identisch in $t, q, \dot{q}, \ddot{q}$ erfüllt sein soll, folgt zunächst $b_{ij} \equiv 0$, also auch $Q \equiv 0$. Es ist dann

$$S = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \dot{q}_i$$

und ferner

(XIV; 11) $$\frac{\partial a_0}{\partial q_i} = \frac{\partial a_i}{\partial t}; \quad \frac{\partial a_j}{\partial q_i} = \frac{\partial a_i}{\partial q_j}, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Das sind aber hinreichende und notwendige Bedingungen dafür, daß

$$S = S_2 - S_1 = \frac{d}{dt} v(q, t)$$

als der vollständige Differentialquotient einer willkürlichen Funktion $v = v(q, t)$ nach der Zeit geschrieben werden kann; denn es ist ja dann

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial q_i} \dot{q}_i = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \dot{q}_i,$$

also $a_0 = \partial v/\partial t, a_i = \partial v/\partial q_i$, woraus (XIV; 11) durch nochmalige partielle Differentiation folgt.

Damit ist gezeigt, daß, wenn $v(q, t)$ eine willkürliche Funktion ist, S um

$$\varphi(q, t) = \frac{d}{dt} v(q, t)$$

vermehrt werden darf, ohne daß die LAGRANGEschen Gleichungen (XIV; 7) ungültig werden. Auch das Extremalprinzip (XIV; 3) bleibt unverändert gültig; es ändert sich nur der Wert des Extremums selbst; denn es ist ja

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(S + \frac{dv}{dt}\right) dt = J + v(t_2) - v(t_1).$$

122. *Kanonische Differentialgleichungssysteme*

Die zu einer vorgegebenen charakteristischen Funktion $S(q, \dot{q}, t)$ gehörigen Bewegungsgleichungen

$$\text{(XIV; 12)} \qquad L_{q_i}(S) \equiv \frac{\partial S}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$$

bestimmen die Bewegung durch n Koordinaten $q_i(t)$ als Funktionen der Zeit. Diese Differentialgleichungen sind im allgemeinen von der zweiten Ordnung. Man kann sie daher auch in der Form von $2n$ Differentialgleichungen erster Ordnung schreiben, indem man etwa

$$\text{(XIV; 13)} \qquad p_i = \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i}$$

als neue, zu den q_i *konjugierte Variable* einführt. Da S eine quadratische Funktion der $\dot{q}_i$ ist, sind die p_i nach (XIV; 13) in den $\dot{q}_i$ linear, und es ist daher möglich, die $\dot{q}_i$ umkehrbar eindeutig als lineare Funktionen der p_i darzustellen, wenn die Funktionaldeterminante $\left|\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j}\right|$ nicht verschwindet, also die HESSEsche Determinante

$$\text{(XIV; 14)} \qquad \left|\frac{\partial^2 S}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right| \neq 0$$

ist. Dies vorausgesetzt, läßt sich das System (XIV; 12) in der Form

$$\text{(XIV; 15)} \qquad \begin{cases} \dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t), \\ \dot{p}_i = \dot{p}_i(q, p, t) \end{cases}$$

schreiben, dessen Integration die $2n$ Koordinaten q, p als Funktionen der Zeit und von $2n$ willkürlichen Konstanten liefert. Diese Gleichungen lassen sich aber, wenn die konjugierten Variablen p_i durch die Vorschrift (XIV; 13) gewonnen worden sind und wenn die Bedingung (XIV; 14) erfüllt ist, stets in der *kanonischen Form*

$$\text{(XIV; 16)} \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

schreiben, wobei die *Hamiltonsche* oder *charakteristische Funktion* H des Systems durch

$$\text{(XIV; 17)} \qquad H = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - S(q, \dot{q}, t)$$

definiert ist. Schreibt man nämlich

$$\text{(XIV; 18)} \qquad S = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - H(q, p, t),$$

indem man in $H(q, \dot{q}, p, t)$ nach (XIV; 15) die $\dot{q}$ durch q, p, t eliminiert, so kann man nach (XIV; 18) vorübergehend

$$\text{(XIV; 19)} \qquad S = S(q, p, \dot{q}, \dot{p}, t) = S(s, \dot{s}, t)$$

als Funktion der $4n$ Variablen $s_i, \dot{s}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$ und der Zeit auffassen, indem man unter der Bezeichnung s die Variablen q und p zusammenfaßt. Daß die $\dot{p}$ in S nicht vorkommen, ist dabei ohne Bedeutung. Zu (XIV; 19) bzw. (XIV; 18) gehören dann die Lagrangeschen Differentialgleichungen

$$\text{(XIV; 20)} \qquad \begin{cases} L_{q_i}(S) \equiv \dfrac{\partial S}{\partial q_i} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial S}{\partial \dot{q}_i}\right) = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} - \dfrac{d}{dt} p_i = 0, \\ L_{p_i}(S) \equiv \dfrac{\partial S}{\partial p_i} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial S}{\partial \dot{p}_i}\right) = \dfrac{\partial S}{\partial p_i} = \dot{q}_i - \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = 0, \end{cases}$$

die mit (XIV; 16) identisch und den Gleichungen (XIV; 15) äquivalent sind.

Als Beispiel für die Überführung eines Differentialgleichungssystems in die kanonische Form wählen wir die Gleichungen (XI; 88) des „problème restreint", die für ein ebenes rotierendes Koordinatensystem mit dem Koordinatenanfang im Massenmittelpunkt der endlichen Massen

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \ddot{\xi} - 2n\,\dot{\eta} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial \xi}, \\ \ddot{\eta} + 2n\,\dot{\xi} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial \eta}, \end{cases} \qquad \left[\Omega = U + \frac{1}{2} n^2 (\xi^2 + \eta^2)\right]$$

lauten. Dabei ist nach Abschnitt 96 die kinetische Energie, ausgedrückt durch die Koordinaten des rotierenden Systems,

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + n(\xi\,\dot{\eta} - \eta\,\dot{\xi}) + \frac{1}{2}n^2(\xi^2 + \eta^2)$$

und das Potential

$$U = k^2\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) = U(\xi, \eta).$$

Setzt man

$$q_1 = \xi; \quad q_2 = \eta,$$

so erhält man mit $S = T + U$ nach (XIV; 13) die zu q_1, q_2 konjugiert kanonischen Variablen durch

$$\text{(B)} \qquad p_1 = \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial S}{\partial \dot{\xi}} = \dot{\xi} - n\,\eta; \quad p_2 = \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial S}{\partial \dot{\eta}} = \dot{\eta} + n\,\xi.$$

Nach (XIV; 17) hat dann die HAMILTONsche Funktion die Gestalt

$$H = \sum_i \dot{q}_i\,p_i - S = \dot{\xi}(\dot{\xi} - n\,\eta) + \dot{\eta}(\dot{\eta} + n\,\xi) - S =$$

$$= \frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - \frac{1}{2}n^2(\xi^2 + \eta^2) - U(\xi, \eta) =$$

$$= \frac{1}{2}(p_1 + n\,q_2)^2 + \frac{1}{2}(p_2 - n\,q_1)^2 - \frac{1}{2}n^2(q_1^2 + q_2^2) - U(q_1, q_2),$$

und es besteht das kanonische Gleichungssystem

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = p_1 + n\,q_2,$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = p_2 - n\,q_1,$$

übereinstimmend mit (B), und

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} \dot{p}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1} = n(p_2 - n\,q_1) + n^2\,q_1 + \dfrac{\partial U}{\partial q_1} = n\,p_2 + \dfrac{\partial U}{\partial q_1}, \\[2ex] \dot{p}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_2} = -n(p_1 + n\,q_2) + n^2 q_2 + \dfrac{\partial U}{\partial q_2} = -n\,p_1 + \dfrac{\partial U}{\partial q_2}, \end{cases}$$

übereinstimmend mit (A), denn aus (B) und (C),

$$\dot{p}_1 = \ddot{\xi} - n\,\dot{\eta} = n(\dot{\eta} + n\,\xi) + \frac{\partial U}{\partial \xi}; \quad \dot{p}_2 = \ddot{\eta} + n\,\dot{\xi} = -n(\dot{\xi} - n\,\eta) + \frac{\partial U}{\partial \eta},$$

folgt ja

$$\ddot{\xi} - 2n\,\dot{\eta} = n^2\,\xi + \frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi},$$

$$\ddot{\eta} + 2n\,\dot{\xi} = n^2\,\eta + \frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{\partial \Omega}{\partial \eta}.$$

123. *Kanonische Transformationen*

Die Variablen q_i, p_i werden als *kanonische Variable* bezeichnet, da sie das kanonische System (XIV; 16) befriedigen. Transformiert man sie durch

$$q_i = q_i(\xi, \eta, t); \quad p_i = p_i(\xi, \eta, t), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{XIV; 21}$$

auf $2n$ neue Variable ξ_i, η_i, die man auch unter der Bezeichnung ζ_i ($i = 1, 2, \ldots, 2n$) zusammenfassen kann, so interessiert die Frage, wie diese Transformation beschaffen sein muß, damit die ξ, η wieder kanonisch sind, d. h. Differentialgleichungen der Form

$$\dot{\xi}_i = \frac{\partial G}{\partial \eta_i}; \quad \dot{\eta}_i = -\frac{\partial G}{\partial \xi_i} \tag{XIV; 22}$$

befriedigen, und wie die neue HAMILTONsche Funktion $G(\zeta, t)$ mit der alten, $H(s, t)$, zusammenhängt.

Im Abschnitt 121 haben wir bewiesen, daß die LAGRANGEschen Gleichungen (XIV; 7) gültig bleiben, wenn man $S(s, \dot{s}, t)$ durch eine Transformation (XIV; 21) in $S(\zeta, \dot{\zeta}, t)$ überführt. Außerdem darf man zu S eine Funktion $\varphi(\zeta, t)$ addieren, die als der vollständige Differentialquotient einer willkürlich wählbaren Funktion $v(\zeta, t)$ nach der Zeit geschrieben werden kann. Für die neue HAMILTONsche Funktion G gilt demnach gemäß (XIV; 18)

$$G(\zeta, t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{\xi}_i \eta_i - S(\zeta, \dot{\zeta}, t) + \frac{d}{dt} v(\zeta, t), \tag{XIV; 23}$$

während H die Beziehung (XIV; 17)

$$H(s, t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - S(s, \dot{s}, t)$$

erfüllt und $S(s, \dot{s}, t)$, $S(\zeta, \dot{\zeta}, t)$ dieselbe Funktion der Zeit darstellen.

Sofern die Transformationen (XIV; 21) gelten, ist daher

(XIV; 24)

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} &= G - H - \sum_{i=1}^{n} \dot{\xi}_i \eta_i + \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i = \\
&= G - H - \sum_{i=1}^{n} \dot{\xi}_i \eta_i + \sum_{i=1}^{n} p_i \left[\frac{\partial q_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial q_i}{\partial \xi_j} \dot{\xi}_j + \frac{\partial q_i}{\partial \eta_j} \dot{\eta}_j\right)\right] = \\
&= G - H + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial t} p_i + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial \xi_j} p_i - \eta_j\right) \dot{\xi}_j + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial \eta_j} p_i\right) \dot{\eta}_j.
\end{aligned}$$

Andererseits ist aber

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial \xi_j} \dot{\xi}_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial \eta_j} \dot{\eta}_j,$$

und v ist daher durch die partiellen Ableitungen

$$\text{(XIV; 25)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = G - H + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial q_i}{\partial t} p_i, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \xi_j} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial q_i}{\partial \xi_j} p_i - \eta_j; \quad \dfrac{\partial v}{\partial \eta_j} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial q_i}{\partial \eta_j} p_i \end{cases}$$

festgelegt, sofern diese den Integrabilitätsbedingungen

$$\text{(XIV; 26)} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta_i \partial \zeta_k} = \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta_k \partial \zeta_i}, \quad (\zeta_1, \ldots, \zeta_{2n} = \xi_1, \ldots, \xi_n; \eta_1, \ldots, \eta_n)$$

genügen. Wenn dies der Fall ist, läßt sich v bis auf eine willkürliche additive Funktion von t allein bestimmen, die man aber nach (XIV; 24) auf die noch zu ermittelnde HAMILTONsche Funktion G werfen darf; denn da von G in (XIV; 22) nur die partiellen Ableitungen nach den ζ_i vorkommen, fällt ein solches Glied wieder heraus.

In expliziter Form lauten die Bedingungen (XIV; 26)

$$0 = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_j \partial \xi_k} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_k \partial \xi_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 q_i}{\partial \xi_j \partial \xi_k} p_i + \frac{\partial q_i}{\partial \xi_j} \frac{\partial p_i}{\partial \xi_k} \right) - \\ - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 q_i}{\partial \xi_k \partial \xi_j} p_i + \frac{\partial q_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial p_i}{\partial \xi_j} \right),$$

$$0 = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_j \partial \eta_k} - \frac{\partial^2 v}{\partial \eta_k \partial \xi_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 q_i}{\partial \xi_j \partial \eta_k} p_i + \frac{\partial q_i}{\partial \xi_j} \frac{\partial p_i}{\partial \eta_k} \right) - \\ - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 q_i}{\partial \eta_k \partial \xi_j} p_i + \frac{\partial q_i}{\partial \eta_k} \frac{\partial p_i}{\partial \xi_j} \right) - \frac{\partial \eta_j}{\partial \eta_k},$$

$$0 = \frac{\partial^2 v}{\partial \eta_j \partial \eta_k} - \frac{\partial^2 v}{\partial \eta_k \partial \eta_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 q_i}{\partial \eta_j \partial \eta_k} p_i + \frac{\partial q_i}{\partial \eta_j} \frac{\partial p_i}{\partial \eta_k} \right) - \\ - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 q_i}{\partial \eta_k \partial \eta_j} p_i + \frac{\partial q_i}{\partial \eta_k} \frac{\partial p_i}{\partial \eta_j} \right)$$

oder, da ja

$$\frac{\partial^2 q_i}{\partial \zeta_j \partial \zeta_k} = \frac{\partial^2 q_i}{\partial \zeta_k \partial \zeta_j}; \quad \frac{\partial \eta_j}{\partial \eta_k} = e_{jk} = \begin{cases} 1 \text{ für } j = k \\ 0 \text{ für } j \neq k \end{cases}$$

ist,

$$\text{(XIV; 27)} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{\partial q_i}{\partial \xi_j} \dfrac{\partial p_i}{\partial \xi_k} - \dfrac{\partial p_i}{\partial \xi_j} \dfrac{\partial q_i}{\partial \xi_k} \right) = [\xi_j, \xi_k] = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{\partial q_i}{\partial \xi_j} \dfrac{\partial p_i}{\partial \eta_k} - \dfrac{\partial p_i}{\partial \xi_j} \dfrac{\partial q_i}{\partial \eta_k} \right) = [\xi_j, \eta_k] = e_{jk}, \\ \sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{\partial q_i}{\partial \eta_j} \dfrac{\partial p_i}{\partial \eta_k} - \dfrac{\partial p_i}{\partial \eta_j} \dfrac{\partial q_i}{\partial \eta_k} \right) = [\eta_j, \eta_k] = 0. \end{cases}$$

Die Summen der Form $[\zeta_i, \zeta_k]$ bezeichnet man als die *Lagrangeschen Klammerausdrücke*. Die Beziehungen (XIV; 27) stellen also die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür dar, daß die Transformation (XIV; 21) kanonisch ist, d.h. die kanonischen Koordinaten q, p in kanonische Koordinaten ξ, η überführt.

Nach C.L. Siegel kann man diese Bedingungen in eine einzige zusammenfassen, wenn man sich des Matrizenkalküls bedient. Es seien die n-reihigen quadratischen Matrizen

$$\mathfrak{A} = \left(\frac{\partial q_i}{\partial \xi_j}\right); \quad \mathfrak{B} = \left(\frac{\partial q_i}{\partial \eta_j}\right); \quad \mathfrak{C} = \left(\frac{\partial p_i}{\partial \xi_j}\right); \quad \mathfrak{D} = \left(\frac{\partial p_i}{\partial \eta_j}\right), \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

gegeben. Dann ist

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial s_i}{\partial \zeta_j}\right), \qquad (i, j = 1, \ldots, 2n)$$

eine $2n$-reihige quadratische Matrix, deren Determinante

$$|\mathfrak{M}| \neq 0$$

die Funktionaldeterminante der Transformation $s = s(\zeta, t)$ darstellt, und die drei Bedingungen (XIV; 27) lassen sich in Form der Matrizengleichungen

$$\text{(XIV; 28)} \qquad \mathfrak{C}'\,\mathfrak{A} - \mathfrak{A}'\,\mathfrak{C} = 0; \quad \mathfrak{D}'\,\mathfrak{A} - \mathfrak{B}'\,\mathfrak{C} = \mathfrak{E}; \quad \mathfrak{D}'\,\mathfrak{B} - \mathfrak{B}'\,\mathfrak{D} = 0$$

schreiben, wenn $\mathfrak{A}'$ die transponierte (d.h. an der Hauptdiagonale gespiegelte) Matrix von $\mathfrak{A}$ bedeutet und unter

$$\mathfrak{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

die n-reihige Einheitsmatrix verstanden wird. Aus $\mathfrak{D}'\mathfrak{A} - \mathfrak{B}'\mathfrak{C} = \mathfrak{E}$ folgt dann auch die Gleichheit der Transponierten,

$$\text{(XIV; 29)} \qquad \mathfrak{A}'\,\mathfrak{D} - \mathfrak{C}'\,\mathfrak{B} = \mathfrak{E}' = \mathfrak{E}.$$

Wenn man nun die Gleichungen (XIV; 28) und (XIV; 29) heranzieht und

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{E} \\ -\mathfrak{E} & 0 \end{pmatrix}$$

setzt, so erkennt man leicht die Gültigkeit von

$$\text{(XIV; 30)} \qquad \mathfrak{M}'\,\mathfrak{J}\,\mathfrak{M} = \mathfrak{J},$$

und es gilt außerdem die Determinantenbeziehung

$$|\mathfrak{M}'| \cdot |\mathfrak{J}| \cdot |\mathfrak{M}| = |\mathfrak{M}|^2 \cdot |\mathfrak{J}| = |\mathfrak{J}|, \quad \text{also} \quad |\mathfrak{M}|^2 = 1.$$

Die Transformation (XIV; 21) ist somit kanonisch, wenn ihre Funktionalmatrix der Gleichung (XIV; 30) genügt. Außerdem ist gezeigt worden, daß

die Funktionaldeterminante einer kanonischen Transformation von Null verschieden und sogar gleich der Einheit ist.

Natürlich ist das oben geschilderte Verfahren, die Frage der kanonischen Transformationen mit Hilfe des HAMILTONschen Prinzips zu lösen, nicht das einzige, das zum Ziel führt. Man kann auch folgenden Weg einschlagen, der vielleicht durchsichtiger ist, weil er dieses formale und abstrakte Prinzip nicht ausdrücklich voraussetzt. Es sei ein kanonisches System von Differentialgleichungen

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}; \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{XIV; 31}$$

vorgelegt, und es werde eine beliebige Transformation

$$\left\{ \begin{aligned} x_i &= x_i(z, t), \\ y_i &= y_i(z, t), \end{aligned} \right. \qquad (z = z_1, z_2, \ldots, z_{2n}) \tag{XIV; 32}$$

vorgenommen, durch die man die HAMILTONsche Funktion $H(x, y, t)$ in $H(z, t)$ überführt. Die neuen Differentialgleichungen werden dann in der Form

$$\frac{\partial H}{\partial z_i} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial z_i} + \frac{\partial H}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial z_i} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\dot{x}_k \frac{\partial y_k}{\partial z_i} - \dot{y}_k \frac{\partial x_k}{\partial z_i} \right)$$

geschrieben werden können, wenn man (XIV; 31) berücksichtigt. Es ist aber andererseits

$$\dot{x}_k = \frac{\partial x_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial x_k}{\partial z_j} \dot{z}_j; \quad \dot{y}_k = \frac{\partial y_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial y_k}{\partial z_j} \dot{z}_j.$$

Setzt man dies ein, so erhält man

$$\frac{\partial H}{\partial z_i} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial x_k}{\partial t} \frac{\partial y_k}{\partial z_i} - \frac{\partial y_k}{\partial t} \frac{\partial x_k}{\partial z_i} \right) + \sum_{j=1}^{2n} \sum_{k=1}^{n} \dot{z}_j \left(\frac{\partial x_k}{\partial z_j} \frac{\partial y_k}{\partial z_i} - \frac{\partial y_k}{\partial z_j} \frac{\partial x_k}{\partial z_i} \right)$$

oder, nach Einführung der Symbole für die LAGRANGEschen Klammerausdrücke,

$$\frac{\partial H}{\partial z_i} = [t, z_i] + \sum_{j=1}^{2n} \dot{z}_j [z_j, z_i]. \tag{XIV; 33}$$

Das ist ein System von linearen Gleichungen für die $\dot{z}$, aus denen man durch Auflösung die neuen Differentialgleichungen in der Form

$$\dot{z}_i = f_i(z, t)$$

erhält, falls die Determinante

$$D = |[z_j, z_i]| \neq 0$$

ist. Das ist aber stets der Fall, wenn die Funktionaldeterminante

$$\Delta = \left| \frac{\partial (x_i, y_i)}{\partial z_j} \right|$$

der Transformation (XIV; 32) nicht verschwindet; denn es läßt sich durch eine etwas umständliche Rechnung, die hier übergangen werden darf, zeigen, daß $D = \Delta^2$ ist.

Für den in der Himmelsmechanik fast ausschließlich vorkommenden Fall, daß die Transformation (XIV; 32) die Zeit t nicht explizit enthält, sind die Klammern $[t, z_i]$ sicher sämtlich Null, und man sieht unmittelbar, daß die Beziehungen (XIV; 33) die kanonische Form annehmen, wenn man die $2n$ Variablen z_i in zwei konjugierte Folgen q_i, p_i von je n Variablen zerlegt und wenn

$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0; \quad [q_i, p_j] = -[p_j, q_i] = e_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$$

ist, d.h. die Bedingungen (XIV; 27) erfüllt sind; denn dann gehen die Gleichungen (XIV; 33) in

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

über. Verschwinden dagegen die $[t, z_i]$ nicht sämtlich, so wird man statt H eine andere HAMILTONsche Funktion G bestimmen müssen, so daß (XIV; 33) die Form

$$\text{(XIV; 34)} \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial G}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial G}{\partial q_i}$$

annimmt. Offenbar gilt dann

$$\frac{\partial G}{\partial z_i} = \frac{\partial H}{\partial z_i} - [t, z_i],$$

und man kann direkt zeigen, daß diese Gleichungen mit den Beziehungen (XIV; 25) äquivalent sind. Besser (und unter Vermeidung gewisser Schwierigkeiten, denen man auf diesem direkten Wege begegnet) gelangt man auf folgende Weise zum Ziel:

Es sei $v(z, t)$ eine willkürliche Funktion der Zeit und der $2n$ Variablen $z = q_i, p_i$. Man definiere sodann $2n + 1$ Hilfsfunktionen

$$J_u = \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{\partial x_k}{\partial u} - \frac{\partial v}{\partial u},$$

wo u irgendeine der Variablen z_i, t bedeuten möge. Setzt man nun

$$G = H + \frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{\partial x_k}{\partial t} = H - J_t,$$

so entspricht das genau der ersten der drei Gleichungen (XIV; 25). Andererseits lassen sich die LAGRANGEschen Klammerausdrücke mit Hilfe der J_u in der Form

$$\text{(XIV; 35)} \qquad [r, s] = \frac{\partial J_r}{\partial s} - \frac{\partial J_s}{\partial r}$$

schreiben, wie man durch Ausführung der partiellen Differentiationen unmittelbar bestätigt. Setzt man nun $H = G + J_t$ in (XIV; 33) ein und drückt die LAGRANGEschen Klammern durch (XIV; 35) aus, so ergibt sich

$$\frac{\partial G}{\partial z_i} + \frac{\partial J_{z_i}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \dot{z}_k \left\{ \frac{\partial J_{z_i}}{\partial z_k} - \frac{\partial J_{z_k}}{\partial z_i} \right\} = 0. \tag{XIV; 36}$$

Durch geeignete Wahl der Funktion $v(z, t)$ kann man nun den J-Funktionen gewisse Eigenschaften einprägen. Zum Beispiel kann man dafür sorgen, daß

(XIV; 36a) $\begin{cases} 1. \text{ alle } J_{p_i} = 0 \text{ sind,} \\ 2. \text{ alle } J_{q_i} = J_{q_i}(p, t) \text{ von den } q_i \text{ nicht abhängen.} \end{cases}$

Ist dies der Fall, so ist

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J_{q_i}}{\partial q_k} - \dfrac{\partial J_{q_k}}{\partial q_i} = [q_i, q_k] = 0; \quad \dfrac{\partial J_{p_i}}{\partial p_k} - \dfrac{\partial J_{p_k}}{\partial p_i} = [p_i, p_k] = 0, \\ \dfrac{\partial J_{q_i}}{\partial p_k} - \dfrac{\partial J_{p_k}}{\partial q_i} = [q_i, p_k] = \dfrac{\partial J_{q_i}}{\partial p_k}. \end{cases} \tag{XIV; 37}$$

Für die beiden konjugierten Folgen $z = q, p$ lauten dann die Gleichungen (XIV; 36) unter den Bedingungen (XIV; 36a) und (XIV; 37)

$$\frac{\partial G}{\partial q_i} + \frac{\partial J_{q_i}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial J_{q_i}}{\partial p_k} \dot{p}_k = \frac{\partial G}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} J_{q_i} = 0; \quad \frac{\partial G}{\partial p_i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial J_{q_i}}{\partial p_k} \dot{q}_k = 0.$$

Setzen wir speziell $J_{q_i} = p_i$, so gehen diese Gleichungen in (XIV; 34) über; ferner sind die Bedingungen (XIV; 36a) mit den beiden letzten Gleichungen (XIV; 25) und die Bedingungen (XIV; 37) mit (XIV; 27) gleichbedeutend.

Zwei Beispiele für kanonische Transformationen mögen diese Dinge illustrieren:

1. Die Variablen mögen den kanonischen Gleichungen

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}; \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

genügen. Wann ist die *lineare* Transformation

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} u_k; \quad y_i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} w_k \tag{XIV; 38}$$

kanonisch? Da

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_k} = \alpha_{ik}; \quad \frac{\partial x_i}{\partial w_k} = \frac{\partial y_i}{\partial u_k} = 0; \quad \frac{\partial y_i}{\partial w_k} = \beta_{ik}$$

ist, sind die erste und dritte der Gleichungen (XIV; 27) unabhängig von der Wahl der Koeffizienten α_{ik}, β_{ik} erfüllt, während die zweite

$$[u_i, w_k] = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} \beta_{jk} = e_{ik} \tag{XIV; 39}$$

liefert. Diese Bedingung ist identisch mit der Forderung, daß

(XIV; 40) $$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} u_i w_i$$

sein soll. Das heißt also: Wenn $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{u}, \mathfrak{w}$ vier Vektoren im n-dimensionalen Raum mit den Koordinaten x_i, y_i, u_i, w_i sind, dann sollen die skalaren Produkte $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y})$ und $(\mathfrak{u}\,\mathfrak{w})$ einander gleich sein. In der Tat, wenn man

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{u}; \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{B}\,\mathfrak{w}$$

schreibt, wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ die Matrizen der linearen Transformationen (XIV; 38) sind und $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{A}'$ die Transformierten von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{A}$ bedeuten, so erhält man

$$(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}) = \mathfrak{x}'\,\mathfrak{y} = \mathfrak{u}'\,\mathfrak{A}'\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{w} = \mathfrak{u}'\,\mathfrak{w} = (\mathfrak{u}\,\mathfrak{w}),$$

da die Bedingung (XIV; 39) gleichbedeutend mit $\mathfrak{A}'\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$ ist. Natürlich kann man die Gültigkeit von (XIV; 40) auch aus (XIV; 39) unmittelbar ablesen.

Ein Sonderfall tritt ein, wenn $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ ist. Dann ist $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}' = \mathfrak{E}$ und die Transformation wegen

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}^2 = 1; \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}\,\alpha_{jk} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k$$

orthogonal.

2. Sind x, y zwei konjugierte kanonische Variable, so ist die Transformation

(XIV; 41) $$x = \sqrt{2u}\,\cos w; \quad y = \sqrt{2u}\,\sin w$$

kanonisch. Denn es ist

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{2u}}\cos w; \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{2u}}\sin w,$$

$$\frac{\partial x}{\partial w} = -\sqrt{2u}\,\sin w; \qquad \frac{\partial y}{\partial w} = \sqrt{2u}\,\cos w,$$

und die Gleichungen (XIV; 27),

$$[u, u] = [w, w] = 0; \quad [u, w] = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w} = \cos^2 w + \sin^2 w = 1,$$

sind erfüllt.

124. *Die HAMILTON-JACOBIsche partielle Differentialgleichung*

Die Überlegungen des vorigen Abschnitts haben gezeigt, daß jede kanonische Transformation $z = z(\zeta, t)$ mit der Wahl einer „erzeugenden Funktion" $v(z, t) \equiv v(\zeta, t)$ verbunden ist. Dieser darf man noch eine additive Funktion der Zeit allein hinzufügen, die in die neuen kanonischen Gleichungen

(XIV; 42) $$\dot{\xi}_i = \frac{\partial G}{\partial \eta_i}; \quad \dot{\eta}_i = -\frac{\partial G}{\partial \xi_i}$$

nicht eingeht. Überdies hat man es durch willkürliche Verfügung über $\partial v/\partial t$ in der Hand, die kanonische Transformation so anzulegen, daß die neue HAMILTONsche Funktion G eine für die Integration vorteilhafte Gestalt erhält.

So kann man z.B. fordern, daß $G(\xi, \eta, t) \equiv H(q, p, t)$ für alle t ist, d.h., daß G aus H allein durch Anwendung der Transformation (XIV; 21) hervorgeht. In diesem Fall besagt (XIV; 24), daß

$$\text{(XIV; 43)} \qquad \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - \sum_{i=1}^{n} \dot{\xi}_i \eta_i = \frac{dv}{dt}$$

als vollständiger Differentialquotient der Funktion $v(\xi, \eta, t) \equiv v(q, p, t)$ darstellbar sein muß, damit die Transformation kanonisch sei. Ist dies der Fall, so darf man die Differentialgleichungen in der Form

$$\text{(XIV; 44)} \qquad \dot{\xi}_i = \frac{\partial H}{\partial \eta_i}; \quad \dot{\eta}_i = -\frac{\partial H}{\partial \xi_i}$$

schreiben. Man findet leicht, daß dieses Kriterium für die beiden Transformationen erfüllt ist, die wir im Abschnitt 123 als Beispiele anführten. Im ersten Beispiel (lineare Transformationen) fanden wir, daß die Matrizen dieser Transformationen so beschaffen sein mußten, daß $\sum x_i y_i = \sum u_i w_i$ ist. Da aber die Transformationsgleichungen mit denselben Matrizen auch für die Differentialquotienten der Koordinaten nach der Zeit gelten, gilt unter anderem auch $\sum \dot{x}_i y_i - \sum \dot{u}_i w_i = 0$. Die Beziehung (XIV; 43) ist also erfüllt, wenn $v = \text{const}$ gesetzt wird. Im zweiten Beispiel, der Transformation (XIV; 41), findet man

$$\begin{aligned} \dot{x}\, y - \dot{u}\, w &= \sqrt{2u}\, \sin w \left(\frac{\dot{u}}{\sqrt{2u}} \cos w - \sqrt{2u}\, \dot{w} \sin w \right) - \dot{u}\, w = \\ &= \dot{u} \sin w \cos w - 2u\, \dot{w} \sin^2 w - \dot{u}\, w = \\ &= \frac{d}{dt} (u \sin w \cos w - u\, w). \end{aligned}$$

Die denkbar einfachste Form erhalten die Differentialgleichungen, wenn man dafür sorgt, daß $G \equiv 0$ wird; denn dann sind die Gleichungen

$$\text{(XIV; 45)} \qquad \dot{\xi}_i = 0; \quad \dot{\eta}_i = 0$$

integrabel, und die Bewegung des Systems wird durch die Integrale

$$\text{(XIV; 46)} \qquad \xi_i = \text{const}; \quad \eta_i = \text{const}$$

vollständig beschrieben. Es kommt also darauf an, die willkürliche Funktion $v(\xi, \eta, t)$ so zu bestimmen, daß dies erreicht wird.

Zu diesem Zweck verwandle man etwa $v(\xi, \eta, t)$ in

$$\text{(XIV; 47)} \qquad v = w(\xi, q, t),$$

indem man aus dem ersten Satz des Gleichungssystems (XIV; 21)

$$\eta_i = \eta_i(\xi, q, t)$$

berechnet und in v einführt, was unter der Voraussetzung, daß die Funktionaldeterminante

$$|\mathfrak{B}| = \left|\frac{\partial q_i}{\partial \eta_j}\right|$$

nicht verschwindet, immer möglich ist. Durch totale Differentiation von (XIV; 47) erhält man dann

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial \xi_i} \dot{\xi}_i + \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial w}{\partial q_i} \dot{q}_i .$$

Vergleicht man diese Beziehung mit (XIV; 24), so findet man

$$\text{(XIV; 48)} \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = G - H; \quad \frac{\partial w}{\partial \xi_i} = -\eta_i; \quad \frac{\partial w}{\partial q_i} = p_i .$$

Setzt man nun $G = 0$, so ergeben die erste und dritte der Gleichungen (XIV; 48)

$$\text{(XIV; 49)} \qquad \boxed{\frac{\partial w}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial w}{\partial q}, t\right) = 0} .$$

Das ist die HAMILTON-JACOBIsche partielle Differentialgleichung, aus der $w(\xi, q, t)$ als Funktion von t, den q_i und n willkürlichen Konstanten $\xi_i = \alpha_i$ zu bestimmen wäre. Gelingt es, diese Integration auszuführen, so gilt nach (XIV; 48) die Transformation

$$\text{(XIV; 50a)} \qquad p_i = \frac{\partial w}{\partial q_i},$$

$$\text{(XIV; 50b)} \qquad \eta_i = -\frac{\partial w}{\partial \xi_i},$$

und es bestehen die kanonischen Gleichungen (XIV; 45), deren Integrale (XIV; 46) sofort hingeschrieben werden können. Die vollständige Lösung des kanonischen Systems (XIV; 16), die $2n$ Integrationskonstanten enthält, ist damit auf die Lösung der partiellen Differentialgleichung (XIV; 49) zurückgeführt, die n Gleichungen zwischen den p_i und den q_i liefert. Man bezeichnet diese Beziehungen, die n Integrationskonstanten α_i enthalten und mit den „Impulsgleichungen" (XIV; 13) gleichbedeutend sind, auch als *intermediäre Integrale.* Die übrigen n Integrale erhält man dann aus (XIV; 50b), indem man $\eta_i = \beta_i =$ const setzt.

Zu den gleichen Ergebnissen gelangt man auch, wenn man $|\mathfrak{A}| = \left|\frac{\partial q_i}{\partial \xi_j}\right| \neq 0$ voraussetzt und anstatt (XIV; 47) $v = w(q, \eta, t)$ benutzt, ein Verfahren, das eingeschlagen werden *muß*, wenn $|\mathfrak{B}| = 0$ und der oben beschriebene Weg daher ungangbar ist.

Bei manchen Anwendungen (s. Abschnitt 187) ist folgende Fassung des letztgenannten Verfahrens vorteilhaft. Die „erzeugende Funktion" w habe die Gestalt

$$\text{(XIV; 51)} \qquad w = w(q, \eta, t),$$

und man setze in (XIV; 24) für die willkürliche Funktion $v(\xi, \eta, t)$

$$v = w - \sum \xi \eta,$$

wobei in $w(\xi, \eta, t)$ die Variable ξ durch q, η, t ausgedrückt sei. Dann ist nach (XIV; 24)

$$\frac{dv}{dt} = G - H + \sum p \dot{q} - \sum \eta \dot{\xi} =$$

$$= \frac{\partial w}{\partial t} + \sum \frac{\partial w}{\partial q} \dot{q} + \sum \frac{\partial w}{\partial \eta} \dot{\eta} - \sum (\xi \dot{\eta} + \eta \dot{\xi}).$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn

$$\text{(XIV; 52)} \qquad \frac{\partial w}{dt} = G - H; \quad \frac{\partial w}{\partial q_i} = p_i; \quad \frac{\partial w}{\partial \eta_i} = \xi_i$$

gesetzt wird. Insbesondere ist $G = H$, wenn $\partial w / \partial t = 0$ ist, also w die Zeit nicht explizite enthält; die Transformation (XIV; 21) ist dann kanonisch bei unveränderter HAMILTONscher Funktion. Speziell liefert $w = \sum \eta q$ die identische Transformation

$$q_i = \xi_i; \quad p_i = \eta_i.$$

125. *Anwendung auf das Zweikörperproblem*

Die abstrakten und sehr allgemeinen Ergebnisse der vorhergehenden Abschnitte gewinnen Leben und Anschaulichkeit, wenn man sie auf einfache und vollständig integrierbare mechanische Probleme anwendet. Wir wählen dazu das in Band I ausführlich behandelte Zweikörperproblem, dessen Formalismus und dessen Lösungen hier in allen Einzelheiten als bekannt vorausgesetzt werden dürfen.

Die Differentialgleichungen der Relativbewegung eines Planeten (Masse m) um die Sonne (Masse $M = 1$) lauten in rechtwinkligen Koordinaten [vgl. (III; 26)]

$$\text{(XIV; 53)} \qquad \begin{cases} \ddot{x} = -\varkappa^2 \dfrac{x}{r^3}; \quad \ddot{y} = -\varkappa^2 \dfrac{y}{r^3}; \quad \ddot{z} = -\varkappa^2 \dfrac{z}{r^3}, \\ r^2 = x^2 + y^2 + z^2; \quad \varkappa^2 = k^2(1 + m). \end{cases}$$

Führt man [vgl. (III; 25)] die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

und das Potential

$$U = k^2 \frac{m(1 + m)}{r} = \frac{m \varkappa^2}{r}$$

ein, so erhält man nach Abschnitt 120 die Differentialgleichungen (XIV; 53) mit Hilfe der „Wirkungsfunktion“ $S = T + U$ in Form der LAGRANGEschen Gleichungen

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \tag{XIV; 54}$$

für $q_i = x, y, z$. Da diese Gleichungen ihre Gültigkeit behalten, wenn man S (und ebenso T und U) mit einem konstanten Faktor, etwa $1/m$, multipliziert, darf man auch

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2); \quad U = \frac{\varkappa^2}{r}; \quad S = T + U$$

setzen und erhält dann in der Tat

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i}\right) = -\varkappa^2 \frac{q_i}{r^3} - \frac{d}{dt}\dot{q}_i = -\left(\varkappa^2 \frac{q_i}{r^3} + \ddot{q}_i\right) = 0,$$

übereinstimmend mit (XIV; 53).

Um das System (XIV; 53) zu einem kanonischen zu machen, bestimmen wir die zu den q_i konjugierten Variablen p_i durch

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} = \dot{q}_i. \tag{XIV; 55}$$

Nach (XIV; 17) ist dann die HAMILTONsche Funktion

$$H = \sum \dot{q}\, p - S = \sum \dot{q}^2 - \left(\frac{1}{2}\sum \dot{q}^2 + \frac{\varkappa^2}{r}\right) = \frac{1}{2}\sum \dot{q}^2 - \frac{\varkappa^2}{r} =$$
$$= \frac{1}{2}\sum p^2 - \frac{\varkappa^2}{\sqrt{\sum q^2}} = T - U,$$

und die q_i, p_i genügen den kanonischen Gleichungen

$$\text{(XIV; 56)} \quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = p_i = \dot{q}_i, & \text{übereinstimmend mit (XIV; 55)}, \\ -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} = -\varkappa^2 \dfrac{q_i}{r^3} = \ddot{q}_i = \dot{p}_i, & \text{übereinstimmend mit (XIV; 53)}. \end{array}\right.$$

Diese Gleichungen haben das Integral $H = T - U = \text{const}$ (Energiesatz), da H die Zeit nicht explizit enthält.

Als Beispiel für den Übergang von (XIV; 56) auf ein anderes kanonisches System wählen wir dasjenige, das aus der Transformation der rechtwinkligen Koordinaten q_i in Polarkoordinaten g_i hervorgeht. Man setze also

$$\begin{aligned} q_1 &= g_1 \cos g_2 \cos g_3, \\ q_2 &= g_1 \cos g_2 \sin g_3, \qquad (g_1^2 = \textstyle\sum q_i^2 = r^2). \\ q_3 &= g_1 \sin g_2, \end{aligned}$$

Hieraus erhält man durch elementare Rechnung

$$\text{(XIV; 57)} \quad \begin{cases} T = \frac{1}{2} \sum \dot{q}_i^2 = \frac{1}{2} (\dot{g}_1^2 + g_1^2 \dot{g}_2^2 + g_1^2 \dot{g}_3^2 \cos^2 g_2), \\ U = \frac{\varkappa^2}{g_1}, \\ S = T + U \end{cases}$$

und durch partielle Differentiation dieser Ausdrücke die zu den g_i konjugierten Variablen

$$\text{(XIV; 58)} \quad \begin{cases} h_1 = \frac{\partial S}{\partial \dot{g}_1} = \dot{g}_1, \\ h_2 = \frac{\partial S}{\partial \dot{g}_2} = g_1^2 \dot{g}_2, \\ h_3 = \frac{\partial S}{\partial \dot{g}_3} = g_1^2 \dot{g}_3 \cos^2 g_2. \end{cases}$$

Andererseits ist wegen (XIV; 56), (XIV; 57) und (XIV; 58)

$$\sum \dot{q}_i p_i - \sum \dot{g}_i h_i = \sum \dot{q}_i^2 - (\dot{g}_1^2 + g_1^2 \dot{g}_2^2 + g_1^2 \dot{g}_3^2 \cos^2 g_2) = 0,$$

also die Bedingung (XIV; 43) mit $v = \text{const}$ erfüllt. Die neue HAMILTONsche Funktion ist also hier mit der alten identisch, und es ist in den neuen Koordinaten

$$H = T - U = \frac{1}{2} (\dot{g}_1^2 + g_1^2 \dot{g}_2^2 + g_1^2 \dot{g}_3^2 \cos^2 g_2) - \frac{\varkappa^2}{g_1} =$$
$$= \frac{1}{2} \left(h_1^2 + \frac{h_2^2}{g_1^2} + \frac{h_3^2}{g_1^2 \cos^2 g_2} \right) - \frac{\varkappa^2}{g_1}.$$

Somit lautet das neue kanonische System

$$\text{(XIV; 59a)} \quad \begin{cases} \dot{g}_1 = \frac{\partial H}{\partial h_1} = h_1, \\ \dot{g}_2 = \frac{\partial H}{\partial h_2} = \frac{h_2}{g_1^2}, \\ \dot{g}_3 = \frac{\partial H}{\partial h_3} = \frac{h_3}{g_1^2 \cos^2 g_2}, \end{cases}$$

übereinstimmend mit (XIV; 58), und

$$\text{(XIV; 59b)} \quad \begin{cases} \dot{h}_1 = -\frac{\partial H}{\partial g_1} = \frac{1}{g_1^3} \left(h_2^2 + \frac{h_3^2}{\cos^2 g_2} \right) - \frac{\varkappa^2}{g_1^2}, \\ \dot{h}_2 = -\frac{\partial H}{\partial g_2} = -\frac{h_3^2 \sin g_2}{g_1^2 \cos^3 g_2}, \\ \dot{h}_3 = -\frac{\partial H}{\partial g_3} = 0. \end{cases}$$

Setzen wir, wie in (XI; 50),

$$g_1 = r; \quad g_2 = \varphi; \quad g_3 = \vartheta$$

und damit, gemäß (XIV; 58),

$$h_1 = \dot{r}; \quad h_2 = r^2\,\dot{\varphi}; \quad h_3 = r^2\,\dot{\vartheta}\cos^2\varphi,$$

so ergeben die Gleichungen (XIV; 59b)

$$\ddot{r} = r\,\dot{\varphi}^2 + r\,\dot{\vartheta}^2\cos^2\varphi - \frac{\varkappa^2}{r^2},$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\,\dot{\varphi}) = -r^2\,\dot{\vartheta}^2\cos\varphi\sin\varphi,$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\,\dot{\vartheta}\cos^2\varphi) = 0,$$

also genau die Bewegungsgleichungen (XI; 50) des relativen Zweikörperproblems in Polarkoordinaten.

Wir werden nun, um die Bezeichnungsweise mit der des vorigen Abschnitts in Übereinstimmung zu bringen, die kanonischen Variablen g, h wieder in q, p umbenennen. Die HAMILTONsche Funktion lautet dann

$$H(p, q) = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2} + \frac{p_3^2}{q_1^2\cos^2 q_2}\right) - \frac{\varkappa^2}{q_1},$$

und das durch sie charakterisierte kanonische System

$$\text{(XIV; 60)} \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

soll nun mit Hilfe der in Abschnitt 124 entwickelten Theorie gelöst werden.

Gesucht wird also eine Transformation

$$q = q(\xi, \eta); \quad p = p(\xi, \eta),$$

die das System (XIV; 60) in

$$\dot{\xi}_i = \frac{\partial G}{\partial \eta_i}; \quad \dot{\eta}_i = -\frac{\partial G}{\partial \xi_i}$$

mit $G \equiv 0$, also in

$$\xi_i = \text{const} = \alpha_i; \quad \eta_i = \text{const} = \beta_i$$

überführt. Das erreicht man nach Abschnitt 124 durch Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\text{(XIV; 61)} \qquad \frac{\partial w}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial w}{\partial q}\right) = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial q_i} = p_i$$

vermittels der Funktion

$$\text{(XIV; 62)} \qquad w = w(q, \xi, t),$$

in der die $\xi_i = \alpha_i$ als drei willkürliche Konstanten auftreten. Ist diese Funktion gefunden, dann sind die konstanten Ausdrücke

$$\xi_i(p, q) = \alpha_i; \quad \eta_i(p, q) = \beta_i$$

die $2n$ Integrale des Problems.

Setzt man also wieder für die Polarkoordinaten

$$q_1 = r; \quad q_2 = \varphi; \quad q_3 = \vartheta$$

und für ihre Konjugierten

$$p_i = \frac{\partial w}{\partial q_i},$$

so lautet die HAMILTON-JACOBIsche Differentialgleichung

$$\text{(XIV; 63)} \qquad \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial w}{\partial \vartheta}\right)^2\right] = \frac{\varkappa^2}{r}.$$

Da (XIV; 63) die Variablen t und ϑ nicht explizite enthält, erreicht man dies mit dem Ansatz

$$w = -\alpha_1 t + \alpha_2 \vartheta + W(r, \varphi; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Dabei ist wegen (XIV; 61)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\alpha_1 = -H,$$

d.h., α_1 ist die Konstante des Energiesatzes $H = \text{const}$, der ja [vgl. (XI; 10) und (XI; 10a)] immer gilt, wenn in der HAMILTONschen Funktion H die Zeit t nicht explizite auftritt. Die Aufgabe reduziert sich also darauf, die Funktion

$$W = W(r, \varphi; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

aus

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\right] = \frac{\varkappa^2}{r} + \alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{2r^2\cos^2\varphi}$$

zu bestimmen. Das ist, wie P. STÄCKEL[1]) gezeigt hat, immer möglich, wenn, wie hier, die Differentialgleichung nur die Quadrate der partiellen Ableitungen erster Ordnung der unbekannten Funktion enthält. Setzt man versuchsweise

$$W = W_1(r) + W_2(\varphi)$$

an, so erhält man

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial W_2}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{\cos^2\varphi}\right] = \frac{2\varkappa^2}{r} + 2\alpha_1.$$

Diese Gleichung läßt sich in der Tat befriedigen, indem man

$$\text{(XIV; 64)} \qquad \left(\frac{\partial W_2}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{\cos^2\varphi} = \alpha_3^2; \quad \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_3^2}{r^2}\right] = \frac{\varkappa^2}{r} + \alpha_1$$

---

[1]) P. STÄCKEL, Über die Integration der HAMILTON-JACOBIschen Differentialgleichung mittels Separation der Variablen. Halle 1891. Siehe auch C. V. L. CHARLIER, Die Mechanik des Himmels, Bd. 1. Leipzig 1902, S. 77ff.

setzt. Das System (XIV; 64) läßt sich durch Quadraturen lösen, da W_1 und W_2 Funktionen einer einzigen Variablen sind und ihre partiellen Ableitungen daher auch als totale geschrieben werden können. Man erhält dann

(XIV; 65)
$$\begin{cases} W_2 = \int\limits_0^{\varphi} \sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2\varphi}}\, d\varphi, \\ W_1 = \int\limits_{r_0}^{r} \sqrt{2\left(\frac{\varkappa^2}{r} + \alpha_1\right) - \frac{\alpha_3^2}{r^2}}\, dr \end{cases}$$

und somit

(XIV; 66)
$$w = -\alpha_1 t + \alpha_2 \vartheta + \int\limits_{r_0}^{r} \sqrt{2\left(\frac{\varkappa^2}{r} + \alpha_1\right) - \frac{\alpha_3^2}{r^2}}\, dr + \int\limits_0^{\varphi} \sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2\varphi}}\, d\varphi$$

als Lösung von (XIV; 63) mit den drei unabhängigen willkürlichen Konstanten α_i; denn auch die Konstante r_0, die als untere Grenze des ersten Integrals auftritt, läßt sich als Funktion der α_i festlegen. Da nämlich das Integral über r nur dann reell ist, wenn der Radikand der Quadratwurzel im Integranden positiv ist, wählt man zweckmäßigerweise für r_0 den kleinsten Wert von r, für den dies zutrifft, d. h. die kleinste positive Wurzel der quadratischen Gleichung

$$2\left(\alpha_1 + \frac{\varkappa^2}{r}\right) - \frac{\alpha_3^2}{r^2} = 0,$$

deren Lösung

$$r_0 = -\frac{\varkappa^2}{2\alpha_1} \pm \sqrt{\frac{\varkappa^4}{4\alpha_1^2} + \frac{\alpha_3^2}{2\alpha_1}}$$

lautet. Ist $\alpha_1 > 0$ (hyperbolischer Fall), so gibt es nur eine einzige positive Wurzel r_0; ist dagegen $\alpha_1 < 0$ (elliptischer Fall), so gibt es deren zwei, die man auch in der Form

$$r_1 = a(1 - e); \quad r_2 = a(1 + e), \quad 0 \leqq e < 1$$

schreiben kann. Man findet dann

(XIV; 67)
$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 2a = -\frac{\varkappa^2}{\alpha_1}; & \alpha_1 = -\frac{\varkappa^2}{2a}, \\ r_1 r_2 = a^2(1 - e^2) = a\,p = -\frac{\alpha_3^2}{2\alpha_1}; & \alpha_3 = \varkappa\sqrt{p}\,. \end{cases}$$

Es ist also α_1 (wie bereits erwähnt) mit der Energiekonstanten $h = -\varkappa^2/2a$ identisch, α_3 aber mit der Flächenkonstanten $c = \varkappa\sqrt{p}$. Im elliptischen Fall bedeutet $r_0 = r_1$ die Periheldistanz des Planeten; ihr Zusammenhang mit den Konstanten α_1, α_3 bzw. a, p ist dann durch (XIV; 67) gegeben. Im hyperbolischen Fall ist $a < 0$ und $e = \sqrt{1 + 2\alpha_1\alpha_3^2/\varkappa^4} > 1$; auch hier ist also für r_0

die Lösung r_1 einzusetzen, die jetzt die einzige positive ist. Ist $\alpha_1 = 0$ (parabolischer Fall), so hat die quadratische Gleichung nur eine endliche Wurzel, nämlich $r = \alpha_3^2/2\varkappa^2 = p/2$; die Periheldistanz ist also hier gleich dem halben Bahnparameter.

Aus der ersten Gleichung (XIV; 65) folgt, daß die Variable φ nur solche Werte annehmen kann, für die

$$\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2\varphi} \geqq 0$$

ist, d.h., es gilt $-\varphi_0 \leqq \varphi \leqq +\varphi_0$, wobei $\varphi_0 \geqq 0$ und

$$\cos^2\varphi_0 = \frac{\alpha_2^2}{\alpha_3^2} = \frac{\alpha_2^2}{\varkappa^2 p}$$

ist. Es ist demnach

$$\alpha_2 = \varkappa \sqrt{p} \cos\varphi_0.$$

Da φ den Winkel darstellt, den der Ortsvektor des Planeten mit der Hauptkoordinatenebene bildet, ist $\varphi_0 = i$ mit der Neigung der Bahnebene identisch und α_2 gleich der Projektion $\varkappa \sqrt{p} \cos i$ der Flächenkonstante auf die Hauptkoordinatenebene.

Damit ist die geometrische Bedeutung der Konstanten α_i klargestellt. Die drei übrigen, zu den α_i konjugierten kanonischen Konstanten β_i ergeben sich nach (XIV; 46) und (XIV; 50b), indem man

$$\beta_i = \eta_i = -\frac{\partial w}{\partial \xi_i} = -\frac{\partial w}{\partial \alpha_i}$$

setzt:

$$\text{(XIV; 68)} \quad \left\{ \begin{aligned} \beta_1 &= -\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} = t - \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{2\left(\frac{\varkappa^2}{r} + \alpha_1\right) - \frac{\alpha_3^2}{r^2}}} = \text{const}, \\ \beta_2 &= -\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} = -\vartheta + \alpha_2 \int\limits_{0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi \sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2\varphi}}} = \text{const}, \\ \beta_3 &= -\frac{\partial w}{\partial \alpha_3} = -\alpha_3 \int\limits_{0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2\varphi}}} + \\ &\quad + \alpha_3 \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\left(\frac{\varkappa^2}{r} + \alpha_1\right) - \frac{\alpha_3^2}{r^2}}} = \text{const}. \end{aligned} \right.$$

Diese drei Gleichungen stellen die Bahnbewegung des Planeten als Funktion der Zeit und der sechs kanonischen Bahnelemente α_i, β_i dar. Führen wir statt der α_i die klassischen Elemente durch

(XIV; 69) $$\alpha_1 = -\frac{\varkappa^2}{2a}; \quad \alpha_2 = \varkappa\sqrt{p}\cos i; \quad \alpha_3 = \varkappa\sqrt{p}$$

wieder ein, so ergibt sich statt dessen

(XIV; 70) $$\left\{\begin{aligned} \varkappa(t-\beta_1) &= \int\limits_{a(1-e)}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{r}-\frac{1}{a}-\frac{p}{r^2}}}, \\ \beta_2 &= -\vartheta + \cos i \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi\sqrt{\cos^2\varphi-\cos^2 i}}, \\ \beta_3 &= -\int\limits_0^{\varphi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi-\cos^2 i}} + \sqrt{p}\int\limits_{a(1-e)}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2}{r}-\frac{1}{a}-\frac{p}{r^2}}}. \end{aligned}\right.$$

Die erste dieser Beziehungen ist die KEPLERsche Gleichung in der Integralform (III; 83) bzw. (V; 20), und es ist daher $\beta_1 = T$ die Periheldurchgangszeit. Setzt man in der zweiten $\varphi = 0$, so erkennt man, daß $\vartheta = -\beta_2$ denjenigen Wert darstellt, den die Polarkoordinate ϑ (Länge) annimmt, wenn der Planet die Hauptkoordinatenebene $\varphi = 0$ passiert, also im Knoten seiner Bahn steht. Es ist daher $-\beta_2 = \Omega$ die Länge des (aufsteigenden oder absteigenden) Knotens. Die zweite Gleichung (XIV; 70) läßt sich auch schreiben

(XIV; 71) $$\vartheta - \Omega = \arcsin(\tan\varphi\cot i);$$

denn es ist ja

$$\frac{d\arcsin(\tan\varphi\cot i)}{d\varphi} = \frac{\cot i}{\cos^2\varphi\sqrt{1-\tan^2\varphi\cot^2 i}} = $$
$$= \frac{\cos i}{\cos\varphi\sqrt{\cos^2\varphi\sin^2 i - \sin^2\varphi\cos^2 i}} = \frac{\cos i}{\cos\varphi\sqrt{\cos^2\varphi-\cos^2 i}}.$$

Die Gleichung (XIV; 71), der man auch die Form

$$\tan\varphi = \tan i \sin(\vartheta - \Omega)$$

geben kann, gilt aber in dem sphärischen Dreieck PKQ (Abb. 24), in dem ϑ, φ Länge und Breite des Planeten P bedeuten [siehe auch (VI; 31)].

Um schließlich die Bedeutung der dritten Gleichung (XIV; 70) erkennbar zu machen, schreiben wir zunächst

$$\int_0^\varphi \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2 i}} = \int_0^u \frac{\sin i \cos u\, du}{\sqrt{\sin^2 i \cos^2 u}} = \int_0^u du = u,$$

indem wir

(XIV; 72) $\sin\varphi = \sin i \sin u;\quad \cos\varphi\, d\varphi = \sin i \cos u\, du$

substituieren. Die neue Variable u ist das *Argument der Breite*, d.h. der sphärische Abstand des Planetenortes vom aufsteigenden Knoten K (Abb. 24); denn (XIV; 72) gilt ja im Dreieck PKQ nach dem Sinussatz. Damit nimmt die dritte Gleichung (XIV; 70) die Form

(XIV; 73)
$$u + \beta_3 = \sqrt{p} \int_{a(1-e)}^{r} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - \frac{p}{r^2}}}$$

an. Für $r = a(1 - e)$, also wenn der Planet im Perihel steht, ist $u = -\beta_3$ mit dem Perihelabstand ω des Planetenortes vom Knoten identisch. Allgemein ist also

$$u + \beta_3 = u - \omega = v$$

die wahre Anomalie des Himmelskörpers.

Abb. 24
Spur der Bahnebene an der Sphäre
Π = Perihel; P = sphärischer Ort des Planeten

Daraus folgt aber, daß (XIV; 73) als Beziehung zwischen v und r nichts anderes als die Gleichung der Bahn in ebenen Polarkoordinaten darstellt. In der Tat läßt sich (XIV; 73) auch

$$v = \arccos\left[\frac{1}{e}\left(\frac{p}{r} - 1\right)\right], \quad \text{d.h.} \quad r = \frac{p}{1 + e\cos v}$$

schreiben; denn es ist

$$\frac{dv}{dr} = \frac{p}{e r^2 \sqrt{1 - \frac{1}{e^2}\left(\frac{p}{r} - 1\right)^2}} = \frac{p}{r^2 \sqrt{e^2 - \frac{p^2}{r^2} + \frac{2p}{r} - 1}} =$$

$$= \frac{p}{r^2 \sqrt{\frac{2p}{r} - \frac{p^2}{r^2} - \frac{p}{a}}} = \frac{\sqrt{p}}{r^2 \sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - \frac{p}{r^2}}}$$

in Übereinstimmung mit (XIV; 73).

Es ist nun noch zu zeigen, daß die „intermediären Integrale" (XIV; 50a), die nur die drei kanonischen Konstanten α_i enthalten, mit den Impulsglei-

chungen (XIV; 13) identisch sind. Es ist also am Beispiel des Zweikörperproblems zu verifizieren, daß

(XIV; 74)
$$p_i = \frac{\partial w}{\partial q_i} = \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i}$$

gilt. Nun ist, wenn wir – in den Polarkoordinaten r, φ, ϑ – für w den Ausdruck (XIV; 66), für $S = T + U$ den Ausdruck (XIV; 57) benutzen,

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \sqrt{2\left(\frac{\varkappa^2}{r} + \alpha_1\right) - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}, \quad \frac{\partial w}{\partial \varphi} = \sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2\varphi}}, \quad \frac{\partial w}{\partial \vartheta} = \alpha_2,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{r}} = \dot{r}, \qquad \frac{\partial S}{\partial \dot{\varphi}} = r^2\,\dot{\varphi}, \qquad \frac{\partial S}{\partial \dot{\vartheta}} = r^2\,\dot{\vartheta}\cos^2\varphi.$$

Die Gleichsetzung im Sinne von (XIV; 74) ergibt, wenn wir noch die α_i durch die klassischen Elemente (XIV; 69) ersetzen,

(XIV; 75)
$$\dot{r} = \varkappa\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - \frac{p}{r^2}}\,; \quad r^2\,\dot{\varphi} = \varkappa\sqrt{p}\sqrt{1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2\varphi}}\,; \quad r^2\,\dot{\vartheta}\cos^2\varphi = \varkappa\sqrt{p}\cos i.$$

Diese drei Beziehungen erweisen sich als Integrale der Differentialgleichungen (XI; 50). In der ersten erkennen wir die Formel (V; 20) wieder. Für die zweite gilt

$$\frac{d}{dt}(r^2\,\dot{\varphi}) = -\frac{\varkappa\sqrt{p}}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2\varphi}}}\,\frac{\cos^2 i\sin\varphi}{\cos^3\varphi}\,\dot{\varphi},$$

also, wenn wir die Quadratwurzel im Nenner durch $r^2\,\dot{\varphi}$ und im Zähler $\cos^2 i$ durch die dritte Beziehung (XIV; 75) ausdrücken,

$$\frac{d}{dt}(r^2\,\dot{\varphi}) = -r^2\,\dot{\vartheta}^2\cos\varphi\sin\varphi,$$

wie in (XI; 50). Die dritte Gleichung (XIV; 75) ist aber nichts anderes als der Flächensatz für die Projektion der Bewegung auf die Hauptkoordinatenebene (s. Band I, S. 141), in der die „kurtierte Distanz" $\varrho = r\cos\varphi$ und die Länge ϑ als ebene Polarkoordinaten auftreten.

In Band I haben wir verschiedene Methoden zur Integration des Zweikörperproblems kennengelernt, die bedeutend einfacher und durchsichtiger sind als die oben geschilderte. Trotzdem dürfte es nicht überflüssig gewesen sein, die ziemlich umständliche Lösung des Problems nach der HAMILTON-JACOBIschen Methode in allen Einzelheiten darzustellen; denn das hier angewandte Verfahren beschreitet einen Weg, der zwar in diesem speziellen Fall als ein komplizierter und durchaus vermeidbarer Umweg zum Ziel erscheint, der aber dafür nach allgemeinen und auch in schwierigeren Fällen anwendbaren Richtlinien erfolgt. Wir werden (Abschnitt 127) die großen Vorteile dieser Methode

erkennen, wenn es gilt, die Lösungen des ungestörten Zweikörperproblems als Ausgangsbasis für die Berechnung der Bewegung eines Planeten, Kometen oder Satelliten um seinen Zentralkörper zu benutzen, die durch die Anziehungskraft eines dritten Körpers gestört wird.

126. *Lösungen und Integrale von Differentialgleichungssystemen. Die POISSONschen und die LAGRANGEschen Klammerausdrücke*

Ehe wir daran gehen, die HAMILTON-JACOBIsche Theorie zur Lösung konkreter Aufgaben der Himmelsmechanik, insbesondere der Störungsrechnung, heranzuziehen, müssen wir uns noch mit einer Reihe von allgemeinen Eigenschaften der Lösungen und Integrale dynamischer Differentialgleichungssysteme, vor allem der kanonischen Systeme, beschäftigen.

Man bezeichnet als *Lösung* eines Systems von Differentialgleichungen

$$\dot{x}_i = f_i(x, t), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{XIV; 76}$$

das System der Funktionen

$$x_i = x_i(\alpha, t), \tag{XIV; 77}$$

in dem die α_i n willkürliche und voneinander unabhängige Konstante bedeuten. Die Frage der Existenz solcher Lösungen, deren ausführliche Beantwortung dem dritten Band vorbehalten bleiben muß, sei hier einstweilen ausgeklammert. Es soll also angenommen werden, daß die Funktionen (XIV; 77) innerhalb gewisser Bereiche des Raumes und der Zeit existieren und den durch (XIV; 76) definierten dynamischen Vorgang beschreiben. Werden in (XIV; 77) alle α_i durch bestimmte Zahlenwerte β_i ersetzt, so spricht man von einer partikulären Lösung. Diese entspricht dann einem konkreten Bewegungsvorgang, etwa dem, der durch die „Anfangsbedingungen" β_i, $t = t_0$ bestimmt (determiniert) wird. Sind von den n Integrationskonstanten nur $n - r$ zahlenmäßig vorgegeben und noch r willkürlich, so spricht man von einer *r-parametrigen Schar von Lösungen*. Dasselbe trifft zu, wenn zwischen den n Konstanten $n - r$ Bedingungen vorgegeben werden.

Löst man (XIV; 77) nach den α_i auf, was immer möglich ist, wenn die Funktionaldeterminante $|\partial x_i/\partial \alpha_j|$ nicht verschwindet, so erhält man in

$$\alpha_i = \alpha_i(x, t) = \text{const} \tag{XIV; 78}$$

n Funktionen der x_i und der Zeit t, die konstant sind, d.h. innerhalb des Existenzbereichs der Lösungen für alle t den gleichen Wert annehmen, wenn man für die x_i die Lösungen (XIV; 77) einsetzt. Die Beziehungen (XIV; 78) heißen die *Integrale* des Problems (XIV; 76). Es gibt also, immer unter der Voraussetzung der Existenz der Lösungen in gewissen Bereichen, n unabhängige Integrale, die aber sehr verschiedene Formen annehmen können; denn man kann ja statt der n Konstanten α_i auch n Funktionen der α_i, etwa $a_i = a_i(\alpha)$, einführen, die ebenfalls konstant sind und die voneinander nicht abhängen, wenn die Determinante $|\partial a_i/\partial \alpha_j| \neq 0$ ist.

Hat insbesondere das System (XIV; 76) kanonische Gestalt – in diesem Falle ist die Zahl der Variablen gerade –, so schreibt man

$$\text{(XIV; 79)} \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wo $H = H(q, p, t)$ eine gegebene Funktion der $2n$ Variablen q_i, p_i und (eventuell) auch der Zeit t bedeutet. Es ist dann

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \frac{\partial H}{\partial t},$$

da die Summanden der Summe einzeln verschwinden, wenn man (XIV; 79) berücksichtigt. Ist also $\partial H/\partial t = 0$, d.h., kommt die Zeit t in H nicht explizit vor, so existiert immer das Integral $H = \text{const}$, ein Satz, der uns schon mehrfach begegnet ist und (im allgemeinen) mit dem für konservative mechanische Vorgänge gültigen Satz von der Erhaltung der Energie identisch ist.

Daß $H = \text{const}$ nicht unbedingt den Energiesatz repräsentiert, kann man leicht an einem Gegenbeispiel zeigen: Im reduzierten Zweikörperproblem, d.h. in jenem Problem, das die drei lokalen Invarianten

$$p_{11} = r^2; \quad p_{12} = r^2 \sigma; \quad p_{22} = r^2 \omega$$

(s. Abschnitt 40) als Funktionen der Zeit zu bestimmen fordert, sind drei Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{p}_{11} &= 2 p_{12}, \\ \dot{p}_{12} &= p_{22} - \frac{p_{11}}{r^3} = p_{22} - \frac{1}{r}, \qquad (r = \sqrt{p_{11}}) \\ \dot{p}_{22} &= -2 \frac{p_{12}}{r^3}, \end{aligned}$$

zu lösen, die aus (XII; 32) folgen, wenn man dort $i = 1$, $\alpha = 2$ und die „störende Masse" $m_i = 0$ setzt. Diese Gleichungen lassen sich, da ihre Anzahl ungerade ist, nicht ohne weiteres in kanonische umformen. Das gelingt aber, wenn man eine der drei Variablen, etwa p_{22}, durch den Energiesatz

$$\text{(XIV; 80)} \qquad p_{22} - \frac{2}{\sqrt{p_{11}}} = h = \text{const}$$

eliminiert, also $p_{22} = h + 2/r$ setzt. Es gilt dann

$$\dot{p}_{11} = 2 p_{12}; \quad \dot{p}_{12} = h + \frac{1}{\sqrt{p_{11}}},$$

und wenn man als HAMILTONsche Funktion

$$G = h\, p_{11} + 2 \sqrt{p_{11}} - p_{12}^2$$

einführt, nehmen diese Gleichungen die kanonische Form

$$\dot{p}_{12} = \frac{\partial G}{\partial p_{11}} = h + \frac{1}{\sqrt{p_{11}}}; \quad \dot{p}_{11} = -\frac{\partial G}{\partial p_{12}} = 2p_{12}$$

an. Da G die Zeit nicht explizit enthält, ist $G = \text{const}$ ein Integral. In der Tat findet man, wenn für h wieder der Wert (XIV; 80) gesetzt wird,

$$G = p_{11} p_{22} - p_{12}^2 = r^4(\omega - \sigma^2) = r^4 \vartheta = p.$$

Diese Formel stellt aber nach (V; 18) den *Flächensatz* dar: G ist dem Quadrat der Flächenkonstante $\varkappa \sqrt{p}$ proportional.

Für jedes Integral $\alpha_i(p, q, t)$ des Systems (XIV; 79) besteht die Beziehung

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) = \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) = 0$$

oder, wenn wir die *POISSONschen Klammerausdrücke*

$$\text{(XIV; 81)} \qquad (\alpha_i, \beta_k) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial q_j} \frac{\partial \beta_k}{\partial p_j} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_j} \frac{\partial \beta_k}{\partial q_j} \right)$$

einführen,

$$\text{(XIV; 82)} \qquad \dot{\alpha}_i = \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + (\alpha_i, H) = 0.$$

Die Klammerausdrücke (XIV; 81) sind eng verwandt mit den invers geformten *LAGRANGEschen Klammerausdrücken*

$$\text{(XIV; 83)} \qquad [\alpha_i, \beta_k] = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial q_j}{\partial \alpha_i} \frac{\partial p_j}{\partial \beta_k} - \frac{\partial q_j}{\partial \beta_k} \frac{\partial p_j}{\partial \alpha_i} \right),$$

denen wir in Abschnitt 123 begegnet sind. Für beide Arten von Ausdrücken gelten die Regeln

$$(f, \varphi) = -(\varphi, f), \quad (f, f) = 0; \quad [f, \varphi] = -[\varphi, f], \quad [f, f] = 0.$$

Sind $a = a(q, p)$ und $b = b(q, p)$ zwei verschiedene Integrale eines kanonischen Differentialgleichungssystems, so läßt sich zeigen, daß auch (a, b) ein Integral desselben Systems ist, d.h., daß diese Ausdrücke der Formel (XIV; 82)

$$\text{(XIV; 84)} \qquad \frac{d(a, b)}{dt} = \frac{\partial (a, b)}{\partial t} + ((a, b), H)$$

genügen. Um dies zu beweisen, zeigen wir zunächst die Gültigkeit der merkwürdigen Identität

$$\text{(XIV; 85)} \qquad ((a, b), c) + ((b, c), a) + ((c, a), b) = 0,$$

die für beliebige Funktionen a, b, c der Variablen q_i, p_i gilt. Setzen wir der Kürze halber

$$\frac{\partial a}{\partial p_i} = a_{p_i}; \quad \frac{\partial^2 a}{\partial p_i \partial q_k} = a_{p_i q_k}; \ldots,$$

so ist

$$((a,b),c) = \sum_i \left\{ c_{p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \sum_k (a_{q_k} b_{p_k} - a_{p_k} b_{q_k}) - c_{q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \sum_k (a_{q_k} b_{p_k} - a_{p_k} b_{q_k}) \right\} =$$

$$= \sum_i \sum_k \{a_{q_i q_k} b_{p_k} c_{p_i} - a_{q_i p_k} b_{q_k} c_{p_i} - a_{q_k p_i} b_{p_k} c_{q_i} + a_{p_i p_k} b_{q_k} c_{q_i}\} -$$

$$- \sum_i \sum_k \{b_{q_i q_k} a_{p_k} c_{p_i} - b_{q_i p_k} a_{q_k} c_{p_i} - b_{q_k p_i} a_{p_k} c_{q_i} + b_{p_i p_k} a_{q_k} c_{q_i}\}.$$

Bezeichnen wir diese beiden Doppelsummen symbolisch mit

$$f(a;\, b, c),$$

so ist

$$((a,b),c) = f(a;\, b,c) - f(b;\, a,c).$$

Außerdem erkennt man, wenn man die Indizes i, k vertauscht, wodurch der Wert der Doppelsummen nicht geändert wird, daß

$$f(a;\, b,c) = f(a;\, c,b)$$

ist. Es ist demnach

$$((a,b),c) = f(a;\, b,c) - f(b;\, c,a),$$

woraus sofort die Gültigkeit von (XIV; 85) folgt.

Nun ist

$$\frac{\partial(a,b)}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial}{\partial t} (a_{q_i} b_{p_i} - a_{p_i} b_{q_i}),$$

also

$$\text{(XIV; 86)} \qquad \frac{\partial(a,b)}{\partial t} = \sum_i \left\{ \frac{\partial a_{q_i}}{\partial t} b_{p_i} + \frac{\partial b_{p_i}}{\partial t} a_{q_i} - \frac{\partial a_{p_i}}{\partial t} b_{q_i} - \frac{\partial b_{q_i}}{\partial t} a_{p_i} \right\}.$$

Da (XIV; 82) eine Identität darstellt, ist Differentiation nach den Variablen erlaubt. Es ist also, für $\alpha_i = a$ bzw. b,

$$\begin{array}{l|c} & \text{(I)} \\ \dfrac{\partial}{\partial q_i}\left(\dfrac{\partial a}{\partial t}\right) + \dfrac{\partial(a,H)}{\partial q_i} = 0, & \dfrac{\partial b}{\partial p_i} \\ \dfrac{\partial}{\partial p_i}\left(\dfrac{\partial a}{\partial t}\right) + \dfrac{\partial(a,H)}{\partial p_i} = 0, & -\dfrac{\partial b}{\partial q_i} \end{array}$$

woraus durch Multiplikation mit den Faktoren (I) und Addition

$$b_{p_i} \frac{\partial a_{q_i}}{\partial t} - b_{q_i} \frac{\partial a_{p_i}}{\partial t} + \left\{ \frac{\partial(a,H)}{\partial q_i} \frac{\partial b}{\partial p_i} - \frac{\partial(a,H)}{\partial p_i} \frac{\partial b}{\partial q_i} \right\}$$

folgt. Summiert man über i, so ergibt sich

$$\sum_i \left(b_{p_i} \frac{\partial a_{q_i}}{\partial t} - b_{q_i} \frac{\partial a_{p_i}}{\partial t} \right) + ((a,H),b)$$

und in derselben Weise, wenn man a und b vertauscht,

$$\sum_i \left(a_{p_i} \frac{\partial b_{q_i}}{\partial t} - a_{q_i} \frac{\partial b_{p_i}}{\partial t} \right) + \big((b, H), a\big).$$

Die Differenz dieser beiden Gleichungen ergibt aber wegen (XIV; 86) und (XIV; 85)

$$\frac{\partial (a, b)}{\partial t} - \big((H, a), b\big) - \big((b, H), a\big) = \frac{\partial (a, b)}{\partial t} + \big((a, b), H\big) = 0.$$

Sind also zwei Integrale a, b des Problems als Funktionen der kanonischen Variablen q_i, p_i bekannt, so erhält man durch Bildung des POISSONschen Klammerausdrucks (a, b) ein weiteres Integral. Allerdings hält dieser Satz weniger, als er verspricht; denn es wird sich in vielen Fällen lediglich das triviale Ergebnis $(a, b) = 0$ herausstellen, oder (a, b) ist eine Funktion von a und b und daher kein neues Integral. Im Zweikörperproblem, dessen Differentialgleichungen man nach Abschnitt 125 für die Variablen

$$q_i = x, y, z; \quad p_i = \dot{q}_i = \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$$

in der kanonischen Form (XIV; 56) schreiben kann, sind

$$a = y \dot{z} - z \dot{y} = \text{const}; \quad b = z \dot{x} - x \dot{z} = \text{const}$$

zwei der drei Flächenintegrale. Der POISSONsche Klammerausdruck

$$(a, b) = \sum_i \left(\frac{\partial a}{\partial q_i} \frac{\partial b}{\partial p_i} - \frac{\partial a}{\partial p_i} \frac{\partial b}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial b}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial a}{\partial \dot{z}} \frac{\partial b}{\partial z} =$$
$$= x \dot{y} - y \dot{x} = c = \text{const}$$

liefert dann das dritte, und es ist klar, daß man auf Grund dieses Vorrats an Integralen mit Hilfe des POISSONschen Satzes nicht weiterkommt. In bezug auf diesen Satz bilden also die drei Flächenintegrale eine ringartig in sich geschlossene Folge. Die Anwendung dieses Verfahrens auf die sechs Schwerpunktsintegrale führt auf das triviale Ergebnis $(a, b) = 0$, wenn a und b zwei dieser Integrale sind.

Der Grund für das Versagen des POISSONschen Satzes in diesen Fällen ist, daß es sich hier bei den Ausgangsintegralen um solche allgemeiner Art handelt, die dynamischen Problemen der verschiedensten Art gemeinsam sind. JACOBI schreibt hierüber[1]: „Damit ein Integral, mit einem zweiten kombiniert, nach und nach alle Integrale liefere, muß es ein solches sein, welches dem besonderen Problem angehört. Aber die ersten Integrale, welche für ein vorgelegtes Problem gefunden werden, sind in der Regel diejenigen, welche aus allgemeinen Prinzipien (z.B. der Erhaltung der Flächen) folgen, mithin dem besonderen Problem nicht eigentümlich angehören. Daher kann man nicht verlangen, daß aus ihnen alle Integrale abgeleitet werden sollen."

---

[1]) C. G. J. JACOBI, Vorlesungen über Dynamik. Gesammelte Werke, Supplementband, Berlin 1884, Nachdruck 1943, S. 269.

Die LAGRANGEschen Klammerausdrücke, die den POISSONschen als inverse Formeln gegenüberstehen, besitzen gleich diesen die Eigenschaft, daß, wenn a, b zwei Integrale sind, auch

$$[a, b] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial q_i}{\partial a} \frac{\partial p_i}{\partial b} - \frac{\partial p_i}{\partial a} \frac{\partial q_i}{\partial b} \right)$$

Konstante des Problems und daher unter Umständen neue Integrale darstellen. In der Tat läßt sich zeigen, daß

$$\frac{d[a, b]}{dt} = 0 \tag{XIV; 87}$$

ist. Da die Gleichungen (XIV; 79) identisch für alle Lösungen $q_i(\alpha, \beta, t)$, $p_i(\alpha, \beta, t)$ erfüllt sind, kann man, wenn a irgendeins der Integrale ist, nach dieser Konstanten differenzieren und erhält

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial a} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial a}; \quad \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial a} = -\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial a}$$

oder, da aus $H = H(q, p)$

$$\frac{\partial H}{\partial a} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial a} + \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial a} \right)$$

folgt,

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial a} = \sum_k \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial a} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial a} \right),$$

$$\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial a} = -\sum_k \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial a} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial a} \right).$$

Ist nun b ein anderes Integral, so wird

$$\sum_i \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial a} \frac{\partial p_i}{\partial b} - \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial a} \frac{\partial q_i}{\partial b} \right) = \sum_i \sum_k \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial a} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial a} \right) \frac{\partial p_i}{\partial b} +$$
$$+ \sum_i \sum_k \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial a} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial a} \right) \frac{\partial q_i}{\partial b}.$$

Da aber die rechte Seite dieser Gleichung in a und b symmetrisch ist, ihren Wert also nicht ändert, wenn man a und b vertauscht, folgt auch für die linke Seite

$$\sum_i \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial a} \frac{\partial p_i}{\partial b} - \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial a} \frac{\partial q_i}{\partial b} \right) = \sum_i \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial b} \frac{\partial p_i}{\partial a} - \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial b} \frac{\partial q_i}{\partial a} \right).$$

Das ist aber, wegen $\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial a}\right), \ldots$, genau die Behauptung (XIV; 87).

Die große Bedeutung der LAGRANGEschen Klammerausdrücke für die Theorie ist schon in Abschnitt 123 hervorgehoben worden und wird im nächsten Abschnitt, im Zusammenhang mit der Methode der Variation der Konstanten und der Lösung des Störungsproblems, noch deutlicher zutage treten. Andererseits

folgt aus dem LAGRANGEschen Satz, daß $[a, b]$ ein Integral des Problems ist, wenn a und b Integrale sind, nicht, wie aus dem POISSONschen, die Möglichkeit, unbekannte Integrale aus bekannten abzuleiten. Denn die LAGRANGEschen Klammern sind ja aus den partiellen Ableitungen sämtlicher Lösungen des Problems nach gewissen Integrationskonstanten aufgebaut, setzen also voraus, daß die allgemeine Lösung des Problems bereits bekannt ist.

Da der POISSONsche und der LAGRANGEsche Klammerausdruck schon der Form nach eine enge Verwandtschaft miteinander zeigen, darf man erwarten, daß auch enge mathematische Beziehungen zwischen ihnen bestehen. In der Tat läßt sich zeigen, daß die LAGRANGEschen Klammern sich als Funktionen der POISSONschen schreiben lassen und umgekehrt. Hieraus folgt natürlich ohne weiteres die Richtigkeit des LAGRANGEschen Satzes (XIV; 87), wenn der POISSONsche Satz (XIV; 84) bewiesen ist. Der mathematische Zusammenhang zwischen den $4n^2$ POISSONschen Klammern, die sich aus den $2n$ Integralen eines Problems bilden lassen, und den $4n^2$ LAGRANGEschen Klammern findet seinen prägnantesten Ausdruck in dem Satz, daß die aus diesen Elementen gebildeten Determinanten beider Art konjugiert zueinander sind, d.h., daß ihr Produkt gleich der Einheit ist oder daß jede von ihnen die Reziproke der anderen darstellt. Den Beweis dieses Satzes werden wir im nächsten Abschnitt nachholen.

KAPITEL XV

DIE METHODE DER VARIATION DER KONSTANTEN

127. *Die Methode der Variation der Konstanten*

In den vorhergehenden Abschnitten ist gezeigt worden, daß die HAMILTON-JACOBIsche Theorie der kanonischen Differentialgleichungssysteme große Vorteile bei der Behandlung dynamischer Probleme bietet, insbesondere insofern, als die Form der Bewegungsgleichungen gänzlich unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems bleibt, wenn man sich auf die immer noch unerschöpfliche Menge kanonischer Systeme beschränkt. Daß diese Theorie auch für die praktische Bewältigung konkreter Aufgaben der Himmelsmechanik machtvolle Hilfsmittel bereithält, lehrt die von LAGRANGE geschaffene Methode der Variation der Konstanten, die einen brauchbaren Weg zur Berechnung der Bewegungen der Himmelskörper unseres Sonnensystems weist, die aber erst im Lichte der HAMILTON-JACOBIschen Theorie ihre außerordentlichen Schönheiten erkennen läßt.

Die Anwendung der Methode der Variation der Konstanten setzt voraus, daß eine genäherte Lösung des Bewegungsproblems bereits bekannt ist. Diese Voraussetzung ist im Planetensystem weitgehend erfüllt; wir wissen ja, daß die Planeten um die Sonne annähernd in KEPLERschen Ellipsen laufen und daß diese genäherte Bewegung, die wir mathematisch vollständig beherrschen, durch die von den übrigen Körpern des Sonnensystems ausgeübten Gravitationskräfte nur verhältnismäßig geringfügige Störungen erleidet.

Um diesen Gedankengang und gewisse bei seiner Darstellung auftretende Begriffe zu fixieren, stellen wir uns den Fall vor, daß die Sonne (Masse $m_1 = 1$) von zwei Planeten (Massen $m_2 = m \ll 1$; $m_3 = \mu \ll 1$) umlaufen wird. Die Gleichungen der Relativbewegung von m um m_1, die von μ gestört wird, lauten dann nach (XI; 23)

$$\text{(XV; 1)} \qquad \ddot{\mathfrak{q}} = -\varkappa^2 \frac{\mathfrak{q}}{r^3} + k^2 \mu \left(\frac{\mathfrak{q}_1 - \mathfrak{q}}{\varrho^3} - \frac{\mathfrak{q}_1}{r_1^3} \right), \qquad \varkappa^2 = k^2(1 + m),$$

wenn $\mathfrak{q}$ den heliozentrischen Ortsvektor von m, $\mathfrak{q}_1$ den von μ bezeichnet und

$$|\mathfrak{q}| = r; \quad |\mathfrak{q}_1| = r_1; \quad |\mathfrak{q}_1 - \mathfrak{q}| = \varrho$$

gesetzt wird. Der Betrag des Störungsvektors

$$\text{(XV; 2)} \qquad \mathfrak{R} = k^2 \mu \left(\frac{\mathfrak{q}_1 - \mathfrak{q}}{\varrho^3} - \frac{\mathfrak{q}_1}{r_1^3} \right)$$

ist im allgemeinen sehr viel kleiner als der Betrag des ersten Summanden auf der rechten Seite von (XV; 1). Die Bewegung des Planeten wird daher annähernd durch die Differentialgleichungen des Zweikörperproblems,

$$\text{(XV; 3)} \qquad \ddot{\mathfrak{q}}' = -\varkappa^2 \frac{\mathfrak{q}'}{r'^3}, \quad r' = |\mathfrak{q}'|,$$

beschrieben.

Wir denken uns nun, daß beide Bewegungen, die gestörte (XV; 2) und die ungestörte (XV; 3), zu einer bestimmten Zeit, der *Epoche* $t = t_0$, unter den gleichen Anfangsbedingungen starten, d.h., daß zur Zeit $t = t_0$ die Vektoren des Ortes und der Geschwindigkeit des Planeten m in beiden Fällen dieselben sind. Dann lassen sich die Koordinaten der Ortsvektoren $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'$ in einer gewissen Umgebung der Epoche in TAYLORsche Reihen entwickeln:

$$\text{(XV; 4)} \quad \begin{cases} \text{a) gestörte Bewegung:} & \mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0 + \dot{\mathfrak{q}}_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\ddot{\mathfrak{q}}_0(t-t_0)^2 + \cdots, \\ \text{b) ungestörte Bewegung:} & \mathfrak{q}' = \mathfrak{q}'_0 + \dot{\mathfrak{q}}'_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\ddot{\mathfrak{q}}'_0(t-t_0)^2 + \cdots. \end{cases}$$

Nun ist aber nach unserer Annahme $\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{q}'_0$, $\dot{\mathfrak{q}}_0 = \dot{\mathfrak{q}}'_0$. Dagegen ist nach (XV; 1) und (XV; 3)

$$\ddot{\mathfrak{q}}_0 - \ddot{\mathfrak{q}}'_0 = \mathfrak{R}_0,$$

wenn $\mathfrak{R}_0$ den für die Epoche gültigen Wert des Störungsvektors bezeichnet. Die Differenz der beiden Entwicklungen (XV; 4) ergibt demnach

$$\mathfrak{q} - \mathfrak{q}' = \frac{1}{2}\mathfrak{R}_0(t-t_0)^2 + \langle\text{Glieder höherer Ordnung}\rangle.$$

Die beiden Bewegungen unterscheiden sich also in der Umgebung des Ausgangsortes um Beträge von der zweiten Ordnung in der Zwischenzeit $t - t_0$, und der Koeffizient $^1/_2\,\mathfrak{R}_0$ ist nach (XV; 2) wegen des Faktors μ sehr klein. Gestörte und ungestörte Bewegung werden sich also für kleine Zwischenzeiten nur wenig unterscheiden und sich in t_0 selbst einander anschmiegen (lat. osculari). Man bezeichnet daher die KEPLERsche Bewegung (XV; 3), die mit der gestörten Ausgangsort und Ausgangsgeschwindigkeit gemeinsam hat, als *oskulierende Bewegung*, die Epoche t_0 als *Oskulationsepoche* und die Kegelschnittselemente der oskulierenden Bahn als *oskulierende Elemente*.

Ist μ genügend klein gegen $1 + m$ und darf man den Fall ausschließen, daß trotzdem $|\mathfrak{R}|$ sehr groß wird (etwa, wenn zu irgendeiner Zeit beide Planeten einander sehr nahe kommen, also ϱ sehr klein wird), so wird sich die gestörte Bahn von der oskulierenden auch während längerer Zeiträume nur wenig entfernen. Sofern man sich auf kurze Bahnbögen beschränkt, wie im Falle einer Bahnbestimmung (s. Abschnitt 78), ist die oskulierende Bahn dem Problem als hinreichende Näherung stets angepaßt, wenn man als Oskulationsort einen Bahnpunkt wählt, der etwa in der Mitte dieses Bahnabschnitts liegt. Anders ist es, wenn es sich darum handelt, geeignete Näherungslösungen für sehr große Zeiträume als Grundlage für die Analyse der gestörten Bewegung aufzusuchen. Dann wären Oskulationsepoche und Oskulationsort, wie auch immer man sie wählen würde, vor anderen Zeiten und Bahnpunkten ausgezeichnet, ohne daß ein zwingender Grund vorläge, gerade diesen Teil der Bahn zu bevorzugen. Sofern man überhaupt KEPLERsche Bahnen als Näherungen benutzen will, wäre es in diesem Fall wesentlich besser, die Näherungslösung so zu bestimmen, daß die Abweichungen zwischen gestörter und ungestörter Bewegung (die *Störungen*), über größere Zeiträume genommen, möglichst klein bleiben, etwa im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate oder nach einem ähnlichen

Prinzip. Solche Bahnen, die von H. GYLDÉN als „intermediäre Bahnen" bezeichnet werden, brauchen in keinem Zeitpunkt Ort und Geschwindigkeit gleichzeitig mit der gestörten Bahn gemeinsam zu haben, also diese zu oskulieren. Sie brauchen aber auch überhaupt keine Kegelschnittbahnen zu sein. Wir werden später (Kapitel XVI) sehen, daß es möglich ist, von den Störungen gewisse „säkulare" (d. h. mit der Zeit monoton fortschreitende) oder auch langperiodische Glieder abzuspalten, deren Elemente man durch teilweise Integration der Störungsgleichungen ermitteln kann, um sie mit der intermediären Bahn zu vereinigen. So kann man z. B. die fortschreitenden Bewegungen der Bahnknoten und der Apsiden, deren Beträge man, wie später bewiesen werden soll, aus den Bewegungsgleichungen ableiten kann, mit in die intermediäre Bahn hineinnehmen und erhält so Näherungen, die sich – im Mittel über längere Zeitintervalle – dem wahren Verlauf der Bewegung erheblich besser anpassen als jede mögliche oskulierende Kegelschnittbahn. Dieses hier skizzierte Verfahren wird mit besonderem Erfolg bei der Analyse der Mondbewegung angewandt; denn dort sind die Störungen durch die Sonne so beträchtlich, daß KEPLERsche Ellipsen als Näherungsbahnen höchstens für sehr kleine Zwischenzeiten ausreichen.

Um die Begriffe zu fixieren, wollen wir zunächst annehmen, daß die intermediäre Bahn eine oskulierende Kegelschnittbewegung sei. Zur Oskulationsepoche t gehört dann eine oskulierende Bahn mit den sechs Bahnelementen $a, e, i, \ldots$ Wäre die Bewegung ungestört, so blieben diese Elemente unverändert, wenn man die Oskulationsepoche beliebig verschiebt. Bei gestörter Bewegung werden die Elemente aber langsam veränderliche Funktionen von t sein: An die Stelle der Konstanten $a, e, i, \ldots$ treten also die variablen Größen $a(t), e(t), i(t), \ldots$ Diese werden gewissen Differentialgleichungen genügen, deren Aufstellung und Lösung das Ziel der Methode ist.

Es sei nun allgemein eine gestörte Bewegung durch ein kanonisches System von Differentialgleichungen

$$\text{(XV; 5)} \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

beschrieben, und es sei möglich, von der HAMILTONschen Funktion $H = H(q, p, t)$, die allerdings die Zeit t gewöhnlich nicht explizit enthalten wird, einen wesentlichen Teil H_0 abzuspalten, so daß

$$H = H_0 + H_1$$

ist und das System

$$\text{(XV; 6)} \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i}$$

vollständig integriert werden kann. Es sind also $2n$ Funktionen

$$\text{(XV; 7)} \qquad q_i = q_i(\alpha, \beta, t); \quad p_i = p_i(\alpha, \beta, t)$$

der Zeit t und der Integrationskonstanten α_i, β_i bekannt, die den Gleichungen (XV; 6) genügen. Hingegen werden die Gleichungen (XV; 5) durch diese Funktionen nicht befriedigt. Faßt man aber die α_i, β_i als Funktionen der Zeit auf, so stellt (XV; 7) eine Koordinatentransformation dar, durch die man die

q_i, p_i in neue Variable α_i, β_i überführt, und man kann nun nach den Bedingungen fragen, denen die $\alpha_i(t), \beta_i(t)$ genügen müssen, damit die so variierten (d.h. durch Variabilisierung der Konstanten α_i, β_i umgedeuteten) Funktionen (XV; 7) den Differentialgleichungen (XV; 5) der gestörten Bewegung genügen.

Betrachten wir in diesem Sinne in (XV; 7) die α_i, β_i als Funktionen der Zeit, so gilt (XV; 5), während die Gleichungen (XV; 6) dann in der Form

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}; \quad \frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i} \tag{XV; 8}$$

geschrieben werden müssen. Denn (XV; 6) ist ja nur erfüllt, wenn man bei der Differentiation von (XV; 7) nach der Zeit die α_i, β_i als Konstante ansieht, d.h., die linken Seiten von (XV; 6) entsprechen den *partiellen* Ableitungen von (XV; 7) nach t, in denen die implizite Abhängigkeit der $\alpha(t), \beta(t)$ von der Zeit unberücksichtigt bleibt.

Differenziert man (XV; 7) total nach der Zeit, so erhält man, indem man (XV; 8) und (XV; 5) berücksichtigt,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_0}{\partial p_i} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_k}\dot{\alpha}_k + \frac{\partial q_i}{\partial \beta_k}\dot{\beta}_k\right) = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k}\dot{\alpha}_k + \frac{\partial p_i}{\partial \beta_k}\dot{\beta}_k\right) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

oder, wegen $H - H_0 = H_1$,

$$\left\{\begin{aligned} \sum_k\left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_k}\dot{\alpha}_k + \frac{\partial q_i}{\partial \beta_k}\dot{\beta}_k\right) &= \frac{\partial H_1}{\partial p_i}, \\ \sum_k\left(\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k}\dot{\alpha}_k + \frac{\partial p_i}{\partial \beta_k}\dot{\beta}_k\right) &= -\frac{\partial H_1}{\partial q_i}. \end{aligned}\right. \qquad \begin{array}{c|c|c} & \text{(I)} & \text{(II)} \\ & \dfrac{\partial p_i}{\partial \alpha_j} & \dfrac{\partial p_i}{\partial \beta_j} \\ & -\dfrac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} & -\dfrac{\partial q_i}{\partial \beta_j} \end{array} \tag{XV; 9}$$

Das sind $2n$ lineare Gleichungen, aus denen man die $\dot{\alpha}_k, \dot{\beta}_k$ eindeutig bestimmen kann, wenn die Funktionaldeterminante

$$\left|\frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(\alpha_k, \beta_k)}\right|$$

nicht verschwindet, was hier vorausgesetzt werden darf. Multipliziert man die Gleichungen (XV; 9) mit den Faktoren (I) bzw. (II), addiert sie und summiert dann über alle i, so erhält man

$$\sum_i\sum_k\left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_k}\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j}\right)\dot{\alpha}_k + \sum_i\sum_k\left(\frac{\partial q_i}{\partial \beta_k}\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial p_i}{\partial \beta_k}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j}\right)\dot{\beta}_k =$$
$$= \sum_i\left(\frac{\partial H_1}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial H_1}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j}\right),$$

$$\sum_i\sum_k\left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_k}\frac{\partial p_i}{\partial \beta_j} - \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j}\right)\dot{\alpha}_k + \sum_i\sum_k\left(\frac{\partial q_i}{\partial \beta_k}\frac{\partial p_i}{\partial \beta_j} - \frac{\partial p_i}{\partial \beta_k}\frac{\partial q_i}{\partial \beta_j}\right)\dot{\beta}_k =$$
$$= \sum_i\left(\frac{\partial H_1}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial \beta_j} + \frac{\partial H_1}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \beta_j}\right)$$

oder, wenn man die LAGRANGEschen Klammerausdrücke (XIV; 83) benutzt,

$$\text{(XV; 10)} \quad \begin{cases} \sum_k [\alpha_k, \alpha_j]\,\dot\alpha_k + \sum_k [\beta_k, \alpha_j]\,\dot\beta_k = \dfrac{\partial H_1}{\partial \alpha_j}, \\ \sum_k [\alpha_k, \beta_j]\,\dot\alpha_k + \sum_k [\beta_k, \beta_j]\,\dot\beta_k = \dfrac{\partial H_1}{\partial \beta_j}, \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Sind insbesondere die α_i, β_i *kanonische* Variable, so gelten für sie die Bedingungen (XIV; 27), d.h., es verschwinden sämtliche Klammerausdrücke außer $[\alpha_i, \beta_i] = -[\beta_i, \alpha_i] = 1$, und es ist daher

$$\text{(XV; 11)} \qquad \dot\alpha_i = \frac{\partial H_1}{\partial \beta_i}; \quad \dot\beta_i = -\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_i}.$$

Die Differentialgleichungen, denen die α_i, β_i als Funktionen der Zeit genügen müssen, damit die q_i, p_i das System (XV; 5) befriedigen, sind also ebenfalls von kanonischer Form, wenn die Konstanten der intermediären Bahn kanonische Elemente waren.

Man kann die Gültigkeit dieses schönen und für die praktische Himmelsmechanik ungemein fruchtbaren Satzes auch fast ohne Rechnung einsehen, wenn man die in Abschnitt 123 und 124 beschriebenen allgemeinen Gedankengänge zu Hilfe nimmt. Man nehme, wie oben, die Zerlegung

$$\text{(XV; 12)} \qquad H(q, p, t) = H_0(q, p, t) + H_1(q, p, t)$$

der HAMILTONschen Funktion vor, und es gelte für H_0 die HAMILTON-JACOBIsche partielle Differentialgleichung

$$\text{(XV; 13)} \qquad H_0\left(q, \frac{\partial w}{\partial t}, t\right) + \frac{\partial w}{\partial t} = 0,$$

deren Lösung $w(\xi, q, t)$ mit den n Integrationskonstanten $\xi_i = \alpha_i$ bekannt sei. Betrachtet man diese Konstanten aber als Funktionen der Zeit, so lassen sie sich nach (XIV; 49) so bestimmen, daß

$$\text{(XV; 14)} \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = G - H, \quad \frac{\partial w}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi_i} = \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} = -\beta_i$$

erfüllt ist und die β_i die zu den α_i konjugierten Variablen darstellen. Die neue, zu den transformierten kanonischen Koordinaten α_i, β_i gehörende HAMILTONsche Funktion ist dann

$$G = H + \frac{\partial w}{\partial t} = H_0 + H_1 + \frac{\partial w}{\partial t} = H_1$$

wegen (XV; 13). Damit ist aber gezeigt, daß die α_i, β_i den kanonischen Gleichungen (XV; 11) genügen.

Unter Umständen läßt sich dieser Prozeß wiederholen, wenn es gelingt, aus H_1 wiederum einen integrablen Teil abzuspalten. Hier ist ein Weg angedeutet, durch Fortsetzung dieses Verfahrens die Integration der Bewegungsgleichungen in eine Folge einzelner Schritte zu zerlegen, von denen jeder weitere das vor-

hergehende Ergebnis verbessert. Ob ein solches Approximationsverfahren konvergiert oder nicht, wird in jedem Einzelfall besonders zu prüfen sein.

Bilden die α_i, β_i irgendein vollständiges System von Integrationskonstanten des ungestörten Problems, das nicht unbedingt kanonisch sein muß, so werden die Differentialgleichungen für die veränderlichen Größen

$$\alpha_i(q, p, t); \quad \beta_i(q, p, t)$$

des gestörten Problems durch Auflösung der linearen Gleichungen (XV; 10) erhalten. Man leitet die Lösungen, die formal

$$\dot{\alpha}_j = \sum_k A_{jk} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_k} + \sum_k B_{jk} \frac{\partial H_1}{\partial \beta_k},$$

$$\dot{\beta}_j = \sum_k C_{jk} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_k} + \sum_k D_{jk} \frac{\partial H_1}{\partial \beta_k}$$

lauten, direkt aus (XIV; 82):

$$\text{(XV; 15)} \qquad \dot{\alpha}_i = \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + (\alpha_i, H); \quad \dot{\beta}_i = \frac{\partial \beta_i}{\partial t} + (\beta_i, H),$$

ab. Es sind nämlich $\partial\alpha_i/\partial t$, $\partial\beta_i/\partial t$ diejenigen Ausdrücke, die man erhält, wenn man bei der Differentiation nach t nur die explizite Abhängigkeit der Koordinaten q_i, p_i von der Zeit berücksichtigt, also die α_i, β_i als Konstante ansieht. Es gelten dann die auf das ungestörte Problem angewandten Gleichungen (XIV; 82)

$$0 = \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + (\alpha_i, H_0); \quad 0 = \frac{\partial \beta_i}{\partial t} + (\beta_i, H_0),$$

durch die man $\partial\alpha_i/\partial t$, $\partial\beta_i/\partial t$ aus (XV; 15) eliminieren kann. Somit ergibt sich

$$\dot{\alpha}_j = (\alpha_j, H - H_0) = (\alpha_j, H_1); \quad \dot{\beta}_j = (\beta_j, H - H_0) = (\beta_j, H_1)$$

oder, wenn man die Poissonschen Klammerausdrücke

$$(\alpha_j, H_1) = \sum_i \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial q_i}\frac{\partial H_1}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial p_i}\frac{\partial H_1}{\partial q_i}\right) =$$

$$= \sum_i\sum_k \left\{\frac{\partial \alpha_j}{\partial q_i}\left(\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_k}\frac{\partial \alpha_k}{\partial p_i} + \frac{\partial H_1}{\partial \beta_k}\frac{\partial \beta_k}{\partial p_i}\right) - \frac{\partial \alpha_j}{\partial p_i}\left(\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_k}\frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i} + \frac{\partial H_1}{\partial \beta_k}\frac{\partial \beta_k}{\partial q_i}\right)\right\} =$$

$$= \sum_i\sum_k \left\{\left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial q_i}\frac{\partial \alpha_k}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial p_i}\frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i}\right)\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_k} + \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial q_i}\frac{\partial \beta_k}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial p_i}\frac{\partial \beta_k}{\partial q_i}\right)\frac{\partial H_1}{\partial \beta_k}\right\}$$

schreibt und dieselbe Umformung auch auf (β_j, H_1) anwendet,

$$\text{(XV; 16)} \qquad \left\{\begin{aligned} \dot{\alpha}_j &= \sum_k (\alpha_j, \alpha_k)\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_k} + \sum_k (\alpha_j, \beta_k)\frac{\partial H_1}{\partial \beta_k}, \\ \dot{\beta}_j &= \sum_k (\beta_j, \alpha_k)\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_k} + \sum_k (\beta_j, \beta_k)\frac{\partial H_1}{\partial \beta_k}, \end{aligned}\right. \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Sind speziell die α_i, β_i kanonische Variable, so gilt (XV; 11), und mit diesem System ist (XV; 16) nur verträglich, wenn

$$\text{(XV; 17)} \qquad \begin{cases} (\alpha_j, \alpha_k) = \quad (\beta_j, \beta_k) = 0 \quad \text{für alle} \quad j, k, \\ (\alpha_j, \beta_k) = -(\beta_k, \alpha_j) = e_{jk} \begin{cases} = 1 & \text{für} \quad j = k, \\ = 0 & \text{für} \quad j \neq k \end{cases} \end{cases}$$

ist. Die POISSONschen Klammern genügen also, wenn die α_i, β_i kanonisch sind, denselben Bedingungen (XIV; 27) wie die LAGRANGEschen.

Die Determinanten der linearen Gleichungssysteme (XV; 10) bzw. (XV; 16), die sich gegenseitig auflösen und daher konjugiert sind, haben die Form

$$D = \begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{vmatrix} \quad \text{bzw.} \quad D' = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}' & \mathfrak{C}' \\ \mathfrak{B}' & \mathfrak{D}' \end{vmatrix},$$

wenn wir unter $\mathfrak{A} = (a_{ik}), \ldots, \mathfrak{D} = (d_{ik})$ die quadratischen Matrizen mit den Elementen[1])

$$a_{ik} = [\alpha_k, \alpha_i]; \quad b_{ik} = [\beta_k, \alpha_i]; \quad c_{ik} = [\alpha_k, \beta_i]; \quad d_{ik} = [\beta_k, \beta_i]$$

und unter $\mathfrak{A}', \ldots, \mathfrak{D}'$ die Matrizen mit den Elementen

$$a'_{ik} = (\alpha_i, \alpha_k); \quad b'_{ik} = (\beta_i, \alpha_k); \quad c'_{ik} = (\alpha_i, \beta_k); \quad d'_{ik} = (\beta_i, \beta_k)$$

verstehen. Da D und D' konjugiert sind, gilt immer $DD' = 1$, womit die am Schluß von Abschnitt 126 ausgesprochene Behauptung bewiesen ist. Ferner ist jedes Element von D' gleich der mit $1/D$ multiplizierten Unterdeterminante des entsprechenden Elementes von D, und es gilt auch das Umgekehrte. Daraus folgt, daß sich die Klammerausdrücke der einen Art durch die der anderen Art in Form algebraischer Funktionen darstellen lassen. Sind speziell die α_i, β_i kanonische Variable, so gelten die Bedingungen (XIV; 27) und (XV; 17), und es ist dann

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' = 0; \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}' = -\mathfrak{E}; \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{C}' = \mathfrak{E}; \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{D}' = 0$$

und daher

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -\mathfrak{E} \\ \mathfrak{E} & 0 \end{vmatrix} = 1; \quad D' = \begin{vmatrix} 0 & \mathfrak{E} \\ -\mathfrak{E} & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

128. *Form der Klammerausdrücke für die elliptischen Elemente einer Planetenbahn*

Die Störungsgleichungen (XV; 16), deren Integration die oskulierenden Elemente α_i, β_i einer Planetenbahn als Funktionen der Oskulationsepoche t liefert, nehmen, wie in Abschnitt 127 gezeigt wurde, kanonische Form an, wenn

[1]) Wie üblich, bedeutet hier i die Nummer der Zeile, k die der Spalte.

die α_i, β_i kanonische Elemente sind. In der Praxis ist es aber aus mancherlei Gründen bequemer, statt der kanonischen Elemente (XIV; 69) und (XIV; 70), nämlich

$$\text{(XV; 18)}\quad \begin{cases} \xi_1 = -\dfrac{\varkappa^2}{2a}; & \xi_2 = \varkappa\sqrt{p}; \quad \xi_3 = \varkappa\sqrt{p}\cos i, \\ \eta_1 = T; & \eta_2 = -\omega; \quad \eta_3 = -\Omega, \end{cases} \qquad [p = a(1 - e^2)]$$

(oder anderer, die man durch kanonische Transformationen auf vielerlei Art aus diesen erzeugen kann), die klassischen Elemente selbst, nämlich

$$\text{(XV; 19)}\quad \begin{cases} \alpha_1 = a; & \alpha_2 = e; \quad \alpha_3 = i, \\ \alpha_4 = T; & \alpha_5 = \omega; \quad \alpha_6 = \Omega \end{cases}$$

zu benutzen, da sich mit ihrer Hilfe die Koordinaten des bewegten Körpers nach den allgemein gebräuchlichen Formeln der Ephemeridenrechnung (s. Kapitel IV) darstellen lassen. Bei gestörter Bewegung genügen die Elemente (XV; 19) den Differentialgleichungen (XV; 16), die wir dann in der Form

$$\dot{\alpha}_i = \sum_{k=1}^{6} (\alpha_i, \alpha_k) \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_k}$$

schreiben dürfen und deren Koeffizienten, die POISSONschen Klammerausdrücke, nun nicht alle 0 oder ± 1 sind. Insgesamt gibt es in diesem Fall 36 solcher Ausdrücke, von denen aber nur 15 wesentlich verschieden sind, da ja $(\alpha_i, \alpha_k) = (\alpha_k, \alpha_i)$ ist. Wir werden ferner feststellen, daß von diesen 15 Ausdrücken 9 verschwinden, so daß nur noch 6 übrigbleiben, die als Funktionen der Elemente (XV; 19) zu bestimmen sind.

Um die POISSONschen Klammern

$$\text{(XV; 20)}\qquad (\alpha_i, \alpha_k) = \sum_j \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial q_j} \frac{\partial \alpha_k}{\partial p_j} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_j} \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_j} \right)$$

explizit durch die Elemente darstellen zu können, müßte man diese als Funktionen der Variablen q_j, p_j kennen, die den kanonischen Differentialgleichungen

$$\text{(XV; 21)}\qquad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}; \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

des Problems genügen. Da es aber im allgemeinen schwierig oder wenigstens sehr umständlich sein wird, aus den bekannten Lösungen

$$\text{(XV; 22)}\qquad q_j = q_j(\alpha, t); \quad p_j = p_j(\alpha, t)$$

des ungestörten Problems die (im gestörten Problem variablen) Parameter

$$\alpha_i = \alpha_i(q, p, t)$$

zu berechnen, ist es bequemer, statt der POISSONschen Klammern die LAGRANGEschen

(XV; 23) $$[\alpha_i, \alpha_k] = \sum_j \left(\frac{\partial q_j}{\partial \alpha_i} \frac{\partial p_j}{\partial \alpha_k} - \frac{\partial q_j}{\partial \alpha_k} \frac{\partial p_j}{\partial \alpha_i} \right)$$

zu benutzen, aus denen man ja, wie bewiesen, die (α_i, α_k) in Form algebraischer Ausdrücke gewinnen kann und die man direkt mittels partieller Differentiation aus den Lösungen (XV; 22) erhält. Die obigen Überlegungen haben aber gezeigt, daß man statt der kanonischen Variablen q_j, p_j, die den Differentialgleichungen (XV; 21) genügen, andere benutzen darf, die aus ihnen durch kanonische Transformation hervorgehen, z. B. die (im ungestörten Problem konstanten) Variablen (XV; 18). Diese sind aber Lösungen der Störungsgleichungen (XV; 11), die hier

(XV; 24) $$\dot{\xi}_i = \frac{\partial H_1}{\partial \eta_i}; \quad \dot{\eta}_i = -\frac{\partial H_1}{\partial \xi_i}$$

lauten, so daß man statt (XV; 23)

$$[\alpha_i, \alpha_k] = \sum_j \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial \alpha_i} \frac{\partial \eta_j}{\partial \alpha_k} - \frac{\partial \xi_j}{\partial \alpha_k} \frac{\partial \eta_j}{\partial \alpha_i} \right)$$

schreiben darf, Ausdrücke, die aus (XV; 18) unmittelbar durch partielle Differentiation nach den Elementen (XV; 19) gewonnen werden.

In der Praxis der Störungsrechnung benutzt man meist statt T (Perihelzeit) und ω (Perihelabstand vom Knoten) die Elemente $\tilde{\omega} = \omega + \Omega$ (Länge des Perihels) und $\varepsilon = \tilde{\omega} - nT$ (mittlere Länge des Planeten zur Epoche $t = 0$). Die letztere soll, worauf wir in Abschnitt 133 noch zurückkommen werden, so definiert sein, daß die mittlere Bewegung n als Konstante angesehen wird, also in $n = \varkappa a^{-3/2}$ die große Halbachse a nicht als variables Element gilt. Führen wir auch hier diese neuen Elemente ein, so gibt das System (XV; 18)

$$\xi_1 = -\frac{\varkappa^2}{2a}; \quad \xi_2 = \varkappa \sqrt{a(1 - e^2)}; \quad \xi_3 = \varkappa \sqrt{a(1 - e^2)} \cos i,$$

$$\eta_1 = \frac{\tilde{\omega} - \varepsilon}{n}; \quad \eta_2 = \Omega - \tilde{\omega}; \qquad \eta_3 = -\Omega$$

die kanonischen Variablen ξ_i, η_i als Funktionen der variablen nichtkanonischen Bahnelemente

$$\alpha_1 = a; \quad \alpha_2 = e; \quad \alpha_3 = i,$$

$$\beta_1 = \varepsilon; \quad \beta_2 = \tilde{\omega}; \quad \beta_3 = \Omega.$$

Man erkennt, daß die Größen ξ nur von den α, die η nur von den β abhängen, so daß alle $[\alpha_i, \alpha_k]$ und $[\beta_i, \beta_k]$ verschwinden, während $[\alpha_i, \beta_k] = -[\beta_k, \alpha_i]$

ist. Es genügt also, die neun Größen $[\alpha_i, \beta_k]$ zu berechnen, die man aus den partiellen Ableitungen

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial \xi_1}{\partial a} = \dfrac{\varkappa^2}{2a^2}; & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial a} = \dfrac{\varkappa}{2\sqrt{p}}(1 - e^2); & \dfrac{\partial \xi_3}{\partial a} = \dfrac{\varkappa}{2\sqrt{p}}(1 - e^2)\cos i, \\
\dfrac{\partial \xi_1}{\partial e} = 0; & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial e} = -\dfrac{\varkappa}{\sqrt{p}}\, a\, e; & \dfrac{\partial \xi_3}{\partial e} = -\dfrac{\varkappa}{\sqrt{p}}\, a\, e \cos i, \\
\dfrac{\partial \xi_1}{\partial i} = 0; & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial i} = 0; & \dfrac{\partial \xi_3}{\partial i} = -\varkappa \sqrt{p}\sin i, \\
\dfrac{\partial \eta_1}{\partial \varepsilon} = -\dfrac{1}{n}; & \dfrac{\partial \eta_2}{\partial \varepsilon} = 0; & \dfrac{\partial \eta_3}{\partial \varepsilon} = 0, \\
\dfrac{\partial \eta_1}{\partial \tilde{\omega}} = \dfrac{1}{n}; & \dfrac{\partial \eta_2}{\partial \tilde{\omega}} = -1; & \dfrac{\partial \eta_3}{\partial \tilde{\omega}} = 0, \\
\dfrac{\partial \eta_1}{\partial \Omega} = 0; & \dfrac{\partial \eta_2}{\partial \Omega} = 1; & \dfrac{\partial \eta_3}{\partial \Omega} = -1
\end{array}$$

zusammenzufügen hat. Führt man in diese Ausdrücke statt $\varkappa, e, p = a(1 - e^2)$ den Exzentrizitätswinkel $\varphi = \arcsin e$ und die mittlere Bewegung $n = \varkappa\, a^{-3/2}$ ein, so erhält man schließlich die Matrix der LAGRANGEschen Klammerausdrücke:

(XV; 25)

$$\begin{pmatrix}
[a, \varepsilon] = -\dfrac{n\,a}{2} & [a, \tilde{\omega}] = \dfrac{n\,a}{2}(1 - \cos\varphi) & [a, \Omega] = \dfrac{n\,a}{2}(1 - \cos i)\cos\varphi \\
[e, \varepsilon] = 0 & [e, \tilde{\omega}] = n\,a^2 \tan\varphi & [e, \Omega] = -n a^2 (1 - \cos i)\tan\varphi \\
[i, \varepsilon] = 0 & [i, \tilde{\omega}] = 0 & [i, \Omega] = n\,a^2 \sin i \cos\varphi
\end{pmatrix},$$

deren Determinante

$$D = [a, \varepsilon] \cdot [e, \tilde{\omega}] \cdot [i, \Omega] = -\frac{1}{2} n^3 a^5 \sin\varphi \sin i$$

lautet. Hieraus erhält man aber sofort die POISSONschen Klammerausdrücke (α_i, β_i), indem man die zu $[\alpha_i, \beta_i]$ gehörigen Unterdeterminanten mit $1/D$ multipliziert. Es ergibt sich dann die Matrix der POISSONschen Klammern

(XV; 26)

$$\begin{pmatrix}
(a, \varepsilon) = -\dfrac{2}{n\,a} & (a, \tilde{\omega}) = 0 & (a, \Omega) = 0 \\
(e, \varepsilon) = \dfrac{1}{n\,a^2}\tan\dfrac{\varphi}{2}\cos\varphi & (e, \tilde{\omega}) = \dfrac{1}{n\,a^2}\cot\varphi & (e, \Omega) = 0 \\
(i, \varepsilon) = \dfrac{1}{n\,a^2}\tan\dfrac{i}{2}\sec\varphi & (i, \tilde{\omega}) = \dfrac{1}{n\,a^2}\tan\dfrac{i}{2}\sec\varphi & (i, \Omega) = \dfrac{1}{n\,a^2}\sec\varphi \operatorname{cosec} i
\end{pmatrix}.$$

Mit diesen Größen folgen dann die Differentialgleichungen (XV; 16), wenn man noch zur Abkürzung

(XV; 27) $$f = \frac{1}{n\,a^2}; \quad H_1 = F$$

setzt, in der Form

(XV; 28) $$\left\{\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -2f\,a\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{de}{dt} &= f\cot\varphi\left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{\omega}} + 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\,\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}\right), \\ \frac{di}{dt} &= f\sec\varphi\,\mathrm{cosec}\,i\left\{\frac{\partial F}{\partial \Omega} + 2\sin^2\frac{i}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{\omega}} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}\right)\right\}, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= f\left\{2a\frac{\partial F}{\partial a} - \tan\frac{\varphi}{2}\cos\varphi\frac{\partial F}{\partial e} - \tan\frac{i}{2}\sec\varphi\frac{\partial F}{\partial i}\right\}, \\ \frac{d\tilde{\omega}}{dt} &= -f\left\{\cot\varphi\frac{\partial F}{\partial e} + \tan\frac{i}{2}\sec\varphi\frac{\partial F}{\partial i}\right\}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= -f\sec\varphi\,\mathrm{cosec}\,i\frac{\partial F}{\partial i}. \end{aligned}\right.$$

Die HAMILTON-JACOBIsche Theorie gibt uns, wie oben gezeigt wurde, Mittel in die Hand, um die Berechnung der LAGRANGEschen Klammerausdrücke für einen gegebenen Satz von Bahnelementen mit wenigen Federstrichen zu ermöglichen. Natürlich gelangt man zu den gleichen Ergebnissen, wenn man von den Lösungen (XV; 22), also irgendwelchen kanonischen Koordinaten des Himmelskörpers als Funktionen der Zeit und der (variablen) Bahnelemente α_i, β_i, ausgeht, etwa von den rechtwinkligen Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten, die ja auch ein kanonisches System bilden. Sind diese $x_j = x, y, z$; $\dot{x}_j = \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, $(j = 1, 2, 3)$, so lassen sie sich durch die bekannten Formeln der Ephemeridenrechnung (Kapitel IV) in der Form

$$x_j = x_j(\alpha, t); \quad \dot{x}_j = \dot{x}_j(\alpha, t)$$

darstellen. Man kann mit deren Hilfe die Formulierung der LAGRANGEschen Klammerausdrücke

(XV; 29) $$[\alpha_i, \alpha_k] = \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial \alpha_i}\,\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \alpha_k} - \frac{\partial x_j}{\partial \alpha_k}\,\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \alpha_i}\right)$$

erzwingen. Es ist verschiedentlich versucht worden, dieses recht umständliche Verfahren zu vereinfachen und in eine Folge von eleganten und durchsichtigen Schlußfolgerungen zu zerlegen, so von A. Y. G. CAMPBELL[1]) und E. T. WHITTAKER, der eine besonders hübsche Variante[2]) der CAMPBELLschen

[1]) A. Y. G. CAMPBELL, M.N. 57, 118 (1897).

[2]) Siehe W. M. SMART, Celestial mechanics. London, New York und Toronto 1953, S. 76ff.

Methode angegeben hat. Es ist vielleicht nicht überflüssig, diese mathematisch sehr aufschlußreiche Deduktion hier anzuführen, da sie dem Leser anschaulich und eindrucksvoll die kunstvollen Schlußfolgerungen vor Augen führt, die bei der Anwendung der HAMILTON-JACOBIschen Gedankengänge einfach übersprungen werden, ohne daß die Sicherheit der Ergebnisse dadurch im geringsten leidet. Dem Anfänger, der diesen tief ins Wesen der Dinge greifenden und sehr abstrakten Überlegungen erfahrungsgemäß etwas fassungslos und mit einem Gefühl der Unsicherheit gegenübersteht, wird der Vergleich zwischen beiden Methoden, die zum gleichen Ziel führen – der WHITTAKERschen, bei der noch jeder Schritt umständlich, aber durchsichtig und nach elementaren Regeln ausgeführt wird, und der auf der HAMILTON-JACOBIschen Theorie beruhenden, die das Resultat fast ohne Zwischenrechnung hinzuschreiben gestattet –, sein Vertrauen in die letztere festigen.

Nach CAMPBELL lassen sich die LAGRANGEschen Klammerausdrücke (XV; 29) für die elliptische Bewegung eines Planeten aus den Hilfsfunktionen

$$A_\alpha = \dot{x}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \dot{y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \dot{z}\frac{\partial z}{\partial \alpha} \tag{XV; 30}$$

berechnen, wenn α eines der sechs Bahnelemente bedeutet; denn es ist ja, wenn β ein zweites dieser Elemente ist,

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} = [\alpha, \beta].$$

WHITTAKER löst die Aufgabe der Berechnung der A_α folgendermaßen: Es sei (Abb. 24, S. 194) an der heliozentrischen Sphäre P der Ort des Planeten in seiner Bahn KP, Π der Ort des Perihels, K der des aufsteigenden Knotens der Bahn mit der Ekliptik, und es seien x, y, z die rechtwinkligen ekliptikalen Koordinaten des Planeten, mit dem Frühlingspunkt ♈ als Richtung der positiven x-Achse. Dreht man nun das Koordinatensystem um die z-Achse, die nach dem Nordpol der Ekliptik zeigt, mit Ω als Drehungswinkel, so werden die Ausdrücke A_α in dem neuen Koordinatensystem, dessen x_1-Achse nach K zeigt, durch Einführung der orthogonalen Transformation

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cos\Omega - y_1 \sin\Omega, \\ y &= x_1 \sin\Omega + y_1 \cos\Omega, \\ z &= z_1 \end{aligned}$$

in (XV; 30) erhalten, und zwar wird

$$A_\alpha = \dot{x}_1\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + \dot{y}_1\frac{\partial y_1}{\partial \alpha} + \dot{z}_1\frac{\partial z_1}{\partial \alpha} + (x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1)\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}, \tag{XV; 31}$$

und es ist offensichtlich wegen des Flächensatzes (V; 7)

$$x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1 = \varkappa\sqrt{p}\cos i$$

als Projektion der Flächenkonstante $\varkappa\sqrt{p}$ auf die Ekliptikebene eine Konstante, die sich bei einer weiteren Transformation nicht ändern wird. Man führe

nun zwei weitere Drehungen aus: 1. eine Drehung um die x_1-Achse mit i als Drehungswinkel, die das System in ein x_2, y_2, z_2-System überführt, und 2. eine Drehung um die z_2-Achse mit ω als Drehungswinkel. Das so entstandene x_3, y_3, z_3-System ist, wenn i die Neigung der Bahnebene gegen die Ekliptik, ω den Abstand des Perihels vom Knoten bedeutet, so orientiert, daß die x_3, y_3-Ebene mit der Bahnebene und die x_3-Richtung mit der Richtung nach dem Perihel zusammenfällt. Für A_α erhält man dann statt (XV; 31)

$$A_\alpha = \dot{x}_3 \frac{\partial x_3}{\partial \alpha} + \dot{y}_3 \frac{\partial y_3}{\partial \alpha} + \dot{z}_3 \frac{\partial z_3}{\partial \alpha} + (x_3 \dot{y}_3 - y_3 \dot{x}_3) \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \\ + (y_2 \dot{z}_2 - z_2 \dot{y}_2) \frac{\partial i}{\partial \alpha} + (x_1 \dot{y}_1 - y_1 \dot{x}_1) \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}.$$

Es ist aber, da die z-Koordinate des Planeten im zweiten und dritten System nebst ihrer ersten Ableitung nach der Zeit verschwindet, falls die ungestörte Bahn die gestörte oskuliert, $z_2 = z_3 = 0$, $\dot{z}_2 = \dot{z}_3 = 0$ und daher

$$A_\alpha = \dot{x}_3 \frac{\partial x_3}{\partial \alpha} + \dot{y}_3 \frac{\partial y_3}{\partial \alpha} + \varkappa \sqrt{p} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \varkappa \sqrt{p} \cos i \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha};$$

denn es ist ja $x_3 \dot{y}_3 - y_3 \dot{x}_3$ mit der Flächenkonstante der Bahnbewegung selbst identisch. Es ist also noch der Ausdruck

$$\dot{x}_3 \frac{\partial x_3}{\partial \alpha} + \dot{y}_3 \frac{\partial y_3}{\partial \alpha}$$

als Funktion der Bahnelemente darzustellen. Nach (III; 52) ist, wenn

$$x_3 = r \cos v; \quad y_3 = r \sin v$$

gesetzt wird und wenn E die exzentrische Anomalie bedeutet,

$$x_3 = a(\cos E - e); \qquad \dot{x}_3 = -a \dot{E} \sin E,$$
$$y_3 = a \sqrt{1 - e^2} \sin E; \quad \dot{y}_3 = a \sqrt{1 - e^2} \dot{E} \cos E,$$

und man erhält hieraus durch Bildung der partiellen Ableitungen nach elementarer Rechnung

$$\dot{x}_3 \frac{\partial x_3}{\partial \alpha} + \dot{y}_3 \frac{\partial y_3}{\partial \alpha} = \\ = a \dot{E} (1 - e \cos E) \left[a(1 + e \cos E) \frac{\partial E}{\partial \alpha} + \sin E \left(e \frac{\partial a}{\partial \alpha} + a \frac{\partial e}{\partial \alpha} \right) \right]$$

oder, da wegen der Keplerschen Gleichung (IV; 32)

$$\dot{E}(1 - e \cos E) = n = \varkappa a^{-3/2}$$

ist,

$$\dot{x}_3 \frac{\partial x_3}{\partial \alpha} + \dot{y}_3 \frac{\partial y_3}{\partial \alpha} = \frac{\varkappa}{\sqrt{a}} \left[a(1 + e \cos E) \frac{\partial E}{\partial \alpha} + \sin E \frac{\partial (a e)}{\partial \alpha} \right].$$

Es läßt sich aber durch Nachrechnen leicht verifizieren, daß die rechte Seite dieser Gleichung in der Form

$$\text{(XV; 32)} \qquad -\frac{\varkappa}{2a}\frac{\partial}{\partial\alpha}[a^{3/2}(E - e\sin E)] + \frac{\varkappa}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}[\sqrt{a}(3E + e\sin E)]$$

geschrieben werden kann. Wegen

$$a^{3/2}(E - e\sin E) = \varkappa(t - T)$$

folgt aber

$$-\frac{\varkappa}{2a}\frac{\partial}{\partial\alpha}[a^{3/2}(E - e\sin E)] = \frac{\varkappa^2}{2a}\frac{\partial T}{\partial\alpha}.$$

Setzt man noch den zweiten Term von (XV; 32) gleich $\partial G/\partial\alpha$, so ergibt sich schließlich

$$A_\alpha = \frac{\varkappa^2}{2a}\frac{\partial T}{\partial\alpha} + \varkappa\sqrt{p}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} + \varkappa\sqrt{p}\cos i\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha} + \frac{\partial G}{\partial\alpha} =$$

$$= \frac{\partial G}{\partial\alpha} - \left(\xi_1\frac{\partial\eta_1}{\partial\alpha} + \xi_2\frac{\partial\eta_2}{\partial\alpha} + \xi_3\frac{\partial\eta_3}{\partial\alpha}\right),$$

und es sind ξ_i, η_i die kanonischen Elemente (XV; 18). Hieraus folgt aber sofort

$$[\alpha, \beta] = \frac{\partial A_\alpha}{\partial\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial\alpha} = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial\xi_j}{\partial\alpha}\frac{\partial\eta_j}{\partial\beta} - \frac{\partial\eta_j}{\partial\alpha}\frac{\partial\xi_j}{\partial\beta}\right),$$

und das ist genau die Formel, die wir weiter oben auf Grund der Hamilton-Jacobischen Theorie sofort hinschreiben konnten, da die Funktionen ξ_i, η_i aus den $x, \dot{x}, \ldots$ durch kanonische Transformation hervorgehen.

129. *Kanonische und halbkanonische Differentialgleichungssysteme*

Die Vorteile kanonischer Bewegungsgleichungen bei der Anwendung der Methode der Variation der Konstanten auf das Problem der gestörten Planetenbewegung sind so evident, daß es sich lohnt, das Verhalten der in der Himmelsmechanik gebräuchlichen Koordinatensysteme in dieser Hinsicht genauer zu untersuchen. Es genügt dabei, sich auf das Dreikörperproblem zu beschränken, also außer Sonne (m_0) und Planet (m_1) nur noch *einen* störenden Körper (m_2) anzunehmen, wobei die beiden letzteren ihre Rolle auch vertauschen können. Der Übergang auf ein System mit beliebig vielen störenden Körpern wird dann keine prinzipiellen Schwierigkeiten mehr bereiten.

Wir haben in Abschnitt 91 festgestellt, daß die absoluten (also auf ein Inertialsystem, z. B. auf den Schwerpunkt des Systems, bezogenen) Koordinaten x_i, y_i, z_i der drei (bzw. n) Körper den kanonischen Differentialgleichungen (XI; 10) genügen, wenn ihnen als konjugierte Variable die „Impulse"

$$\text{(XV; 33)} \qquad u_i = m_i\dot{x}_i; \quad v_i = m_i\dot{y}_i; \quad w_i = m_i\dot{z}_i$$

zugeordnet werden. Die HAMILTONsche Funktion H ist in diesem Fall die Gesamtenergie des Systems:

$$H = T - U = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2} \frac{1}{m_i} (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2) - \sum_{j \neq k} \frac{m_j m_k}{r_{jk}},$$

mit

$$r_{jk}^2 = (x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2 + (z_k - z_j)^2.$$

In der praktischen Astronomie ist es selten vorteilhaft, absolute Koordinaten zu verwenden, da der Schwerpunkt des Systems, auf den sie sich beziehen, der Beobachtung nicht direkt zugänglich ist oder, wie z. B. bei Doppelsternen oder mehrfachen Sternsystemen, nur mit erheblicher Unsicherheit aus den Beobachtungen abgeleitet werden kann. Man zieht daher in der Praxis die relativen Koordinaten vor. Die Aufgabe, für die gewöhnlichen Relativkoordinaten im Drei- oder Mehrkörperproblem, etwa für die heliozentrischen rechtwinkligen Koordinaten der Planeten (oder die planetozentrischen in einem Satellitensystem) kanonische Differentialgleichungen aufzustellen, ist von H. POINCARÉ[1]) gelöst worden.

Beschränken wir uns auf drei Körper mit den Massen m_0, m_1, m_2 und den absoluten Koordinaten x_i, y_i, z_i $(i = 0, 1, 2)$, so lauten die Relativkoordinaten in bezug auf den Zentralkörper (m_0)

$$\xi_i = x_i - x_0; \quad \eta_i = y_i - y_0; \quad \zeta_i = z_i - z_0.$$

Wir können also an Stelle der neun alten Koordinaten ebenso viele neue (ξ_i, η_i, ζ_i) durch lineare Transformationen einführen, indem wir etwa

$$\text{(XV; 34)} \qquad \begin{cases} x_0 = \xi_0, \\ x_1 = \xi_0 + \xi_1, \\ x_2 = \xi_0 + \xi_2 \end{cases}$$

setzen und entsprechende Formeln aufschreiben, durch die man die y_i in die η_i und die z_i in die ζ_i überführt. In der Folge genügt es, die Formeln (XV; 34) zu betrachten, da alle Folgerungen aus ihnen formal auch für die übrigen Koordinaten gelten. Gleichlautende Beziehungen bestehen natürlich auch zwischen den Geschwindigkeitskoordinaten $\dot{x}_i$ und $\dot{\xi}_i$ usw.

Die Transformationen (XV; 34) sind umkehrbar eindeutig, da die Funktionaldeterminanten den Wert 1 haben. Man kann also nach den Vorschriften (XIV; 13) die zu den ξ_i, η_i, ζ_i konjugierten Koordinaten (Impulse) durch

$$\text{(XV; 35)} \qquad u_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_i}; \quad v_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_i}; \quad w_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{\zeta}_i}$$

einführen, wenn

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = T_x + T_y + T_z$$

[1]) H. POINCARÉ, B.A. *14*, 53 (1897).

mit

$$T_x = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} [m_0 \dot{\xi}_0^2 + m_1 (\dot{\xi}_0 + \dot{\xi}_1)^2 + m_2 (\dot{\xi}_0 + \dot{\xi}_2)^2] =$$

$$= \frac{1}{2} [M \dot{\xi}_0^2 + m_1 \dot{\xi}_1^2 + m_2 \dot{\xi}_2^2 + 2 \dot{\xi}_0 (m_1 \dot{\xi}_1 + m_2 \dot{\xi}_2)],$$

. . . . ,

$$(M = m_0 + m_1 + m_2)$$

die kinetische Energie im Inertialsystem darstellt; denn es ist ja $S = T + U$ und, da U die Geschwindigkeitskoordinaten nicht enthält,

$$u_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_i} = \frac{\partial S}{\partial \dot{\xi}_i}; \quad \ldots;$$

wie in (XIV; 13) verlangt wird. Führt man die partiellen Ableitungen (XV; 35) aus, so erhält man

$$\text{(XV; 36)} \quad \begin{cases} u_0 = \dfrac{\partial T_x}{\partial \dot{\xi}_0} = M \dot{\xi}_0 + m_1 \dot{\xi}_1 + m_2 \dot{\xi}_2 = m_0 \dot{x}_0 + m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2, \\ u_1 = \dfrac{\partial T_x}{\partial \dot{\xi}_1} = m_1 (\dot{\xi}_0 + \dot{\xi}_1) = m_1 \dot{x}_1, \\ u_2 = \dfrac{\partial T_x}{\partial \dot{\xi}_2} = m_2 (\dot{\xi}_0 + \dot{\xi}_2) = m_2 \dot{x}_2 \end{cases}$$

und entsprechende Beziehungen für die Impulse v und w als Funktionen der $\dot{\eta}$ bzw. $\dot{\zeta}$. Die Auflösung der Gleichungen (XV; 36) nach den x ergibt

$$\text{(XV; 37)} \qquad m_0 \dot{x}_0 = u_0 - (u_1 + u_2); \quad m_1 \dot{x}_1 = u_1; \quad m_2 \dot{x}_2 = u_2$$

und daher

$$T_x = \frac{1}{2} \left\{ \frac{[u_0 - (u_1 + u_2)]^2}{m_0} + \frac{u_1^2}{m_1} + \frac{u_2^2}{m_2} \right\}.$$

Nun ist aber wegen des Schwerpunktssatzes (XI; 4)

$$m_0 \dot{x}_0 + m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 = 0,$$

also auch $u_0 = 0$, so daß

$$\text{(XV; 38)} \qquad \begin{cases} T_x = \dfrac{1}{2} \left\{ \dfrac{u_1^2}{m_1} + \dfrac{u_2^2}{m_2} + \dfrac{(u_1 + u_2)^2}{m_0} \right\}, \\ T_y = \dfrac{1}{2} \left\{ \dfrac{v_1^2}{m_1} + \dfrac{v_2^2}{m_2} + \dfrac{(v_1 + v_2)^2}{m_0} \right\}, \\ T_z = \dfrac{1}{2} \left\{ \dfrac{w_1^2}{m_1} + \dfrac{w_2^2}{m_2} + \dfrac{(w_1 + w_2)^2}{m_0} \right\} \end{cases}$$

geschrieben werden kann. Die HAMILTONsche Funktion lautet dann in den neuen Koordinaten

$$\text{(XV; 39)}\quad H = T - U = T_x + T_y + T_z - k^2\left\{\frac{m_0 m_1}{r_{01}} + \frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}}\right\},$$

wo

$$\begin{aligned} r_{01}^2 &= (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2, \\ r_{02}^2 &= (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + (z_2 - z_0)^2 = \xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2, \\ r_{12}^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = (\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + \\ &\quad + (\zeta_2 - \zeta_1)^2 \end{aligned}$$

zu setzen ist. Durch partielle Differentiation findet man dann

$$\text{(XV; 40)}\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \xi_1} &= k^2\left\{\frac{m_0 m_1}{r_{01}^3}\,\xi_1 - \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\,(\xi_2 - \xi_1)\right\} = -m_1(\ddot{\xi}_0 + \ddot{\xi}_1) = -\dot{u}_1, \\ \frac{\partial H}{\partial u_1} &= \frac{u_1}{m_1} + \frac{u_1 + u_2}{m_0} = \dot{\xi}_1 \end{aligned}\right.$$

und gleichlautende kanonische Differentialgleichungen für die übrigen Variablen. Die erste Gleichung (XV; 40) ist nämlich gleichbedeutend mit Gleichung (XI; 27); denn diese lautet ja, wenn wir die hier benutzten Bezeichnungen einführen, für die Relativkoordinate ξ_1

$$\text{(XV; 41)}\quad \ddot{\xi}_1 = -k^2\,\frac{m_0 + m_1}{r_{01}^3}\,\xi_1 + k^2 m_2\left(\frac{\xi_2 - \xi_1}{r_{12}^3} - \frac{\xi_2}{r_{02}^3}\right).$$

Andererseits ist $\xi_0 = x_0$ nach (XV; 34) die absolute x-Koordinate der Sonne. Für sie gilt die Differentialgleichung (XI; 1):

$$\text{(XV; 42)}\quad \ddot{\xi}_0 = k^2\,\frac{m_1}{r_{01}^3}\,(x_1 - \xi_0) + k^2\,\frac{m_2}{r_{02}^3}\,(x_2 - \xi_0).$$

Die Summe von (XV; 41) und (XV; 42) ergibt aber, wenn wir (XV; 34) berücksichtigen,

$$\ddot{\xi}_0 + \ddot{\xi}_1 = -k^2\left\{\frac{m_0}{r_{01}^3}\,\xi_1 - \frac{m_2}{r_{12}^3}\,(\xi_2 - \xi_1)\right\},$$

in Übereinstimmung mit (XV; 40).

Der Vorteil, der mit den kanonischen Eigenschaften der Differentialgleichungen (XV; 40) verbunden ist, wird zum Teil dadurch wieder aufgehoben, daß die Symmetrie, die in den absoluten Koordinaten die Formeln für die kinetische Energie auszeichnet, hier verlorengeht. Außerdem bemerkt man, daß die zu den *relativen* Ortskoordinaten ξ_1, ξ_2 usw. konjugierten Impulskoordinaten u_1, u_2 usw. die Form

$$\text{(XV; 43)}\quad u_i = m_i\,\dot{x}_i;\quad v_i = m_i\,\dot{y}_i;\quad w_i = m_i\,\dot{z}_i$$

haben, also den *absoluten* Geschwindigkeiten proportional sind. Das ist nicht nur eine formale Unschönheit wie der oben beanstandete Mangel an Symmetrie,

sondern wir werden später sehen (Abschnitt 130), daß dieser Umstand gewisse Folgerungen nach sich zieht, die sich bei der praktischen Anwendung störend bemerkbar machen.

In der Praxis wird man es daher meist vorziehen, den Relativkoordinaten ξ_i, η_i, ζ_i die mit den *Relativgeschwindigkeiten* gebildeten Impulse

$$u_i' = m_i \dot{\xi}_i; \quad v_i' = m_i \dot{\eta}_i; \quad w_i' = m_i \dot{\zeta}_i \tag{XV; 44}$$

zuzuordnen. Dadurch verlieren die Bewegungsgleichungen natürlich ihre kanonische Form. Man kann ihnen aber, worauf POINCARÉ (loc. cit.) hingewiesen hat, die „halbkanonische" Form

$$\left\{\begin{aligned} \dot{\xi}_i &= \frac{\partial H_i}{\partial u_i'}; & \dot{\eta}_i &= \frac{\partial H_i}{\partial v_i'}; & \dot{\zeta}_i &= \frac{\partial H_i}{\partial w_i'}, \\ \dot{u}_i' &= -\frac{\partial H_i}{\partial \xi_i}; & \dot{v}_i' &= -\frac{\partial H_i}{\partial \eta_i}; & \dot{w}_i' &= -\frac{\partial H_i}{\partial \zeta_i}, \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2) \tag{XV; 45}$$

geben. Es gilt also für die Bewegung jeder der beiden Massen für sich allein ein kanonisches System von Differentialgleichungen, aber die HAMILTONsche Funktion ist für jedes System eine andere, wie schon in Abschnitt 92 gezeigt worden ist. Schreibt man also die kinetische Energie im relativen System

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{m_i} (u_i'^2 + v_i'^2 + w_i'^2)$$

und führt die beiden Potentialfunktionen (XI; 27a)

$$U_1 = m_1 k^2 \left\{\frac{m_0 + m_1}{r_1} + m_2 \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2}{r_2^3}\right)\right\},$$

$$U_2 = m_2 k^2 \left\{\frac{m_0 + m_2}{r_2} + m_1 \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2}{r_1^3}\right)\right\}$$

mit

$$r_1^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2; \quad r_2^2 = \xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2; \quad \varrho^2 = (\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1^2) + (\zeta_1 - \zeta_2)^2$$

ein, so nehmen die Differentialgleichungen für die Relativkoordinaten die halbkanonische Form (XV; 45) an; denn es gelten ja

$$H_i = T - U_i,$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial u_1'} = \frac{\partial T}{\partial u_1'} = \frac{u_1'}{m_1} = \dot{\xi}_1,$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial \xi_1} = -\frac{\partial U_1}{\partial \xi_1} = m_1 k^2 \left\{\frac{m_0 + m_1}{r_1^3}\,\xi_1 - m_2\left(\frac{\xi_2 - \xi_1}{\varrho^3} - \frac{\xi_2}{r_2^3}\right)\right\} = -m_1 \ddot{\xi}_1 = -\dot{u}_1',$$

. . . . ,

und entsprechende Formeln durch Vertauschung der Indizes 1 und 2.

Schließlich muß noch darauf hingewiesen werden, daß es möglich ist, auch für relative Koordinaten kanonische Differentialgleichungen aufzustellen, *ohne*

die Symmetrieeigenschaften zu zerstören, die wir bei den absoluten rechtwinkligen Koordinaten angetroffen haben. Man muß dann die Relativkoordinaten so definieren, daß im Inertialsystem die kinetische Energie als rein quadratische Form der relativen Impulskoordinaten erscheint, also nur deren Quadrate, nicht aber gemischte Produkte enthält. Das ist in einfachster Weise bei den *Jacobischen* Relativkoordinaten der Fall. In der Tat ist, wenn wir (s. Abschnitt 97) die Jacobischen Koordinaten durch die Vektoren

$$\mathfrak{q}_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i), \qquad (i = 1, 2)$$

definieren und die zugehörigen Impulse mit

$$u_i = \mu_i \dot{\xi}_i; \quad v_i = \mu_i \dot{\eta}_i; \quad w_i = \mu_i \dot{\zeta}_i$$

bezeichnen, wobei

$$\mu_1 = \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1}; \quad \mu_2 = \frac{(m_0 + m_1) m_2}{m_0 + m_1 + m_2}$$

gewisse Funktionen der Massen bedeuten, die kinetische Energie

$$\text{(XV; 46)} \qquad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \mu_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{\mu_i} (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2).$$

Das Potential ist

$$U = k^2 \left(\frac{m_0 m_1}{r_1} + \frac{m_0 m_2}{r_2} + \frac{m_1 m_2}{\varrho} \right),$$

und die Abstände r_1, r_2, ϱ sind gemäß

$$r_1^2 = \mathfrak{q}_1^2; \quad r_2^2 = \left(\frac{m_1}{m_0 + m_1} \mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2 \right)^2; \quad \varrho^2 = \left(\mathfrak{q}_2 - \frac{m_0}{m_0 + m_1} \mathfrak{q}_1 \right)^2$$

durch die Jacobischen Koordinaten auszudrücken. Setzt man dann $T - U = H$, so erhält man

$$\dot{\xi}_i = \frac{u_i}{\mu_i} = \frac{\partial T}{\partial u_i} = \frac{\partial H}{\partial u_i} \quad \text{nach (XV; 46)},$$

$$\dot{u}_i = \mu_i \ddot{\xi}_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_i} \quad \text{nach (XI; 72)},$$

. . . .

Die Differentialgleichungen für die Jacobischen Koordinaten sind also kanonisch, und die zu den Koordinaten konjugierten Impulse sind den Relativgeschwindigkeiten proportional.

130. *Oskulierende und nichtoskulierende intermediäre Bahnen*

Als Grundlage weiterer Untersuchungen wählen wir irgendeines der kanonischen oder halbkanonischen Differentialgleichungssysteme in rechtwinkligen Koordinaten, wie wir sie in Abschnitt 129 betrachtet haben, und zwar genügt es, relative Koordinaten zu wählen, nicht nur, weil absolute Koordina-

ten aus den oben ausgeführten Gründen wenig praktische Bedeutung haben, sondern vor allem, weil in den Bewegungsgleichungen in Relativkoordinaten die sechs Schwerpunktssätze schon berücksichtigt sind und die Zahl der Differentialgleichungen erster Ordnung im Dreikörperproblem nur noch zwölf statt achtzehn beträgt. Später werden wir sehen, daß es möglich ist, unter Wahrung der kanonischen Form der Gleichungen durch Anwendung des Energiesatzes und der drei Drehimpulssätze die Ordnung des Problems um weitere vier Einheiten herabzusetzen, und daß man – dann allerdings unter Verzicht auf die kanonische Form – die Zahl der Differentialgleichungen sogar auf sechs reduzieren kann (s. Abschnitt 136).

Die allgemeine Form der Differentialgleichungssysteme des Dreikörperproblems in relativen rechtwinkligen Koordinaten läßt sich durch

$$\dot{x}_{ik} = \frac{\partial H_i}{\partial u_{ik}}; \quad \dot{u}_{ik} = -\frac{\partial H_i}{\partial x_{ik}}, \qquad (i = 1, 2;\ k = 1, 2, 3) \tag{XV; 47}$$

wiedergeben. Der Index i bezeichnet den betreffenden Körper (Planet mit der Masse m_i), während die drei Koordinaten des Orts- bzw. des Impulsvektors durch den Index k unterschieden werden sollen. Es sind also x_{i1}, x_{i2}, x_{i3} die drei rechtwinkligen Koordinaten des Ortes des Planeten mit der Masse m_i.

Kanonische und halbkanonische Systeme unterscheiden sich, wie wir gesehen haben, dadurch, daß bei den ersteren die $H_i = H$ für beide i identisch sind, während bei den letzteren H_1 und H_2 verschiedene Funktionen der Koordinaten darstellen. Dieser Unterschied ist aber nicht sehr tiefgreifend und für die Anwendung der Methode der Variation der Konstanten praktisch bedeutungslos; er verwischt sich sichtlich, wenn man bedenkt, daß man bei einer wichtigen Gruppe von kanonischen Systemen die Differentialgleichungen auch in halbkanonischer Form schreiben kann, ohne daß sich sachlich etwas ändert. Ist nämlich die kinetische Energie des Systems eine rein quadratische Funktion der Impulse u_{ik}, so kann man

$$T = T_1 + T_2; \quad T_i = \frac{1}{2\mu_i} \sum_{k=1}^{3} u_{ik}^2, \qquad (i = 1, 2) \tag{XV; 48}$$

setzen, wo die μ_i die Massen m_i oder bestimmte Funktionen von m_0, m_1, m_2 bedeuten. In diesem Fall kann man die ursprünglich kanonischen Differentialgleichungen

$$\dot{x}_{ik} = \frac{\partial H}{\partial u_{ik}}; \quad \dot{u}_{ik} = -\frac{\partial H}{\partial x_{ik}}$$

auch in der halbkanonischen Form (XV; 47) schreiben, indem man

$$H_i = T_i - U \quad \text{statt} \quad H = T - U$$

setzt; denn es ist ja T_1 von den u_{2k}, T_2 von den u_{1k} unabhängig. Andererseits kann man aber wesentlich halbkanonische Systeme, wie das der gewöhnlichen Relativkoordinaten $x_{ik}, u_{ik} = m_i \dot{x}_{ik}$, nicht in die kanonische Form bringen, weil die hier verwendeten Impulskoordinaten nicht den Bedingungen

entsprechen, die von der Theorie der kanonischen Differentialgleichungssysteme vorgeschrieben sind. In diesem Fall ist

$$H_i = T - U_i, \quad (U_1 \neq U_2),$$

und es ist wegen der Form der U_i nicht möglich, ein U zu finden, für das (für alle i, k)

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_{ik}} = \frac{\partial U}{\partial x_{ik}}$$

wäre. Aber auch hier ist es statthaft, falls die Zerlegung (XV; 48) der kinetischen Energie möglich ist, $H_i = T_i - H_i$ zu schreiben, und man kann dann überdies aus T_i, U_i, H_i einen gemeinsamen Massenfaktor herausdividieren, ein Verfahren, das wir bereits in Abschnitt 125 angewandt haben, um den für das Ergebnis der Analyse unwichtigen Faktor (m) aus den Formeln zu entfernen. Handelt es sich nämlich um die halbkanonischen gewöhnlichen Relativkoordinaten zweier um die Sonne laufenden Planeten mit den Massen m_i und m_j, so kann man in den Differentialgleichungen für m_i:

$$m_i \ddot{x}_{ik} = \frac{\partial U_i}{\partial x_{ik}} = -\frac{\partial H_i}{\partial x_{ik}}; \quad H_i = \frac{m_i}{2} \sum_k \dot{x}_{ik}^2 - U_i,$$

$$U_i = m_i k^2 \left\{ \frac{m_0 + m_i}{r_i} + m_j \left(\frac{1}{\varrho} - \sum_k \frac{x_{ik} x_{jk}}{r_j^3} \right) \right\},$$

den allen Termen gemeinsamen Faktor m_i fortlassen und erhält dann, wenn man die Differentialgleichungen in die halbkanonische Form bringt,

$$\dot{x}_{ik} = \frac{\partial H_i}{\partial u_{ik}}; \quad \dot{u}_{ik} = -\frac{\partial H_i}{\partial x_{ik}}$$

mit

$$u_{ik} = \dot{x}_{ik}; \quad H_i = \frac{1}{2} \sum_k \dot{x}_{ik}^2 - U_i.$$

Für die Anwendung der Methode der Variation der Konstanten auf das Störungsproblem ist es ganz unwesentlich, ob die Differentialgleichungen der gestörten Bewegung kanonisch oder halbkanonisch sind. In jedem Fall können intermediäre Lösungen gefunden werden, die vollständig integrablen Differentialgleichungen (etwa denen des Zweikörperproblems) genügen und die, falls die Masse des störenden Körpers klein genug ist, befriedigende Annäherungen an die vollständige Lösung des Problems darstellen. Setzen wir nämlich allgemein

$$H_i = T_i - U_i$$

als Form der HAMILTONschen Funktion an, die alle hier erwähnten Sonderfälle in sich schließt, so kann man für die Bewegung der Masse m_i die Gleichungen (XV; 47) ansetzen und

$$H_i = G_i + F_i$$

schreiben, wobei G_i diejenige HAMILTONsche Funktion bezeichnet, die der Bewegung von m_i in einer intermediären Bahn (etwa einer KEPLERschen Ellipse) zugehört. Während also die gestörte Bewegung von m_i durch die Lösung eines Systems (XV; 47) dargestellt wird, genügt die intermediäre Bewegung dieser Masse dem System

$$\text{(XV; 49)} \qquad \dot{\bar{x}}_{ik} = \frac{\partial G_i}{\partial \bar{u}_{ik}}; \quad \dot{\bar{u}}_{ik} = -\frac{\partial G_i}{\partial \bar{x}_{ik}}, \qquad (k = 1, 2, 3),$$

und beide Bewegungen sind durch die Bedingung miteinander gekoppelt, daß für die Epoche $t = t_0$

$$\text{(XV; 50)} \qquad x_{ik} = \bar{x}_{ik}; \quad u_{ik} = \bar{u}_{ik}$$

sein soll. Die Lösungen der Systeme (XV; 47) und (XV; 49) kann man formal

$$x_{ik} = x_{ik}(t; \alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}; \beta_{i1}, \beta_{i2}, \beta_{i3}),$$
$$u_{ik} = u_{ik}(t; \alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}; \beta_{i1}, \beta_{i2}, \beta_{i3})$$

schreiben, und zwar sind für das System (XV; 49) mit den Koordinaten $\bar{x}_{ik}, \bar{u}_{ik}$ die Parameter α_{ik}, β_{ik} Konstante, während sie für das System (XV; 47) variabel sind und den kanonischen Differentialgleichungen

$$\dot{\alpha}_{ik} = \frac{\partial G_i}{\partial \beta_{ik}}; \quad \dot{\beta}_{ik} = -\frac{\partial G_i}{\partial \alpha_{ik}}$$

genügen, falls sie, als Bahnelemente der intermediären Bahn, ein kanonisches System bilden. Die Anwendung dieses Verfahrens ist völlig unabhängig davon, ob die H_i für beide i verschieden oder identisch sind. Wesentlich ist nur, daß die Restfunktionen

$$F_i = H_i - G_i$$

gegen die G_i genügend klein sind, d.h. in den kleinen Planetenmassen m_1, m_2 mindestens um eine Ordnung höher als die G_i sind. Man wird aber zu verschiedenen Ergebnissen über die Natur der intermediären Bahnen gelangen, je nachdem, ob die kinetische Energie des Systems in den gewählten Impulskoordinaten die rein quadratische Form (XV; 48) besitzt oder eine gemischt-quadratische Funktion der u_{ik} darstellt, wie es bei den POINCARÉschen kanonischen Relativkoordinaten zutrifft. Im ersteren Fall haben die Ausdrücke für die kinetische Energie für die gestörte und die intermediäre Bewegung die gleiche Form, und es ist daher

$$\dot{x}_{ik} = \frac{\partial H_i}{\partial u_{ik}} = \frac{\partial T_i}{\partial u_{ik}} = \frac{u_{ik}}{\mu_i}; \quad \dot{\bar{x}}_{ik} = \frac{\partial G_i}{\partial \bar{u}_{ik}} = \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial \bar{u}_{ik}} = \frac{\bar{u}_{ik}}{\mu_i}.$$

Wegen (XV; 50) ist somit für die jeweilige Epoche $t = t_0$

$$\dot{x}_{ik} = \dot{\bar{x}}_{ik}; \quad u_{ik} = \bar{u}_{ik},$$

so daß zu diesem Zeitpunkt neben den Ortskoordinaten auch die Geschwindigkeitskoordinaten beider Bewegungen übereinstimmen, d.h. die intermediäre Bahn die wahre oskuliert.

Anders verhält es sich, wenn T eine gemischt-quadratische Form der u_{ik} ist. Dann ist für die gestörte Bewegung

$$\dot{x}_{ik} = a_i u_{1k} + b_i u_{2k}$$

eine lineare Funktion der Impulskoordinaten beider Körper, während für die intermediären Bahnen natürlich wieder $\dot{\bar{x}}_{ik} \sim \bar{u}_{ik}$ ist. Zur Zeit $t = t_0$ sind also die Geschwindigkeitskoordinaten der intermediären Bahn von denen der gestörten im allgemeinen verschieden: Es findet wohl eine Überschneidung der Bahnen, aber keine Oskulation statt.

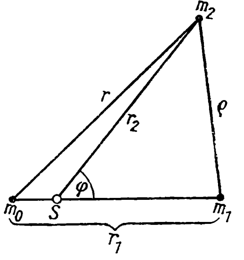


Abb. 25 JACOBIsche Relativkoordinaten

Um diese allgemeinen Überlegungen durch konkrete Beispiele zu belegen, betrachten wir die drei Differentialgleichungssysteme in rechtwinkligen Relativkoordinaten, die wir im vorigen Abschnitt aufgestellt haben:

1. In den *JACOBIschen Koordinaten* haben die Bewegungsgleichungen die kanonische Form (XV; 47) mit

$$u_{ik} = \mu_i \dot{x}_{ik}; \quad \mu_1 = \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1}, \quad \mu_2 = \frac{(m_0 + m_1) m_2}{m_0 + m_1 + m_2}.$$

Es ist nämlich, nach (XI; 65), (XI; 66) und (XI; 72), für JACOBIsche Koordinaten

$$H = T - U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{3} \mu_i \dot{x}_{ik}^2 - k^2 \left(\frac{m_0 m_1}{r_1} + \frac{m_0 m_2}{r} + \frac{m_1 m_2}{\varrho} \right)$$

und

$$\mu_i \ddot{x}_{ik} = \frac{\partial U}{\partial x_{ik}} = - \frac{\partial H}{\partial x_{ik}},$$

wenn (Abb. 25) r_1, r die Abstände der beiden Planeten (m_1 bzw. m_2) von der Sonne (m_0) bezeichnen und ϱ der gegenseitige Abstand der beiden Planeten ist. Setzt man aber $u_{ik} = \mu_i \dot{x}_{ik}$, so folgt

$$H = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k \frac{u_{ik}^2}{\mu_i} - U; \quad \dot{x}_{ik} = \frac{\partial H}{\partial u_{ik}}, \quad \dot{u}_{ik} = - \frac{\partial H}{\partial x_{ik}}.$$

Es sei nun (Abb. 25) r_2 der Abstand des Planeten m_2 vom Massenmittelpunkt S des Systems (m_0, m_1) und $\varphi = \sphericalangle\, m_2 S\, m_1$. Dann ist

$$\text{(XV; 51)} \quad \begin{cases} r_1^2 = \sum_k x_{1k}^2; \quad r_2^2 = \sum_k x_{2k}^2, \\ r^2 = r_2^2 + 2 \dfrac{m_1}{m_0 + m_1} r_1 r_2 \cos\varphi + \left(\dfrac{m_1 r_1}{m_0 + m_1} \right)^2, \\ \varrho^2 = r_2^2 - 2 \dfrac{m_0}{m_0 + m_1} r_1 r_2 \cos\varphi + \left(\dfrac{m_0 r_1}{m_0 + m_1} \right)^2, \\ r_1 r_2 \cos\varphi = \sum_k x_{1k} x_{2k}. \end{cases}$$

Setzt man ferner

$$H = G + F = G_1 + G_2 + F$$

mit

$$(\text{XV}; 52) \qquad \begin{cases} G_1 = \dfrac{1}{2} \sum\limits_k \dfrac{u_{1k}^2}{\mu_1} - k^2 \dfrac{m_0 m_1}{r_1}, \\ G_2 = \dfrac{1}{2} \sum\limits_k \dfrac{u_{2k}^2}{\mu_2} - k^2 \dfrac{m_0 m_2}{r_2}, \end{cases}$$

so ist G_1 nur von den Koordinaten x_{1k}, u_{1k} und G_2 nur von x_{2k}, u_{2k} abhängig. Die beiden intermediären Systeme

$$\dot{x}_{ik} = \frac{\partial G_i}{\partial u_{ik}}; \quad \dot{u}_{ik} = -\frac{\partial G_i}{\partial x_{ik}}, \qquad (i = 1, 2)$$

sind daher jedes für sich integrabel. Die intermediären Bahnen genügen also den Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$(\text{XV}; 53) \qquad \begin{cases} \dfrac{\dot{u}_{1k}}{\mu_1} = \ddot{x}_{1k} = -k^2 \dfrac{m_0 m_1}{\mu_1} \dfrac{x_{1k}}{r_1^3} = -\varkappa_1^2 \dfrac{x_{1k}}{r_1^3}, \\ \dfrac{\dot{u}_{2k}}{\mu_2} = \ddot{x}_{2k} = -k^2 \dfrac{m_0 m_2}{\mu_2} \dfrac{x_{2k}}{r_2^3} = -\varkappa_2^2 \dfrac{x_{2k}}{r_2^3}. \end{cases}$$

Das sind aber die Differentialgleichungen (III; 10) der Zweikörperbewegung. Die intermediären Bahnen sind also KEPLERsche Ellipsen (oder andere Kegelschnitte). Die Brennpunkte dieser Bahnen liegen für m_1 in der Sonne, für m_2 im Massenmittelpunkt S von m_0 und m_1.

Die Restfunktion

$$(\text{XV}; 54) \qquad F = H - (G_1 + G_2) = k^2 \left(\frac{m_0 m_2}{r_2} - \frac{m_0 m_2}{r} - \frac{m_1 m_2}{\varrho} \right) = $$
$$= k^2 m_2 \left\{ m_0 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r} \right) - \frac{m_1}{\varrho} \right\}$$

ist gegenüber G von höherer Ordnung in den kleinen Massen m_1, m_2; denn es ist ja

$$G = \frac{1}{2} \sum_k \{ \mu_1 \dot{x}_{1k}^2 + \mu_2 \dot{x}_{2k}^2 \} - k^2 m_0 \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right)$$

von der ersten Ordnung, da μ_1, μ_2 von der ersten Ordnung sind. Hingegen ist F von der zweiten Ordnung; denn man kann leicht zeigen, daß in (XV; 54) der Faktor $1/r_2 - 1/r$ von der ersten Ordnung ist. Nach (XV; 51) erhält man nämlich

$$r^{-1} = r_2^{-1} \left\{ 1 + 2 \frac{m_1}{m_0 + m_1} \frac{r_1}{r_2} \cos\varphi + \left(\frac{m_1}{m_0 + m_1} \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right\}^{-1/2},$$

also, wenn man diesen Ausdruck nach Potenzen der kleinen Größe

$$\gamma = \frac{m_1}{m_0 + m_1} \frac{r_1}{r_2}$$

entwickelt,

$$r^{-1} = r_2^{-1}\left\{1 - \gamma\cos\varphi + \frac{1}{2}\gamma^2(3\cos^2\varphi - 1) + \cdots\right\}.$$

Somit ist

$$\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r} = \frac{\gamma}{r_2}\left\{\cos\varphi - \frac{1}{2}\gamma(3\cos^2\varphi - 1) + \cdots\right\},$$

d.h.

$$F = k^2 m_2\left\{\frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1}\,\frac{r_1}{r_2^2}\cos\varphi - \frac{m_1}{\varrho} + \langle\text{Glieder höherer Ordnung}\rangle\right\}$$

oder, wenn man auch $\dfrac{m_0}{m_0 + m_1} = 1 - \dfrac{m_1}{m_0} + \dfrac{m_1^2}{m_0^2} - \cdots$ setzt,

$$F = k^2 m_1 m_2\left\{\frac{1}{r_2^3}\sum_k x_{1k}\,x_{2k} - \frac{1}{\varrho} + \langle\text{Glieder höherer Ordnung}\rangle\right\}.$$

Dieser Ausdruck ist also von der zweiten Ordnung in den Massen, wenn nicht ϱ sehr klein wird, d.h. die beiden Planeten sich sehr nahe kommen. Diesen Sonderfall wollen wir aber vorläufig ausschließen.

2. Für die gewöhnlichen heliozentrischen Relativkoordinaten x_{ik}, denen als Impulse die Größen $u_{ik} = m_i\,\dot{x}_{ik}$ zugeordnet sind, gelten (siehe Abb. 26) die halbkanonischen Differentialgleichungen (XV; 47) mit

$$H_i = T_i - U_i = \frac{1}{2}\sum_k \frac{u_{ik}^2}{m_i} - k^2 m_i\left\{\frac{m_0 + m_i}{r_i} + m_j\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r_j^3}\sum_k x_{ik}\,x_{jk}\right)\right\},$$
$$(i = 1, 2;\ j = 2, 1).$$

Hier kann man setzen

$$H_i = G_i + F_i$$

mit

$$\text{(XV; 55)}\qquad \left\{\begin{aligned} G_1 &= \frac{1}{2}\sum_k \frac{u_{1k}^2}{m_1} - k^2 m_1\frac{m_0 + m_1}{r_1}, &\quad \left(r_1^2 = \sum_k x_{1k}^2\right),\\ G_2 &= \frac{1}{2}\sum_k \frac{u_{2k}^2}{m_2} - k^2 m_2\frac{m_0 + m_2}{r_2}, &\quad \left(r_2^2 = \sum_k x_{2k}^2\right).\end{aligned}\right.$$

Dann zerfällt das halbkanonische System der intermediären Differentialgleichungen

$$\dot{x}_{ik} = \frac{\partial G_i}{\partial u_{ik}};\quad \dot{u}_{ik} = -\frac{\partial G_i}{\partial x_{ik}},\qquad (i = 1, 2)$$

in zwei getrennte und voneinander unabhängige kanonische Systeme, die integrabel sind und Kegelschnittbahnen um m_0 liefern, die für $t = t_0$ die gestörten Bahnen oskulieren.

Abb. 26. Heliozentrische Koordinaten

Die Störungsausdrücke F_i haben in diesem Fall die geschlossene Form

$$F_i = k^2 m_1 m_2\left\{\frac{1}{r_j^3}\sum_k x_{1k}\,x_{2k} - \frac{1}{\varrho}\right\},\qquad (i = 1, 2;\ j = 2, 1)$$

und sind ebenfalls von der zweiten Ordnung in den Planetenmassen.

3. Als Beispiel für ein kanonisches System, das nichtoskulierende intermediäre Bahnen liefert, dienen die Differentialgleichungen in den POINCARÉschen Relativkoordinaten, für die nach (XV; 38) und (XV; 39) und mit den Bezeichnungen der Abb. 26 die HAMILTONsche Funktion $H = T - U$ mit

$$T = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{u_{1k}^2}{m_1} + \frac{u_{2k}^2}{m_2} + \frac{(u_{1k} + u_{2k})^2}{m_0} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{m_0 + m_1}{m_0\, m_1} u_{1k}^2 + \frac{m_0 + m_2}{m_0\, m_2} u_{2k}^2 + \frac{2}{m_0} u_{1k} u_{2k} \right),$$

$$U = k^2 \left(\frac{m_0\, m_1}{r_1} + \frac{m_0\, m_2}{r_2} + \frac{m_1\, m_2}{\varrho} \right)$$

lautet. Hier kann man wieder

$$H = G + F = G_1 + G_2 + F$$

setzen mit

(XV; 56)
$$\begin{cases} G_i = \dfrac{1}{2} \dfrac{m_0 + m_i}{m_0\, m_i} \sum\limits_k u_{ik}^2 - k^2 \dfrac{m_0\, m_i}{r_i}, & (i = 1, 2), \\ F = \dfrac{1}{m_0} \sum u_{1k} u_{2k} - k^2 \dfrac{m_1\, m_2}{\varrho}. \end{cases}$$

Die kanonischen Gleichungen der intermediären Bewegungen,

(XV; 57)
$$\dot{x}_{ik} = \frac{\partial G_i}{\partial u_{ik}}; \quad \dot{u}_{ik} = -\frac{\partial G_i}{\partial x_{ik}},$$

sind dann wiederum unabhängig voneinander integrabel und liefern Kegelschnittbahnen, und zwar gilt nach (XV; 57) für $i = 1, 2$

(XV; 58)
$$\dot{x}_{ik} = \frac{m_0 + m_i}{m_0\, m_i} u_{ik}$$

und daher, wiederum nach (XV; 57),

$$\ddot{x}_{ik} = \frac{m_0 + m_i}{m_0\, m_i} \dot{u}_{ik} = -\frac{m_0 + m_i}{m_0\, m_i} k^2 \frac{m_0\, m_i}{r_i^3} x_{ik} = -k^2 (m_0 + m_i) \frac{x_{ik}}{r_i^3}.$$

Für jede der beiden intermediären Bewegungen gilt also die Differentialgleichung zweiter Ordnung für eine Kegelschnittbahn der Masse m_i um m_0 mit $\varkappa_i^2 = k^2 (m_0 + m_i)$. In der gestörten Bahn gilt aber

$$\dot{x}_{ik} = \frac{\partial H}{\partial u_{ik}} = \frac{\partial (G_i + F)}{\partial u_{ik}} = \frac{m_0 + m_i}{m_0\, m_i} u_{ik} + \frac{1}{m_0} u_{jk}, \quad (i = 1, 2;\ j = 2, 1).$$

Es sind daher, wenn nach (XV; 58) für die intermediären Bahnen

$$\dot{\bar{x}}_{ik} = \frac{m_0 + m_i}{m_0\, m_i} \bar{u}_{ik}$$

gesetzt wird, die Geschwindigkeitskoordinaten in den gestörten Bahnen für $t = t_0$, wo (XV; 50) gilt,

$$\dot{x}_{ik} = \dot{\bar{x}}_{ik} + \frac{m_j}{m_0 + m_j} \dot{\bar{x}}_{jk}.$$

Die intermediären Bahnen oskulieren also nicht, da (wegen $x_{ik} = \bar{x}_{ik}$) zur Zeit $t = t_0$ wohl die Örter, nicht aber die Geschwindigkeiten mit denen der wahren Bahnen übereinstimmen. Die Abweichungen sind aber klein von der Ordnung der jeweils störenden Masse.

Für den Störungsausdruck F gilt auch hier, daß er von der Ordnung $m_1 m_2$ ist. Setzt man nämlich in (XV; 56) für F im ersten Glied nach (XV; 43)

$$u_{ik} = m_i \dot{x}'_{ik},$$

wobei $\dot{x}'_{ik}$ jetzt die absoluten Geschwindigkeiten bedeuten, so folgt dies unmittelbar.

Trotz mancher Vorteile (kanonische Form der Differentialgleichungen und symmetrische Gestalt von F und G_i) wird der Praktiker, der ein für seine Arbeit geeignetes Koordinatensystem auszuwählen hat, diejenigen Systeme bevorzugen, die oskulierende intermediäre Bahnen liefern. Die POINCARÉschen Relativkoordinaten, die diesen Vorzug nicht haben, werden daher kaum verwendet. Auch POINCARÉ selbst war sich des Umstandes bewußt, daß diese Koordinaten trotz des theoretischen Interesses, das sie zweifellos beanspruchen, für die Praxis wenig Nutzen haben.

Von den relativen Koordinatensystemen, deren Eigenschaften wir diskutiert haben, bleiben also für die Verwendung in der Störungsrechnung praktisch nur noch die der JACOBIschen Koordinaten und der halbkanonischen gewöhnlichen Relativkoordinaten übrig. Beide haben ihre Vor- und Nachteile, und es wird von der Natur des jeweils vorliegenden Problems abhängen, welches System man wählen wird. Die JACOBIschen Koordinaten haben den großen, besonders für alle theoretischen Überlegungen unschätzbaren Vorzug, kanonischen Differentialgleichungen zu genügen; außerdem wissen wir, daß in ihnen die Ausdrücke für die kinetische Energie, die LAGRANGEsche Funktion und die Drehimpulssätze die gleiche symmetrische Form haben wie im absoluten System und daß für sie der JACOBIsche Knotensatz im Dreikörperproblem streng gültig ist. Wir werden daher in der Folge bei theoretischen Deduktionen durchweg JACOBIsche Koordinaten benutzen. Ein Nachteil ist, daß die Koordinaten der drei (oder mehr) Massen sich auf verschiedene Anfangspunkte beziehen, daß ihre Definition an eine bestimmte, in der Numerierung zum Ausdruck kommende Reihenfolge gebunden ist und daß daher die allen Massen gemeinsame Störungsfunktion F (XV; 54) in den Koordinaten und Massen der beteiligten Körper unsymmetrisch ist. Andererseits kann in bestimmten Fällen gerade hierin auch ein Vorteil liegen, z.B. wenn es sich (im stellaren Dreikörperproblem) um die Bewegung eines entfernten Himmelskörpers um einen engen Doppelstern handelt. Hier ist es [siehe (XI; 64)] nur natürlich, wenn man die Bewegung der engen Komponente auf den Hauptstern, die des entfernten Begleiters dagegen auf den Schwerpunkt des engen Systems bezieht. Aus ähnlichen

Gründen benutzt man vielfach noch heute für die vorläufige Bewegungstheorie des erst seit 1930 bekannten äußersten Planeten des Sonnensystems, des Pluto, Koordinaten, die sich auf den Schwerpunkt aller übrigen Massen des Systems beziehen. Auch ist es unter Umständen vorteilhaft, für die äußeren Planeten (Jupiter, Saturn usw.) Koordinaten einzuführen, die sich nicht auf die Sonne, sondern auf den Massenmittelpunkt des inneren, von der Sonne und den Planeten Merkur, Venus, Erde und Mars gebildeten Systems beziehen, da auf diese Weise die von den schnell bewegten inneren Planeten bewirkten kurzperiodischen Störungen, die bei der numerischen Integration der Bewegungsgleichungen der äußeren Planeten unangenehme Schwierigkeiten hervorrufen, kaum noch merklich sind.

Im übrigen wird man in der praktischen Störungsrechnung fast immer das System der gewöhnlichen heliozentrischen Relativkoordinaten bevorzugen. Der Nachteil, daß die Differentialgleichungen halbkanonisch sind, fällt hier kaum ins Gewicht. In den meisten Anwendungen, z.B. bei der Berechnung spezieller Störungen der Planetoiden und Kometen (s. Kapitel XVIII), setzt man die Bewegungen der störenden Körper als bekannt voraus und hat daher nur noch das System der Differentialgleichungen für einen – den gestörten – Körper zu lösen, und dieses ist ja, für sich allein betrachtet, kanonisch.

131. *Die Delaunayschen kanonischen Elemente*

Es seien wiederum x_{ik} $(i = 1, 2;\ k = 1, 2, 3)$ die Relativkoordinaten der beiden Massen m_i in bezug auf den jeweiligen Anfangspunkt, $u_{ik} = \mu_i \dot{x}_{ik}$ die zugeordneten Impulskoordinaten, und es mögen die Differentialgleichungen

$$\dot{x}_{ik} = \frac{\partial H_i}{\partial u_{ik}}; \quad \dot{u}_{ik} = -\frac{\partial H_i}{\partial x_{ik}}$$

mit $H_i = G_i + F_i$ als Hamiltonschen Funktionen gelten. Im Falle eines kanonischen Systems (Jacobische Koordinaten) gilt $H_i = H = G_1 + G_2 + F$ für beide Gruppen $(i = 1, 2)$ gemeinsam.

Die Hamiltonschen Funktionen der beiden intermediären (oskulierenden) Bewegungen sind, wie (XV; 52) für Jacobische Koordinaten und (XV; 55) für die halbkanonischen heliozentrischen Koordinaten zeigt, von der gemeinsamen Form

$$G_i = \frac{1}{2} \sum_k \frac{u_{ik}^2}{\mu_i} - \frac{\gamma_i^2}{r_i},$$

und die intermediären Differentialgleichungen

$$\dot{x}_{ik} = \frac{\partial G_i}{\partial u_{ik}}; \quad \dot{u}_{ik} = -\frac{\partial G_i}{\partial x_{ik}} = -\frac{\gamma_i^2}{r_i^3} x_{ik} = \mu_i \ddot{x}_{ik}$$

lassen sich auch in der Form

$$\ddot{x}_{ik} = -\frac{\gamma_i^2}{\mu_i} \frac{x_{ik}}{r_i^3} = -\varkappa_i^2 \frac{x_{ik}}{r_i^3} \qquad \text{(XV; 59)}$$

schreiben. Im einzelnen ist

a) bei JACOBIschen Koordinaten nach (XV; 52)

$$\text{(XV; 60a)}\quad \begin{cases} \mu_1 = \dfrac{m_0\, m_1}{m_0 + m_1}; & \mu_2 = \dfrac{(m_0 + m_1)\, m_2}{m_0 + m_1 + m_2}, \\ \gamma_1^2 = k^2\, m_0\, m_1; & \gamma_2^2 = k^2\, m_0\, m_2, \\ \varkappa_1^2 = k^2 (m_0 + m_1); & \varkappa_2^2 = k^2 \dfrac{m_0 (m_0 + m_1 + m_2)}{m_0 + m_1}, \end{cases}$$

b) bei heliozentrischen Koordinaten nach (XV; 55)

$$\text{(XV; 60b)}\quad \begin{cases} \mu_1 = m_1; & \mu_2 = m_2, \\ \gamma_1^2 = k^2\, m_1 (m_0 + m_1); & \gamma_2^2 = k^2\, m_2 (m_0 + m_2), \\ \varkappa_1^2 = k^2 (m_0 + m_1); & \varkappa_2^2 = k^2 (m_0 + m_2). \end{cases}$$

Die konstanten kanonischen Elemente α, β der intermediären Bahnen genügen in der gestörten Bewegung als Funktionen der Zeit den Differentialgleichungen

$$\text{(XV; 61)}\qquad \dot{\alpha}_{ik} = \frac{\partial F_i}{\partial \beta_{ik}}; \quad \dot{\beta}_{ik} = -\frac{\partial F_i}{\partial \alpha_{ik}}.$$

Dabei ist

a) für JACOBIsche Koordinaten (Bezeichnungen nach Abb. 25, S. 225)

$$\text{(XV; 62a)}\quad F_i = F = k^2\, m_2 \left\{ m_0 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r} \right) - \frac{m_1}{\varrho} \right\} =$$

$$= k^2\, m_1\, m_2 \left\{ \frac{1}{r_2^3} \sum_k x_{1k}\, x_{2k} - \frac{1}{\varrho} \right\} + \langle \text{Glieder höherer Ordnung} \rangle,$$

b) für heliozentrische Koordinaten (Bezeichnungen nach Abb. 26, S. 227)

$$\text{(XV; 62b)}\quad \begin{cases} F_1 = k^2\, m_1\, m_2 \left\{ \dfrac{1}{r_2^3} \sum\limits_k x_{1k}\, x_{2k} - \dfrac{1}{\varrho} \right\}, \\ F_2 = k^2\, m_1\, m_2 \left\{ \dfrac{1}{r_1^3} \sum\limits_k x_{1k}\, x_{2k} - \dfrac{1}{\varrho} \right\}. \end{cases}$$

Die Lösung des Störungsproblems beruht also auf der Lösung der Systeme (XV; 59) und (XV; 61), die für alle hier in Betracht kommenden Fälle die gleiche Form haben. Wir werden daher in der Folge, um unnötige Häufung der Indizes zu vermeiden, den Index i (der den bewegten Körper in dem jeweils benutzten Koordinatensystem bezeichnet) häufig fortlassen können.

Im Abschnitt 128 hatten wir als kanonische Elemente der durch die Differentialgleichungen (XV; 59) definierten intermediären Kegelschnittbahnen die Konstanten (XV; 18)

$$\text{(XV; 63)}\quad \begin{cases} \alpha_1 = -\dfrac{\varkappa^2}{2a}; & \alpha_2 = \varkappa \sqrt{a(1 - e^2)}; & \alpha_3 = \varkappa \sqrt{a(1 - e^2)} \cos i, \\ \beta_1 = T; & \beta_2 = -\omega; & \beta_3 = -\Omega \end{cases}$$

erhalten, die im gestörten Problem als Funktionen der Zeit kanonischen Differentialgleichungen der Form (XV; 61) genügen. Hierbei muß aber noch berücksichtigt werden, daß diese Elemente (s. Abschnitt 125) einem kanonischen System

$$\text{(XV; 64)} \qquad \dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial u_k}; \quad \dot{u}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}$$

entstammen, in dem $u_k = \dot{x}_k$ gesetzt worden war, während hier allgemein als Impulskoordinaten die Größen $u_k = \mu\, \dot{x}_k$ auftreten. Die Gleichungen (XV; 64) ändern sich aber nicht, wenn man die u_k und die HAMILTONsche Funktion H mit dem gleichen konstanten Faktor multipliziert. Wir dürfen also auch hier $u_k = \dot{x}_k$ setzen, wenn wir gleichzeitig die Ausdrücke H, G, F durch μ dividieren. Dann ist in jedem Fall, da $\gamma_i^2 = \mu_i \varkappa_i^2$ ist,

$$G_i = \frac{1}{2} \sum \dot{x}_{ik}^2 - \frac{\varkappa_i^2}{r_i}$$

zu setzen, und die Störungsfunktionen F_i erhalten die Form

a) für JACOBIsche Koordinaten, da man durch m_i statt μ_i dividieren darf,

$$\text{(XV; 65a)} \qquad \begin{cases} F_1 = k^2 m_2 \left\{ \dfrac{1}{r_2^3} \sum\limits_k x_{1k}\, x_{2k} - \dfrac{1}{\varrho} \right\} + \langle \text{Glieder höherer Ordnung} \rangle, \\ F_2 = k^2 m_1 \left\{ \dfrac{1}{r_2^3} \sum\limits_k x_{1k}\, x_{2k} - \dfrac{1}{\varrho} \right\} + \langle \text{Glieder höherer Ordnung} \rangle, \end{cases}$$

b) für heliozentrische Koordinaten

$$\text{(XV; 65b)} \qquad \begin{cases} F_1 = k^2 m_2 \left\{ \dfrac{1}{r_2^3} \sum\limits_k x_{1k}\, x_{2k} - \dfrac{1}{\varrho} \right\}, \\ F_2 = k^2 m_1 \left\{ \dfrac{1}{r_1^3} \sum\limits_k x_{1k}\, x_{2k} - \dfrac{1}{\varrho} \right\}. \end{cases}$$

Sie sind von der ersten Ordnung in den jeweils störenden Massen (m_2 für den Planeten m_1; m_1 für den Planeten m_2) und verschieden. Die kanonischen Elemente haben nun stets die Form (XV; 63), wenn die Massenfunktion $\varkappa$, je nachdem, welcher der beiden Körper gemeint ist und welches Koordinatensystem gewählt wurde, den Formeln (XV; 60a) bzw. (XV; 60b) entnommen wird. Im gestörten Problem genügen sie den Differentialgleichungen

$$\text{(XV; 66)} \qquad \dot{\alpha}_k = \frac{\partial F}{\partial \beta_k}; \quad \dot{\beta}_k = -\frac{\partial F}{\partial \alpha_k},$$

die jetzt ein halbkanonisches System bilden. Natürlich kann man im Falle JACOBIscher Koordinaten an Stelle von (XV; 66) auch ein kanonisches System erzeugen, indem man die Elemente α_{ik}, β_{ik} und die Störungsfunktionen F_i wieder mit μ_i multipliziert; denn dann wird $F_1 = F_2$, ohne daß sich die Form der Gleichungen (XV; 66) ändert. Allerdings werden dann die α_{ik}, β_{ik} wieder

von der ersten und F von der zweiten Ordnung in den kleinen Massen sein, was für theoretische Überlegungen belanglos, aber bei praktischen Anwendungen störend ist. Man kann aber auch die Ordnung von α_{ik}, β_{ik} und F herabsetzen, ohne die kanonische Form des Systems zu zerstören. Man setzt zu diesem Zweck

$$m_1 = \nu_1 m; \quad m_2 = \nu_2 m,$$

wobei m ein Parameter erster Ordnung ist und ν_1, ν_2 zwei konstante Faktoren nullter Ordnung sind, die man außerdem noch willkürlich normieren kann (etwa, indem man den größeren von ihnen gleich 1 setzt). Die α, β enthalten dann den Faktor m, die Störungsausdrücke F den Faktor m^2, und man kann, ohne die kanonische Form der Gleichungen (XV; 66) zu ändern, einen Faktor m herausdividieren. Wir werden diesen Kunstgriff in der Folge gelegentlich anwenden.

Will man die Gleichungen (XV; 66) explizit hinschreiben, so wird man F als Funktion der Zeit und der Elemente α_k, β_k darstellen müssen. Im Abschnitt 128 haben wir statt dessen angenommen, daß F als Funktion der Zeit und der (nichtkanonischen) klassischen Kegelschnittselemente

$$a, e, i; \quad T, \omega, \Omega$$

oder

$$a, e, i; \quad \varepsilon, \tilde{\omega}, \Omega$$

gegeben ist. Mit Hilfe der POISSONschen Klammerausdrücke haben wir die Differentialgleichungen (XV; 28) für diese Elemente im gestörten Problem aufgestellt. Die rechten Seiten dieser Gleichungen enthalten noch die partiellen Ableitungen der Funktion F nach den Elementen, die ohne besondere Schwierigkeit aus den klassischen Formeln der Ephemeridenrechnung (Kapitel IV) hergeleitet werden können, was wir bei späterer Gelegenheit explizite ausführen werden. Hier beschränken wir uns auf die Bemerkung, daß in den oskulierenden Bahnen die rechtwinkligen Koordinaten nach (IV; 13) in der Form

$$\begin{aligned} x = x_1 &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y = x_2 &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z = x_3 &= r \sin u \sin i \end{aligned}$$

geschrieben werden können, wobei $u = v + \omega$ das Argument der Breite ist. Setzen wir

$$\cos u = \cos v \cos \omega - \sin v \sin \omega; \quad \sin u = \sin v \cos \omega + \cos v \sin \omega,$$

so erscheinen die x_k der oskulierenden Bahn als lineare Funktionen von $r \cos v$ und $r \sin v$ mit konstanten Koeffizienten. Diese Ausdrücke lassen sich aber nach (VII; 43) in trigonometrische Reihen nach den Kosinus und Sinus der Vielfachen der mittleren Anomalie

$$M = n(t - T)$$

entwickeln, wobei $n = \varkappa\, a^{-3/2}$ eine Funktion von a und wegen (XV; 63) auch von α_1 ist. In der Differentialgleichung

$$\text{(XV; 67)} \qquad \dot{\beta}_1 = -\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}$$

kommt also rechts auch ein Ausdruck der Form

$$\frac{\partial F}{\partial M}\frac{\partial M}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial F}{\partial M}\frac{\partial M}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial F}{\partial M}\frac{\partial n}{\partial \alpha_1}(t - T)$$

vor, also ein der Zeit t proportionales Glied, das bei der Integration von (XV; 67) das Auftreten eines Terms mit t^2 nach sich ziehen wird. Wenn auch die Störungsfunktion die kleine Masse des störenden Planeten als Faktor enthält, so wächst dieser Term doch mit der Zeit unerwünscht stark an. Es ist daher besser, die explizite Zeitabhängigkeit der Koordinaten aus dem Formalismus der Störungstheorie herauszunehmen. Das gelingt, wie schon LAPLACE und LAGRANGE erkannt und vorgeschlagen haben, wenn man die linearen Zeitglieder mit in das Elementensystem einbezieht, so daß sie aus den Formeln verschwinden. Es sind dann allerdings die Elemente in der oskulierenden Bewegung nicht alle konstant, sondern eins von ihnen enthält ein der Zeit proportionales Glied.

DELAUNAY hat in seiner „Théorie du mouvement de la Lune" diesen Kunstgriff angewandt und als erster eine kanonische Transformation der oskulierenden Bahnelemente in diesem Sinne durchgeführt. Vertauscht man F mit $-F$ und die β_k mit $-\beta_k$, so daß nun

$$\beta_1 = -T; \quad \beta_2 = \omega; \quad \beta_3 = \Omega$$

ist, so bleiben die Störungsgleichungen (XV; 66) unverändert gültig. DELAUNAY behält dann die Elemente $\alpha_2, \beta_2; \alpha_3, \beta_3$ unter den neuen Bezeichnungen

$$\alpha_2 = G, \quad \beta_2 = g; \quad \alpha_3 = H, \quad \beta_3 = h$$

bei[1]) und führt statt α_1, β_1 zwei neue Elemente L, l ein, indem er zunächst

$$l = M = n(t - T) = n(t + \beta_1)$$

setzt. Es ist also l, die mittlere Anomalie in der oskulierenden Bahn, keine Konstante, sondern der Zeit proportional. Dabei ist

$$n = \varkappa\, a^{-3/2} = \varkappa\left(-\frac{\varkappa^2}{2\alpha_1}\right)^{-3/2} = \frac{1}{\varkappa^2}(-2\alpha_1)^{3/2},$$

und wenn wir α_1 als eine noch näher zu bestimmende Funktion von L allein betrachten, lauten die Transformationsformeln

$$\alpha_1 = \alpha_1(L); \quad \beta_1 = -t + \frac{l}{n} = -t + \varkappa^2 l(-2\alpha_1)^{-3/2}.$$

---

[1]) Eine Verwechslung mit den HAMILTONschen Funktionen, deren Symbole G, H im folgenden nicht mehr verwendet werden, ist nicht zu befürchten.

Es ist dann

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial L} = \frac{d\alpha_1}{dL}; \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial l} = 0,$$

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial t} = -1; \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial L} = \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial L}; \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial l} = \frac{1}{n}.$$

Damit die Transformation kanonisch ist, muß nach (XIV; 27)

(XV; 68) $$[L, l] = \frac{\partial \alpha_1}{\partial L}\frac{\partial \beta_1}{\partial l} - \frac{\partial \beta_1}{\partial L}\frac{\partial \alpha_1}{\partial l} = \frac{1}{n}\frac{d\alpha_1}{dL} = 1$$

oder, wegen $\alpha_1 = -\frac{\varkappa^2}{2a}$, $d\alpha_1 = \frac{\varkappa^2}{2a^2}\,da = \frac{1}{2}\varkappa n \frac{da}{\sqrt{a}}$,

$$dL = \frac{1}{n}\,d\alpha_1 = \frac{1}{2}\varkappa\frac{da}{\sqrt{a}}$$

sein. Hieraus folgt durch Integration (die Integrationskonstante, die in den Bewegungsgleichungen bei der Differentiation wieder herausfällt, kann fortgelassen werden)

$$L = \varkappa\sqrt{a},$$

und es ist

$$a = \frac{L^2}{\varkappa^2}; \quad n = \varkappa\, a^{-3/2} = \frac{\varkappa^4}{L^3}.$$

Die neuen Variablen

(XV; 69) $$L = \varkappa\sqrt{a}; \quad l = n(t - T) = \frac{\varkappa^4}{L^3}(t - T)$$

sind also konjugiert kanonisch. Da aber die LAGRANGEschen Klammerausdrücke

$$[t, L] = \frac{\partial \alpha_1}{\partial t}\frac{\partial \beta_1}{\partial L} - \frac{\partial \beta_1}{\partial t}\frac{\partial \alpha_1}{\partial L} = \frac{d\alpha_1}{dL} = n, \quad \text{[wegen (XV; 68)]},$$

$$[t, l] = \frac{\partial \alpha_1}{\partial t}\frac{\partial \beta_1}{\partial l} - \frac{\partial \beta_1}{\partial t}\frac{\partial \alpha_1}{\partial l} = 0$$

nicht sämtlich verschwinden, muß an Stelle der HAMILTONschen Funktion F der Störungsgleichungen eine neue eingeführt werden, die wir vorläufig mit F' bezeichnen. Nach S. 181 gilt dann

$$\frac{\partial F'}{\partial L} = \frac{\partial F}{\partial L} - [t, L] = \frac{\partial F}{\partial L} - n,$$

d.h., es ist bis auf konstante Summanden, die in den Bewegungsgleichungen wieder herausfallen,

$$F' = F - \int n\,dL = F + \frac{\varkappa^4}{2L^2}$$

statt F zu setzen. Diese Überlegungen, die für die oskulierende Bahn einer der beiden Massen gelten, gelten auch für die der anderen Masse. Nennen wir die Störungsfunktionen wieder F und bedenken, daß das Vorzeichen von F geändert worden ist, so ist für *Jacobische Koordinaten*

$$\text{(XV; 70a)} \quad \begin{cases} F_1 = \dfrac{\varkappa_1^4}{2L_1^2} + k^2 m_2 \left\{\dfrac{1}{\varrho} - \dfrac{1}{r_2^3} \sum_k x_{1k} x_{2k}\right\} + \langle\text{Glieder höherer Ordnung}\rangle, \\ F_2 = \dfrac{\varkappa_2^4}{2L_2^2} + k^2 m_1 \left\{\dfrac{1}{\varrho} - \dfrac{1}{r_2^3} \sum_k x_{1k} x_{2k}\right\} + \langle\text{Glieder höherer Ordnung}\rangle \end{cases}$$

zu setzen, während für gewöhnliche *heliozentrische Koordinaten*

$$\text{(XV; 70b)} \quad \begin{cases} F_1 = \dfrac{\varkappa_1^4}{2L_1^2} + k^2 m_2 \left\{\dfrac{1}{\varrho} - \dfrac{1}{r_2^3} \sum_k x_{1k} x_{2k}\right\}, \\ F_2 = \dfrac{\varkappa_2^4}{2L_2^2} + k^2 m_1 \left\{\dfrac{1}{\varrho} - \dfrac{1}{r_1^3} \sum_k x_{1k} x_{2k}\right\} \end{cases}$$

gilt. Die Differentialgleichungen für die gestörten Delaunayschen Elemente haben dann die Form

$$\text{(XV; 71)} \quad \begin{cases} \dot{L}_i = \dfrac{\partial F_i}{\partial l_i}; \quad \dot{G}_i = \dfrac{\partial F_i}{\partial g_i}; \quad \dot{H}_i = \dfrac{\partial F_i}{\partial h_i}, \\ \dot{l}_i = -\dfrac{\partial F_i}{\partial L_i}; \quad \dot{g}_i = -\dfrac{\partial F_i}{\partial G_i}; \quad \dot{h}_i = -\dfrac{\partial F_i}{\partial H_i}, \end{cases}$$

und der Zusammenhang zwischen den Delaunayschen Elementen und den klassischen Kegelschnittselementen ist in jedem System durch

$$\text{(XV; 72)} \quad \begin{cases} L = \varkappa \sqrt{a}; \quad G = \varkappa \sqrt{a(1-e^2)}; \quad H = \varkappa \sqrt{a(1-e^2)} \cos i, \\ l = n(t-T) = M; \quad g = \omega; \quad h = \Omega \end{cases}$$

gegeben.

132. *Die Poincaréschen kanonischen Elemente*

Die Methode der Variation der Konstanten wird am häufigsten benutzt, wenn es sich darum handelt, die gestörte Bewegung der Planeten und Planetoiden um die Sonne zu berechnen. Die intermediären Bahnen sind dann oskulierende Ellipsen mit meist kleinen Exzentrizitäten und kleinen Neigungen ihrer Bahnebenen gegen die Hauptkoordinatenebene (Ekliptik oder UVE).

In die Delaunayschen Elemente (XV; 72) gehen die Neigung i und die Exzentrizität e bzw. der Exzentrizitätswinkel φ ($e = \sin\varphi$) in der Form

$$G = \varkappa \sqrt{a} \cos\varphi; \quad H = \varkappa \sqrt{a} \cos\varphi \cos i$$

ein. Sind nun φ oder i (oder beide) klein, so lassen sich diese wichtigen Bestimmungsstücke der oskulierenden Bahnen aus den Elementen (XV; 72) nur ungenau ableiten. Poincaré hat gezeigt, wie man dieses Elementensystem

durch weitere kanonische Transformationen so abändern kann, daß dieser Übelstand vermieden wird.

Wir benutzen dabei die am Schluß von Abschnitt 123 bewiesenen Sätze. Man setze zunächst

$$\varrho_1 = L - G = \varkappa \sqrt{a}\,(1 - \cos\varphi) = 2\varkappa \sqrt{a} \sin^2\frac{\varphi}{2},$$

$$\varrho_2 = G - H = \varkappa \sqrt{p}\,(1 - \cos i) = 2\varkappa \sqrt{p} \sin^2\frac{i}{2}.$$

Die Transformation

$$L = L;\quad G = L - \varrho_1;\quad H = L - \varrho_1 - \varrho_2,$$

die L, G, H in L, ϱ_1, ϱ_2 überführt, ist linear. Um die L, ϱ_1, ϱ_2 zugeordneten konjugiert kanonischen Elemente, die mit $\lambda, \omega_1, \omega_2$ bezeichnet werden sollen, zu bestimmen, genügt es nach (XIV; 40), dafür zu sorgen, daß die Beziehung

$$L l + G g + H h \equiv L\lambda + \varrho_1 \omega_1 + \varrho_2 \omega_2$$

erfüllt ist. Es soll also

$$L l + (L - \varrho_1)\, g + (L - \varrho_1 - \varrho_2)\, h \equiv L\lambda + \varrho_1 \omega_1 + \varrho_2 \omega_2$$

sein, d.h., es ist

$$\lambda = l + g + h;\quad \omega_1 = -(g + h);\quad \omega_2 = -h$$

zu setzen. Das System $L, \varrho_1, \varrho_2; \lambda, \omega_1, \omega_2$ ist dann kanonisch, und die HAMILTONsche Funktion ändert sich nicht. Die Bedeutung der konjugierten Elemente ist aber folgende:

$$\begin{aligned} \lambda &= M + \omega + \Omega &&= \text{mittlere Länge in der Bahn,}\\ -\omega_1 &= \omega + \Omega = \varpi &&= \text{Länge des Perihels,}\\ -\omega_2 &= \Omega &&= \text{Länge des aufsteigenden Knotens.} \end{aligned}$$

Die neuen kanonischen Elemente

$$\text{(XV; 73)}\quad \begin{cases} L = \varkappa \sqrt{a}; & \varrho_1 = 2\varkappa\sqrt{a}\sin^2\dfrac{\varphi}{2}; \quad \varrho_2 = 2\varkappa\sqrt{a}\cos\varphi\sin^2\dfrac{i}{2},\\ \lambda = M + \varpi; & \omega_1 = -\varpi; \quad\quad \omega_2 = -\Omega \end{cases}$$

haben noch einen Nachteil, der ebenfalls bei kleinen Exzentrizitäten und Neigungen auftritt. Sind die Exzentrizitäten klein, so werden die Perihellängen ϖ, sind die Neigungen klein, die Knotenlängen Ω unsicher bestimmbar. POINCARÉ schlägt daher eine weitere Transformation vor, die $\varrho_1, \varrho_2; \omega_1, \omega_2$ durch

$$\text{(XV; 73a)}\quad \begin{cases} \xi = \sqrt{2\varrho_1}\cos\omega_1; \quad p = \sqrt{2\varrho_2}\cos\omega_2\\ \text{und deren Konjugierte}\\ \eta = \sqrt{2\varrho_1}\sin\omega_1; \quad q = \sqrt{2\varrho_2}\sin\omega_2 \end{cases}$$

ersetzt. Diese Transformation ist nach dem zweiten in Abschnitt 123 bewiesenen Satz – siehe (XIV; 41) – ebenfalls kanonisch und erfordert keine Änderung der HAMILTONschen Funktion. Sind nun im Falle kleiner Exzentrizität und Neigung ϱ_1 bzw. ϱ_2 klein von der zweiten Ordnung, so sind ξ, η bzw. p, q klein von der ersten Ordnung. Dadurch wird die Unsicherheit von ω_1 bzw. ω_2 kompensiert, d.h., die Größen $\xi, \eta; p, q$ sind im Sinne der bei der Rechnung verwendeten Stellenzahl genau.

133. *Störungsgleichungen für die klassischen Kegelschnittselemente*

Die kanonischen Elemente α, β der oskulierenden Bahnen haben den Vorzug, daß die Differentialgleichungen, aus denen sie sich als Funktionen der Zeit bestimmen lassen, sofort in der einfachen Gestalt (XV; 66) hingeschrieben werden können. In der Praxis zieht man es vor, statt dessen die Differentialgleichungen für die nichtkanonischen Kegelschnittselemente zu benutzen, in denen die ersten Differentialquotienten dieser Elemente nach der Zeit als lineare Funktionen der partiellen Ableitungen der Störungsfunktion F nach den Elementen erscheinen. Wir haben diese Gleichungen in der Form (XV; 28) bereits entwickelt; die Koeffizienten der partiellen Ableitungen ergaben sich als die aus den Elementen gebildeten POISSONschen Klammerausdrücke. Zu entsprechenden Differentialgleichungen gelangen wir auch, wenn wir – ausgehend von den POINCARÉschen Elementen (XV; 73) – die Beziehungen zwischen ihnen und den klassischen Elementen benutzen, um die Störungsgleichungen (XV; 66) zweckdienlich umzuformen. Wir werden das in diesem Abschnitt tun, nicht nur, weil dies eine wertvolle Kontrolle für die Richtigkeit der bisher gewonnenen Ergebnisse darstellen wird, sondern auch, weil wir auf diesem Wege einige Varianten der Störungsgleichungen erhalten, die in der Praxis häufig verwendet werden, und weil wir dabei über diese Gleichungen, die als Grundlage der in Kapitel XVIII zu behandelnden Methode der „speziellen Störungen der Bahnelemente" dienen, noch einige wichtige Bemerkungen zu machen haben.

Zwischen den kanonischen POINCARÉschen Elementen (XV; 73), die wir jetzt wieder mit α_k, β_k bezeichnen, und den Kegelschnittselementen a, φ, i; $\lambda, \tilde{\omega}, \Omega$ bestehen die Beziehungen

$$\text{(XV; 74)} \quad \begin{cases} \alpha_1 = \varkappa \sqrt{a}\,; & \alpha_2 = 2\alpha_1 \sin^2 \frac{\varphi}{2}; & \alpha_3 = 2(\alpha_1 - \alpha_2) \sin^2 \frac{i}{2}, \\ \beta_1 = \lambda; & \beta_2 = -\tilde{\omega}; & \beta_3 = -\Omega. \end{cases}$$

Umgekehrt ist also

$$\text{(XV; 75)} \quad \begin{cases} a = \frac{\alpha_1^2}{\varkappa^2}; & \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{\alpha_2}{2\alpha_1}; & \sin^2 \frac{i}{2} = \frac{\alpha_3}{2(\alpha_1 - \alpha_2)}, \\ \lambda = \beta_1; & \tilde{\omega} = -\beta_2; & \Omega = -\beta_3. \end{cases}$$

Durch Differenzieren nach der Zeit erhält man aus (XV; 75)

$$
(\text{XV}; 76)\quad
\begin{cases}
\dfrac{da}{dt} = \dfrac{2\alpha_1\dot{\alpha}_1}{\varkappa^2}, \\[2ex]
2\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}\,\dfrac{d\varphi}{dt} = \sin\varphi\,\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{\alpha_1\dot{\alpha}_2 - \alpha_2\dot{\alpha}_1}{\alpha_1^2}, \\[2ex]
2\sin\dfrac{i}{2}\cos\dfrac{i}{2}\,\dfrac{di}{dt} = \sin i\,\dfrac{di}{dt} = \dfrac{(\alpha_1-\alpha_2)\,\dot{\alpha}_3 - \alpha_3(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2)}{(\alpha_1-\alpha_2)^2}, \\[2ex]
\dfrac{d\lambda}{dt} = \dot{\beta}_1, \quad \dfrac{d\tilde{\omega}}{dt} = -\dot{\beta}_2, \quad \dfrac{d\Omega}{dt} = -\dot{\beta}_3.
\end{cases}
$$

Man setze nun gemäß (XV; 66)

$$
(\text{XV}; 77)\quad
\begin{cases}
\dot{\alpha}_1 = \dfrac{\partial F}{\partial\beta_1} = \dfrac{\partial F}{\partial\lambda}; \\[2ex]
\dot{\beta}_1 = -\dfrac{\partial F}{\partial\alpha_1} = -\left(\dfrac{\partial F}{\partial a}\dfrac{\partial a}{\partial\alpha_1} + \dfrac{\partial F}{\partial\varphi}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha_1} + \dfrac{\partial F}{\partial i}\dfrac{\partial i}{\partial\alpha_1}\right), \\[2ex]
\dot{\alpha}_2 = \dfrac{\partial F}{\partial\beta_2} = -\dfrac{\partial F}{\partial\tilde{\omega}}; \quad \dot{\beta}_2 = -\dfrac{\partial F}{\partial\alpha_2} = -\left(\dfrac{\partial F}{\partial\varphi}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha_2} + \dfrac{\partial F}{\partial i}\dfrac{\partial i}{\partial\alpha_2}\right), \\[2ex]
\dot{\alpha}_3 = \dfrac{\partial F}{\partial\beta_3} = -\dfrac{\partial F}{\partial\Omega}; \quad \dot{\beta}_3 = -\dfrac{\partial F}{\partial\alpha_3} = -\dfrac{\partial F}{\partial i}\dfrac{\partial i}{\partial\alpha_3}
\end{cases}
$$

und bestimme aus (XV; 74) und (XV; 75), wenn noch nach (XV; 27)

$$
f = \frac{1}{n\,a^2} = \frac{1}{\varkappa\sqrt{a}} = \frac{1}{\alpha_1}, \qquad (n = \varkappa\,a^{-3/2})
$$

gesetzt wird,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial\alpha_1} &= \frac{2\alpha_1}{\varkappa^2} = \frac{2\sqrt{a}}{\varkappa} = 2a\,f, \\
\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_1} &= -\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2\sin\varphi} = -f\tan\frac{\varphi}{2}, \\
\frac{d\varphi}{\partial\alpha_2} &= \frac{1}{\alpha_1\sin\varphi} = f\operatorname{cosec}\varphi, \\
\frac{\partial i}{\partial\alpha_1} &= -\frac{\alpha_3}{(\alpha_1-\alpha_2)^2\sin i} = -f\tan\frac{i}{2}\sec\varphi, \\
\frac{\partial i}{\partial\alpha_2} &= -\frac{\partial i}{\partial\alpha_1} = f\tan\frac{i}{2}\sec\varphi, \\
\frac{\partial i}{\partial\alpha_3} &= \frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)\sin i} = f\operatorname{cosec} i\sec\varphi.
\end{aligned}
$$

Setzt man dies in (XV; 77) und (XV; 76) ein, so entsteht

$$
(\mathrm{XV};\,78)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= 2f\,a\,\frac{\partial F}{\partial \lambda},\\
\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} &= -f\left\{\frac{\partial F}{\partial \bar\omega} + 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\,\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right\},\\
\sin i\,\frac{\partial i}{\partial t} &= -f\sec\varphi\left\{\frac{\partial F}{\partial \Omega} + 2\sin^2\frac{i}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial \bar\omega} + \frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)\right\},\\
\frac{d\Omega}{dt} &= f\sec\varphi\,\operatorname{cosec} i\,\frac{\partial F}{\partial i},\\
\frac{d\bar\omega}{dt} &= f\left\{\operatorname{cosec}\varphi\,\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \sec\varphi\tan\frac{i}{2}\,\frac{\partial F}{\partial i}\right\},\\
\frac{d\lambda}{dt} &= f\left\{\tan\frac{\varphi}{2}\,\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \tan\frac{i}{2}\sec\varphi\,\frac{\partial F}{\partial i} - 2a\,\frac{\partial F}{\partial a}\right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

An dieses System von Differentialgleichungen erster Ordnung für die variablen oskulierenden Elemente einer gestörten Planetenbahn knüpfen wir eine Reihe von erläuternden Bemerkungen:

1. Die Störungsfunktion F setzt sich, sofern sie die Elemente des gestörten Planeten enthält, nach (XV; 70a, b) aus zwei Bestandteilen

$$F = F_0' + F_0$$

zusammen, wobei

$$F_0' = \frac{\varkappa^4}{2L^2} = \frac{\varkappa^2}{2a}$$

nur von dem Element a, der großen Halbachse der oskulierenden Ellipse, abhängt. Für alle Elemente außer a gilt also

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{\partial F_0}{\partial \varphi};\quad \frac{\partial F}{\partial i} = \frac{\partial F_0}{\partial i};\quad \ldots;\quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{\partial F_0}{\partial \lambda},$$

aber für die partielle Ableitung nach a

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial F_0}{\partial a} + \frac{\partial F_0'}{\partial a} = \frac{\partial F_0}{\partial a} - \frac{\varkappa^2}{2a^2}.$$

Wir dürfen also in den ersten fünf Gleichungen (XV; 78), in denen $\partial F/\partial a$ nicht vorkommt, F durch F_0 ersetzen.

Wir erinnern uns nun daran, daß F_0 die störende Masse als Faktor enthält. Die rechten Seiten der ersten fünf Gleichungen (XV; 78) sind also sämtlich Ausdrücke von der ersten Ordnung in m_2, wenn sich die Gleichungen auf die Elemente des Planeten mit der Masse m_1 beziehen, und umgekehrt. Wenn man also in erster Näherung statt der variablen Elemente die konstanten oskulierenden Elemente auf den rechten Seiten dieser Gleichungen einsetzt, so begeht

man Fehler der zweiten Ordnung, die man zunächst vernachlässigen darf. Die totalen Differentialquotienten $da/dt, d\varphi/dt, \ldots, d\bar{\omega}/dt$ sind dann bekannte Funktionen der Zeit; man erhält somit $a(t), \varphi(t), \ldots, \bar{\omega}(t)$ durch einfache Quadratur und mit einer für ziemlich lange Zeiträume vor und nach der Oskulationsepoche ausreichenden Genauigkeit. Wenn nötig, kann dieser Prozeß wiederholt werden, indem man in zweiter Näherung die aus dieser Quadratur hervorgehenden Funktionen der Zeit an Stelle der konstanten Elemente benutzt.

2. Eine Ausnahme bildet die letzte Gleichung (XV; 78), da

$$F_0' = \frac{\varkappa^2}{2a}$$

keinen Faktor von der Ordnung der Massen enthält. Es ist demnach, wenn

$$R_\lambda = f\left\{\tan\frac{\varphi}{2}\frac{\partial F_0}{\partial\varphi} + \tan\frac{i}{2}\sec\varphi\frac{\partial F_0}{\partial i} - 2a\frac{\partial F_0}{\partial a}\right\}$$

ein Ausdruck von der Ordnung der störenden Masse ist,

$$\frac{d\lambda}{dt} = R_\lambda - 2af\frac{\partial F_0'}{\partial a} = R_\lambda + \frac{\varkappa^2 f}{a} = R_\lambda + n.$$

Durch Integration ergibt sich daraus

$$\text{(XV; 79)} \qquad \lambda = \lambda_0 + \int_0^t n\,dt + \int_0^t R_\lambda\,dt,$$

wenn λ_0 die mittlere Länge zur Zeit $t = 0$ bezeichnet. Hierbei wird der Integrand des ersten Integrals durch Integration der ersten Differentialgleichung (XV; 78) gewonnen; denn aus $n = \varkappa a^{3/2}$ und (XV; 78) folgt

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3}{2}\varkappa a^{-5/2}\frac{da}{dt} = -3fn\frac{\partial F_0}{\partial\lambda}; \quad n = n_0 - 3f\int_0^t n\frac{\partial F_0}{\partial\lambda}dt$$

und daher

$$\lambda = n_0 t + \lambda_0 + \int_0^t R_\lambda\,dt - 3f\iint_0^t n\frac{\partial F_0}{\partial\lambda}(dt)^2.$$

Beide Integrale auf der rechten Seite dieser Gleichung, das einfache wie das doppelte, sind nun von der Ordnung der störenden Masse, so daß jetzt die Integration mit dem gleichen Iterationsverfahren gelingt wie bei den übrigen Elementen.

3. Die Koordinaten des Planeten in der oskulierenden Bahn lassen sich nach den Formeln der Kapitel IV und VII in trigonometrische Reihen entwickeln, die nach den Vielfachen der mittleren Länge λ fortschreiten. Dasselbe gilt

dann auch für die Störungsfunktion F_0. Es ist also F_0 durch eine Reihe der Form

(XV; 80)
$$\sum_{i=0}^{\infty} C_i \cos(i\lambda + D_i)$$

darstellbar, wo die Größen C_i, D_i nur von den übrigen Elementen, nicht aber von λ abhängen. Bei der partiellen Differentiation nach $a, \ldots, \tilde{\omega}$ sind also nur diese Abhängigkeiten zu berücksichtigen, nicht aber die Tatsache, daß in

$$\lambda = \varkappa a^{-3/2}(t - T) + \tilde{\omega}$$

die Elemente a, T und $\tilde{\omega}$ neben der Zeit t implizite enthalten sind; denn wir haben ja λ *an Stelle von* T als neues und unabhängiges Element eingeführt.

4. In der klassischen Himmelsmechanik finden wir statt λ, der mittleren Länge zur Zeit der Oskulation, die mittlere Länge ε zu einer beliebig wählbaren festen Epoche $t = 0$ als variables Element aufgeführt. Das System der Elemente ist dann

(XV; 81)
$$a, \varphi, i;\ \Omega, \tilde{\omega}, \varepsilon,$$

und es ist

(XV; 82)
$$\lambda = n t + \varepsilon, \quad (n = \varkappa a^{-3/2})$$

von a, ε und der Zeit t abhängig. Denken wir uns wieder F_0 in eine trigonometrische Reihe der Form (XV; 80) entwickelt, so sind die Koeffizienten C_i, D_i von den ersten fünf Elementen (XV; 81), nicht aber von ε abhängig, das nur in λ implizite vorkommt. Es ist demnach

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial F_0}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial F_0}{\partial \lambda},$$

und wir dürfen in den Gleichungen (XV; 78) überall $\partial F/\partial\lambda = \partial F_0/\partial\lambda$ durch $\partial F_0/\partial\varepsilon$ ersetzen. Da außerdem, wie oben,

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{\partial F_0}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial F}{\partial i} = \frac{\partial F_0}{\partial i}; \quad \frac{\partial F}{\partial \Omega} = \frac{\partial F_0}{\partial \Omega}; \quad \frac{\partial F}{\partial \tilde{\omega}} = \frac{\partial F_0}{\partial \tilde{\omega}}$$

ist, lauten die ersten fünf Gleichungen (XV; 78) nach Einführung der Elemente (XV; 81)

(XV; 83)
$$\left\{\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= 2f\,a\frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon},\\
\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} &= -f\left\{\frac{\partial F_0}{\partial \tilde{\omega}} + 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon}\right\},\\
\sin i\frac{di}{dt} &= -f\sec\varphi\left\{\frac{\partial F_0}{\partial \Omega} + 2\sin^2\frac{i}{2}\left(\frac{\partial F_0}{\partial \tilde{\omega}} + \frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon}\right)\right\},\\
\frac{d\Omega}{dt} &= f\sec\varphi\operatorname{cosec} i\frac{\partial F_0}{\partial i},\\
\frac{d\tilde{\omega}}{dt} &= f\left\{\operatorname{cosec}\varphi\frac{\partial F_0}{\partial \varphi} + \sec\varphi\tan\frac{i}{2}\frac{\partial F_0}{\partial i}\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Die letzte Gleichung (XV; 78) lautete ursprünglich

$$\frac{d\lambda}{dt} = n + R_\lambda = n + f\left\{\tan\frac{\varphi}{2}\frac{\partial F_0}{\partial\varphi} + \tan\frac{i}{2}\sec\varphi\frac{\partial F_0}{\partial i} - 2a\frac{\partial F_0}{\partial a}\right\},$$

wobei in $\partial F_0/\partial a$ die Abhängigkeit der mittleren Länge λ von a *nicht* zu berücksichtigen war. Andererseits ist wegen (XV; 82)

$$\frac{d\lambda}{dt} = n + t\frac{dn}{dt} + \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Es folgt also

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + t\frac{dn}{dt} = R_\lambda,$$

so daß in der Differentialgleichung für ε ein der Zeit t proportionales Glied auftritt. Um dies zu vermeiden, führt man statt ε ein neues variables Element ε' durch

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} + t\frac{dn}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} - n \tag{XV; 84}$$

ein. Die sechste Differentialgleichung unseres Systems lautet dann

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = f\left\{\tan\frac{\varphi}{2}\frac{\partial F_0}{\partial\varphi} + \tan\frac{i}{2}\sec\varphi\frac{\partial F_0}{\partial i} - 2a\frac{\partial F_0}{\partial a}\right\}. \tag{XV; 83a}$$

Da nun durch Integration von (XV; 84) und partielle Integration

$$\varepsilon' = \varepsilon + \int_0^t t\,dn = \varepsilon + n\,t - \int_0^t n\,dt$$

folgt, ist

$$\lambda = n\,t + \varepsilon = \int_0^t n\,dt + \varepsilon', \tag{XV; 85}$$

und es ist ferner

$$\frac{\partial F_0}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial F_0}{\partial\varepsilon'}\frac{\partial\varepsilon'}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial F_0}{\partial\varepsilon'},$$

so daß auch in (XV; 83) überall ε' statt ε gesetzt werden darf. Für die Epoche $t = 0$ ist

$$\lambda_0 = \varepsilon_0 = \varepsilon_0',$$

und da durch Integration von (XV; 83a)

$$\varepsilon' = \int_0^t R_\lambda\,dt + \varepsilon_0' = \int_0^t R_\lambda\,dt + \lambda_0$$

folgt, erhält man aus (XV; 85) die Gleichung (XV; 79) zurück.

Führt man statt φ die numerische Exzentrizität

$$e = \sin\varphi;\quad \frac{de}{dt} = \cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

ein und setzt dementsprechend

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{\partial F}{\partial e} \cos\varphi,$$

so kann man die Gleichungen (XV; 83) und (XV; 83a) auch in der Form

$$\text{(XV; 86)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= 2 f a \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{de}{dt} &= -f \cot\varphi \left\{ \frac{\partial F}{\partial \tilde\omega} + 2\sin^2\frac{\varphi}{2} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \right\}, \\ \frac{di}{dt} &= -f \sec\varphi \operatorname{cosec} i \left\{ \frac{\partial F}{\partial \Omega} + 2\sin^2\frac{i}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde\omega} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \right) \right\}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= f \sec\varphi \operatorname{cosec} i \frac{\partial F}{\partial i}, \\ \frac{d\tilde\omega}{dt} &= f \left\{ \cot\varphi \frac{\partial F}{\partial e} + \sec\varphi \tan\frac{i}{2} \frac{\partial F}{\partial i} \right\}, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= f \left\{ \tan\frac{\varphi}{2} \cos\varphi \frac{\partial F}{\partial e} + \tan\frac{i}{2} \sec\varphi \frac{\partial F}{\partial i} - 2a \frac{\partial F}{\partial a} \right\} \end{aligned} \right.$$

zusammenfassen, in denen F statt F_0 und ε statt ε' geschrieben ist, so daß nun nach (XV; 85)

$$\varepsilon = \lambda - \int_0^t n\, dt$$

ist. Vergleicht man die Formeln (XV; 86) mit den entsprechenden, auf ganz anderem Wege erhaltenen Formeln (XV; 28), so findet man völlige Übereinstimmung, abgesehen davon, daß die rechten Seiten der beiden Formelsätze das entgegengesetzte Vorzeichen haben. Das war aber zu erwarten; denn wir hatten ja bei der Einführung der Delaunayschen Elemente (S. 234) das Vorzeichen von F gewechselt. Das F in (XV; 86) ist also mit den zweiten Termen rechts in (XV; 70a, b) und mit $-F$ in den Formeln (XV; 65a, b) identisch.

KAPITEL XVI

DAS PLANETARE DREIKÖRPERPROBLEM. SÄKULARE UND LANGPERIODISCHE STÖRUNGEN

134. *Gestalt der Störungsfunktion*

Die Integration der Differentialgleichungen für die Koordinaten oder für die oskulierenden Bahnelemente eines Planeten, dessen Bewegung um die Sonne durch die Gravitationskräfte eines anderen Planeten (oder mehrerer anderer Planeten) gestört wird, läßt sich (s. auch Abschnitt 101) auf verschiedene Weise bewerkstelligen. Liegt ein konkreter Fall vor, d.h., sind die Anfangsbedingungen (Örter und Geschwindigkeiten der beteiligten Himmelskörper zur Zeit $t = t_0$) numerisch gegeben, so läßt sich die Bewegung dieser Körper bzw. die zeitliche Änderung der oskulierenden Bahnelemente durch numerische Integration der Differentialgleichungen mit jeder wünschenswerten Genauigkeit und für beliebig lange Zeiträume vor und nach der Epoche t_0 verfolgen. Die vielgestaltigen Methoden dieser „speziellen Störungsrechnung" und die bei ihrer Ausführung zu verwendenden Methoden der numerischen Integration von Differentialgleichungen werden in den Kapiteln XVIII bzw. XVII ausführlich behandelt werden. Ihnen stehen andere Methoden gegenüber, in denen ohne Spezialisierung auf konkrete Fälle allgemeine Formeln entwickelt werden, aus denen die Koordinaten bzw. die oskulierenden Bahnelemente der Himmelskörper direkt als Funktionen der Zeit entnommen werden können.

Während aber die Verfahren der numerischen Integration auch dann zum Ziele führen, wenn es sich um Bewegungen von Körpern beliebiger Masse handelt, die im Laufe der Zeit beliebige Abstände voneinander einnehmen können, lassen sich die Methoden der allgemeinen Störungsrechnung nur anwenden, wenn „intermediäre Bahnen" bekannt sind, die bereits eine ziemlich weitgehende Annäherung an die wahre Bahnbewegung darstellen, mit anderen Worten, wenn es möglich ist, von der in Kapitel XV beschriebenen Methode der Variation der Konstanten Gebrauch zu machen. Das trifft im Falle der Bewegung der Planeten, Kometen und Satelliten des Sonnensystems im allgemeinen zu; als intermediäre Bahnen dienen dann meistens die Kegelschnittbahnen des Zweikörperproblems, die durch störende Kräfte nur verhältnismäßig geringfügige Deformationen erleiden.

Eine vollständige Theorie der allgemeinen Störungen zu entwickeln, was auch eine Untersuchung der Konvergenz der in ihr auftretenden Reihen und damit der Grenzen ihrer Anwendbarkeit einschließt, soll dem dritten Band dieses Werkes vorbehalten bleiben, dessen Hauptthema diese Probleme bilden werden. Hier beschränken wir uns darauf, die theoretischen Grundlagen eines solchen Verfahrens festzulegen und uns mit ihrer Hilfe einen ersten Überblick über wesentliche Eigenschaften der Planetenbewegung zu verschaffen, deren Kenntnis das Eindringen in dieses schwierige und vielschichtige Gebiet erleichtern wird.

Rekapitulieren wir kurz die Ergebnisse, zu denen uns die in den vorhergehenden Kapiteln durchgeführten Untersuchungen verholfen haben, und beschränken wir uns wie dort auf den Fall des *planetaren Dreikörperproblems*, in dem zwei Himmelskörper (P_1, P_2) mit den kleinen Massen m_1 und m_2 um die Sonne laufen, deren Masse $m_0 = 1$ wir zweckmäßig als Masseneinheit wählen. Es sind dann m_1 und m_2 von der Ordnung 10^{-3} (Jupiter) oder auch kleiner; gegebenenfalls kann auch eine dieser Massen (Komet, Planetoid) verschwindend klein sein. Wenn wir noch den Fall naher Begegnung zwischen P_1 und P_2 vorerst ausschließen, über den weiter unten (Abschnitt 161) noch einiges zu bemerken sein wird, dann lassen sich die Bahnen dieser Himmelskörper relativ zur Sonne oder zu anderen Bezugspunkten (JACOBIsche Koordinaten!) für mehr oder weniger lange Zeiträume angenähert durch KEPLERsche Ellipsen mit den konstanten Elementen

$$a_i, e_i, i_i; \Omega_i, \tilde{\omega}_i, \varepsilon_i, \qquad (i = 1, 2) \tag{XVI; 1}$$

oder andere Kegelschnitte (Parabeln, Hyperbeln) darstellen. Insbesondere lassen sich diese intermediären Elemente so definieren, daß die durch sie bestimmten Kegelschnittbahnen die wahren (gestörten) Bahnen in irgendeinem Zeitpunkt t oskulieren. Die gestörten Bahnen sind dann bestimmt, wenn es gelingt, die Elemente (XVI; 1) als (im allgemeinen sehr langsam veränderliche) Funktionen der Oskulationsepoche t zu berechnen, wozu die Differentialgleichungen (XV; 86)

$$\frac{d a_i}{dt} = 2 f_i a_i \frac{\partial F_i}{\partial \varepsilon_i}; \quad \frac{d e_i}{dt} = \cdots, \qquad (i = 1, 2) \tag{XVI; 2}$$

dienen. Die rechten Seiten enthalten als Faktor die jeweils störende Masse, also m_2 im System $i = 1$, m_1 im System $i = 2$. Man darf also, solange es erlaubt ist, Glieder von der Ordnung $m_1^2, m_1 m_2, m_2^2$ zu vernachlässigen, auf den rechten Seiten dieser Gleichungen, die Funktionen der oskulierenden Elemente und der Zeit sind, statt der variablen die konstanten Elemente benutzen. Dann sind aber die rechten Seiten von (XVI; 2) bekannte Funktionen der Zeit t, deren Integration prinzipiell möglich ist.

Die so abgeleiteten variablen Elemente enthalten „Störungen erster Ordnung". Nachdem sie bekannt geworden sind, kann man sie in den Störungsausdrücken mit berücksichtigen und die Integration erneut ausführen. Es werden dann auch Terme entstehen, die von der Ordnung der Quadrate bzw. Produkte der Massen sind. Diese zusätzlichen Glieder liefern bei der Integration „Störungen zweiter Ordnung". So könnte man ad libitum fortfahren und damit Formeln erhalten, die – sofern ihre Konvergenz gesichert bleibt – für beliebig lange Zeiten genau genug sind, wenn nicht die komplizierte Gestalt der Störungsfunktionen F_i diesem Vorhaben eine praktisch unüberwindbare Schranke setzte. Schon die Störungsglieder zweiter Ordnung sind so verwickelt aufgebaut, daß eine weitere Verbesserung der Theorie bald ins Uferlose führen würde. Andererseits reichen aber im Falle der Planetenbewegung im Sonnensystem schon die Störungen erster Ordnung für die meisten praktischen Zwecke aus, und nur in Sonderfällen (sehr große Zwischenzeiten, große Annäherung

zwischen den beiden Körpern oder wenn die Störungen erster Ordnung ausnahmsweise große Beträge erreichen) werden einzelne Terme zweiter und mitunter auch dritter Ordnung merklich werden.

Da es uns hier hauptsächlich auf grundsätzliche Fragen der allgemeinen Störungstheorie ankommt, werden wir uns auf die Diskussion der Störungen erster Ordnung beschränken und unseren Untersuchungen kanonische oder halbkanonische Differentialgleichungssysteme zugrunde legen. Wir wählen das System der DELAUNAYschen Elemente (XV; 72):

$$\text{(XVI; 3)} \qquad \begin{cases} L_i = \varkappa_i \sqrt{a_i}; & G_i = \varkappa_i \sqrt{p_i}; & H_i = \varkappa_i \sqrt{p_i} \cos i_i, \\ l_i = M_i; & g_i = \omega_i; & h_i = \Omega_i, \end{cases} \qquad (i = 1, 2),$$

die den Differentialgleichungen

$$\text{(XVI; 4)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dL_i}{dt} = \dfrac{\partial F_i}{\partial l_i}; & \dfrac{dG_i}{dt} = \dfrac{\partial F_i}{\partial g_i}; & \dfrac{dH_i}{dt} = \dfrac{\partial F_i}{\partial h_i}, \\ \dfrac{dl_i}{dt} = -\dfrac{\partial F_i}{\partial L_i}; & \dfrac{dg_i}{dt} = -\dfrac{\partial F_i}{\partial G_i}; & \dfrac{dh_i}{dt} = -\dfrac{\partial F_i}{\partial H_i}, \end{cases} \qquad (i = 1, 2)$$

genügen. In diesem halbkanonischen System haben die Störungsfunktionen F_1, F_2 die Form (XV; 70a) bzw. (XV; 70b), je nachdem Örter und Geschwindigkeiten in JACOBIschen oder in heliozentrischen Relativkoordinaten ausgedrückt werden. Im ersten Fall ist, mit $m_0 = 1$,

$$\varkappa_1 = k \sqrt{1 + m_1}; \quad \varkappa_2 = k \sqrt{\frac{1 + m_1 + m_2}{1 + m_1}} \quad \text{(JACOBIsche Koordinaten)},$$

im letzteren dagegen

$$\varkappa_1 = k \sqrt{1 + m_1}; \quad \varkappa_2 = k \sqrt{1 + m_2} \quad \text{(heliozentrische Koordinaten)}$$

zu setzen. Es sei nur der Vollständigkeit halber bemerkt, daß man im Falle JACOBIscher Koordinaten das Gleichungssystem (XVI; 4) natürlich auch kanonisch, d.h. mit einer einheitlichen HAMILTONschen Funktion F, schreiben kann. Zu diesem Zweck wird man die DELAUNAYschen Elemente der ersten Zeile mit den Faktoren (XV; 60a):

$$\mu_1 = \frac{m_1}{1 + m_1} \quad \text{bzw.} \quad \mu_2 = \frac{m_2(1 + m_1)}{1 + m_1 + m_2},$$

multiplizieren, also statt L_i, G_i, H_i

$$L_i' = \mu_i L_i, \quad G_i' = \mu_i G_i, \quad H_i' = \mu_i H_i$$

setzen. Geschieht dasselbe mit den F_i, so ändert sich das System (XVI; 4) nicht und nimmt dann die kanonische Form

$$\frac{dL_i'}{dt} = \frac{\partial F}{\partial l_i}; \quad \frac{dl_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L_i'}; \ldots$$

an, wo

$$\text{(XVI; 5)}\quad F = \mu_1 \frac{\varkappa_1^4}{2 L_1^2} + \mu_2 \frac{\varkappa_2^4}{2 L_2^2} + $$
$$+ k^2 m_1 m_2 \left\{\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r_2^3} \sum_{k=1}^{3} x_{1k} x_{2k}\right\} + \langle\text{Glieder höherer Ordnung}\rangle$$

ist; denn es darf ja – siehe (XV; 70a) –, bis auf Terme höherer Ordnung, im letzten Störungsglied

$$m_2 \mu_1 = m_1 \mu_2 = m_1 m_2$$

geschrieben werden. Setzt man in den beiden ersten Termen von (XVI; 5) $L_1 = L_1'/\mu_1$, $L_2 = L_2'/\mu_2$, so ergibt sich

$$\frac{\mu_1^3 \varkappa_1^4}{2 L_1'^2} + \frac{\mu_2^3 \varkappa_2^4}{2 L_2'^2} = \frac{\sigma_1^4}{2 \mu_1 L_1'^2} + \frac{\sigma_2^4}{2 \mu_2 L_2'^2}, \qquad (\sigma_i = \mu_i \varkappa_i).$$

Schreibt man nun wieder L_i statt L_i' usw., so erhält man schließlich das kanonische System

$$\text{(XVI; 6)}\quad \begin{cases} \dfrac{dL_i}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial l_i}; & \dfrac{dG_i}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial g_i}; \quad \dfrac{dH_i}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial h_i}, \\ \dfrac{dl_i}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial L_i}; & \dfrac{dg_i}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial G_i}; \quad \dfrac{dh_i}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial H_i}, \end{cases} \qquad (i = 1, 2)$$

für die DELAUNAYschen Elemente

$$\text{(XVI; 7)}\quad \begin{cases} L_i = \sigma_i \sqrt{a_i}; & G_i = \sigma_i \sqrt{p_i}; \quad H_i = \sigma_i \sqrt{p_i} \cos i_i, \\ l_i = M_i; & g_i = \omega_i; \quad h_i = \Omega_i \end{cases}$$

und die Störungsfunktion

$$\text{(XVI; 8)}\quad F = \frac{\sigma_1^4}{2 \mu_1 L_1^2} + \frac{\sigma_2^4}{2 \mu_2 L_2^2} + k^2 m_1 m_2 \left\{\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r_2^3} \sum_k x_{1k} x_{2k}\right\} + \cdots.$$

Jetzt sind aber die beiden ersten Terme von (XVI; 8) von der ersten Ordnung in den kleinen Massen, da ja σ_i, μ_i und L_i von der ersten Ordnung sind. Der letzte Term ist von der zweiten Ordnung; die hier nicht hingeschriebenen Restglieder sind von dritter und höherer Ordnung und sollen künftig fortgelassen werden.

Man kann nun, wie schon in Abschnitt 131 angedeutet wurde, die Ordnung aller Ausdrücke wieder herabsetzen, wenn man

$$m_1 = \alpha_1 m; \quad m_2 = \alpha_2 m$$

setzt, wo α_1, α_2 zwei konstante Faktoren $\leqq 1$ seien, die man durch geeignete Festsetzungen normieren kann – etwa, indem man ihre Summe oder die größere von ihnen gleich 1 setzt. Es tritt dann in F wie in σ_i, μ_i und den Elementen

L_i, G_i, H_i der gemeinsame Faktor m auf, den man herausdividieren kann, ohne daß sich die Form der Differentialgleichungen (XVI; 6) ändert. Es ist dann

$$
\text{(XVI; 9)} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{k\,\alpha_1}{\sqrt{1+m_1}}, \quad \sigma_2 = k\,\alpha_2 \sqrt{\dfrac{1+m_1}{1+m_1+m_2}}; \\[2ex] \mu_1 = \dfrac{\alpha_1}{1+m_1}, \quad \mu_2 = \alpha_2 \dfrac{1+m_1}{1+m_1+m_2}, \\[2ex] F = k^2 \left\{ \dfrac{\alpha_1}{2a_1} + \dfrac{\alpha_2}{2a_2} + \alpha_1 \alpha_2 m \left(\dfrac{1}{\varrho} - \dfrac{1}{r_2^3} \sum x_{1k}\, x_{2k} \right) + \cdots \right\} \end{cases}
$$

oder, wenn man $a_i = L_i^2/\sigma_i^2$ setzt und beachtet, daß nun σ_i, μ_i, L_i von der nullten Ordnung sind,

$$
\text{(XVI; 9a)} \quad F = \frac{\sigma_1^4}{2\mu_1 L_1^2} + \frac{\sigma_2^4}{2\mu_2 L_2^2} + k^2 \alpha_1 \alpha_2 m \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r_2^3} \sum x_{1k}\, x_{2k} \right) + \cdots.
$$

In der Praxis kommt es auf dasselbe hinaus, ob wir das kanonische System (XVI; 6), (XVI; 7), (XVI; 9) und (XVI; 9a) benutzen oder der halbkanonischen Form (XV; 71) mit den Elementen (XV; 72) den Vorzug geben. Wenn man sich aber entschließt, halbkanonische Gleichungen zu wählen, dann verdienen die heliozentrischen Koordinaten den Vorzug, vor allem weil sich die Störungsausdrücke zwanglos in der geschlossenen Form (XV; 70b) schreiben lassen. Zwar ist dies auch für JACOBIsche Koordinaten möglich, wenn wir für das letzte Glied der Störungsfunktion den geschlossenen Ausdruck (XV; 62a) wählen; dieser hat aber den Nachteil, daß er die Differenz zweier nahezu gleicher Größen enthält.

135. *Entwicklung der Störungsfunktion*

Welche Gestalt der Störungsfunktion (oder der verschiedenen Störungsfunktionen F_i) wir unseren Untersuchungen auch zugrunde legen, es wird immer möglich sein, sie in der Form von Potenzreihen

$$
\text{(XVI; 10)} \qquad F = F_0 + mF_1 + m^2 F_2 + \cdots
$$

zu schreiben, wo $m = m_1/\alpha_1 = m_2/\alpha_2$ eine Größe von der Ordnung der Planetenmassen ist, und es ist bemerkenswert, daß F_0 nur von den DELAUNAYschen Elementen L_1 und L_2 (oder von einem von ihnen) abhängt. Für jeden der beiden Planeten besteht dann ein kanonisches System von Differentialgleichungen, und das zugehörige F ist eine Funktion der Koordinaten (bzw. der Bahnelemente) beider Planeten und der Zeit. Nach dieser Festsetzung erübrigt es sich, Elemente und Koordinaten der Planeten durch Indizes ($i = 1, 2$) zu unterscheiden, ausgenommen dort, wo Verwechslungen möglich sind.

Unter den Differentialgleichungen für die DELAUNAYschen Elemente nehmen die für die mittlere Anomalie l eine Sonderstellung ein; denn es enthält ja

$$
\text{(XVI; 11)} \qquad \frac{dl}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L} = -\left(\frac{\partial F_0}{\partial L} + m \frac{\partial F_1}{\partial L} + \cdots \right)
$$

einen Term nullter Ordnung, während die übrigen Gleichungen

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial F}{\partial l} = m \frac{\partial F_1}{\partial l} + \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

nur Terme erster und höherer Ordnung aufweisen. Wenn wir also die Diskussion der Gleichungen (XVI; 11) einstweilen zurückstellen und uns überdies auf die Ermittlung der Störungen erster Ordnung beschränken, so haben wir (für jeden der beiden Planeten) fünf Differentialgleichungen für die variablen Elemente

(XVI; 12) $$E = L, G, H; g, h$$

von der Form

$$\frac{dE}{dt} = \pm m \frac{\partial F_1}{\partial e}$$

zu untersuchen, wenn e das zu E konjugierte kanonische Element bezeichnet und F_1 eine Funktion aller Elemente (einschließlich l_1, l_2) bedeutet. Man erhält dann durch Integration

$$E = E_0 \pm m \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial e} dt = E_0 + \delta E,$$

wobei E_0 den Wert bedeutet, den das Element E zur Zeit $t = 0$ annimmt, also den des entsprechenden Elements der Kegelschnittbahn, die zur gleichen Zeit die wahre Bahn im Planetenort oskuliert. Die kleine Variation δE wird als *Störung erster Ordnung* des Elements bezeichnet. F_1 kann immer, bis auf einen konstanten Faktor, in der Form

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r_i^3} \sum x_{1k} x_{2k} = \frac{1}{\varrho} - \frac{r_1 r_2 \cos\varphi}{r_i^3}$$

geschrieben werden, wo ϱ den Abstand der beiden Planeten bedeutet und r_1, r_2, φ (je nachdem, ob JACOBIsche oder heliozentrische Koordinaten gemeint sind) die geometrischen Größen der Abbildungen 25 bzw. 26 bezeichnen.

Beschränkt man sich auf Störungen erster Ordnung, so ist F_1 als Funktion der ungestörten Elemente zu betrachten. Sie besteht aus zwei Teilen, dem direkten oder Hauptteil $1/\varrho$ und dem indirekten oder Nebenteil. Aus Abb. 26 (S. 227) entnimmt man, daß für heliozentrische Koordinaten nach dem Kosinussatz der ebenen Trigonometrie

$$\varrho^2 = r_1^2 - 2 r_1 r_2 \cos\varphi + r_2^2$$

gilt. Ist nun m_2 der innere der beiden Planeten, also $r_2 < r_1$, so kann man

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r_1} \left[1 - 2 \frac{r_2}{r_1} \cos\varphi + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right]^{-1/2}$$

nach Potenzen von r_2/r_1 und trigonometrischen Funktionen von φ entwickeln. Der Winkel φ, den die heliozentrischen Ortsvektoren miteinander bilden, er-

scheint an der heliozentrischen Sphäre als Bogen zwischen den sphärischen Örtern von m_1 und m_2. Nimmt man auf Abb. 27 (S. 278) diese Örter irgendwo auf den Spuren $K_1 K$ bzw. $K_2 K$ der beiden intermediären Bahnen an, so bilden sie mit K, dem aufsteigenden Knoten der Bahn von m_2 bezüglich der Bahn von m_1, ein sphärisches Dreieck, in dem der Winkel J, die gegenseitige Neigung der beiden Bahnspuren, der Seite $(m_1 m_2) = \varphi$ gegenüberliegt. Nach dem sphärischen Kosinussatz ist dann

$$\cos\varphi = \cos(K m_1)\cos(K m_2) + \sin(K m_1)\sin(K m_2)\cos J.$$

Es ist aber

$$(K m_1) = v_1 + \omega_1, \quad (K m_2) = v_2 + \omega_2,$$

wenn v_1, v_2 die wahren Anomalien der Planeten in den intermediären Bahnen, ω_1, ω_2 die Abstände ihrer Perihelien von dem Knoten K bezeichnen. Da die Neigung J meist klein ist, wird es vorteilhaft sein, statt dessen

$$\cos\varphi = \cos(v_2 - v_1 + \omega_2 - \omega_1) - 2\sin(v_1 + \omega_1)\sin(v_2 + \omega_2)\sin^2\frac{J}{2}$$

zu schreiben. Für $J = 0$, also wenn beide Bahnen in einer Ebene verlaufen, geht dieser etwas komplizierte Ausdruck in

$$\varphi = v_2 - v_1 + \omega_2 - \omega_1$$

über. Da auch $r_i = p_i/(1 + e_i \cos v_i)$ gilt, erkennt man leicht, daß $1/\varrho$ in eine trigonometrische Reihe nach Vielfachen der wahren (und damit auch der mittleren) Anomalien entwickelbar ist, aber auch konstante Glieder neben den periodischen enthält. Demgegenüber enthält das Nebenglied nur periodische Glieder, wie weiter unten (S. 265) noch auf anderem Wege bewiesen werden soll.

Um F_1 als Funktion der Bahnelemente und der Zeit darzustellen, bedient man sich der Reihenentwicklungen des Zweikörperproblems, die in Kapitel VII gegeben worden sind. Für die mehr qualitativen Untersuchungen, die den Gegenstand dieses Abschnitts bilden, ist es am bequemsten, die Zeit in Form der mittleren Anomalien l einzuführen, die der Zeit direkt proportional sind und selbst zu den Delaunayschen Bahnelementen der ungestörten Bahnen zählen.

Auf eine explizite Ausführung einer solchen Entwicklung dürfen wir hier verzichten – in aller Allgemeinheit wird dies im dritten Band geschehen, für spezielle Sonderfälle auch schon in den nächsten Kapiteln. Hier genügt es darauf hinzuweisen, daß alle in F_1 vorkommenden Größen, die rechtwinkligen Koordinaten x sowie die r und ihre Reziproken, in trigonometrische Reihen nach Vielfachen der mittleren Anomalien l entwickelt werden können. Daraus folgt aber leicht, daß

$$F_1 = \sum_{j,k} C_{jk}\cos(j\, l_1 + k\, l_2 + D_{jk})$$

geschrieben werden kann, wobei $l_1 = n_1 t$, $l_2 = n_2 t$ der Zeit proportionale[1]) Größen (mit n_1, n_2 als den mittleren Bewegungen in den oskulierenden Bah-

[1]) Die Zeit t wird hier vom Perihel der oskulierenden Bahnen aus gezählt. Andernfalls tritt im Argument eine Konstante hinzu, die mit D_{jk} vereinigt werden kann.

nen) sind und die Ausdrücke C_{jk}, D_{jk} Konstante bedeuten. Die Indizes j, k, die auch im Argument der Kosinusfunktionen als Faktoren von l_1, l_2 auftreten, sind ganze Zahlen, die alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen können. In der Praxis wird sich allerdings herausstellen, daß man meistens mit einer beschränkten Anzahl von Gliedern auskommt, für die j, k kleine positive oder negative ganze Zahlen sind, da die C_{jk} mit wachsenden Indexbeträgen rasch gegen Null abnehmen. Auch ist es stets erlaubt, für j positive Zahlen (oder 0) zu setzen, da man statt $j' = -j$ und $D_{j'k}$ auch $j' = j \geqq 0$ und $D_{j'k} = D_{jk} + 180°$ setzen darf.

Die Zeit t kommt nur in l_1, l_2 vor, und man kann daher auch schreiben

$$F_1 = \sum_{j,k} C_{jk} \cos[(j\,n_1 + k\,n_2)\,t + D_{jk}]. \tag{XVI; 13}$$

Es ist ferner leicht einzusehen, daß die Phasenkonstanten D_{jk} nur die Winkelgrößen g_i, h_i, die Amplituden C_{jk} nur die Elemente L_i, G_i, H_i enthalten, deren Quadrate die Dimension einer Länge haben. Hieraus folgt aber, daß die Störungen erster Ordnung der fünf Elemente (XVI; 12) die Form

$$\text{(XVI; 14)}\quad \left\{\begin{aligned}
\delta L_1 &= m\int \frac{\partial F_1}{\partial l_1}\,dt = -m\int \sum_{j,k} C_{jk}\,j \sin(j\,l_1 + k\,l_2 + D_{jk})\,dt = \\
&\qquad = m\sum_{j,k} C_{jk}\,j\,\frac{\cos[(j\,n_1 + k\,n_2)\,t + D_{jk}]}{j\,n_1 + k\,n_2},\\
\delta L_2 &= m\int \frac{\partial F_1}{\partial l_2} \qquad = m\sum_{j,k} C_{jk}\,k\,\frac{\cos[(j\,n_1 + k\,n_2)\,t + D_{jk}]}{j\,n_1 + k\,n_2},\\
\delta G_i &= m\int \frac{\partial F_1}{\partial g_i} \qquad = m\sum_{j,k} C_{jk}\,\frac{\partial D_{jk}}{\partial g_i}\,\frac{\cos[(j\,n_1 + k\,n_2)\,t + D_{jk}]}{j\,n_1 + k\,n_2},\\
\delta H_i &= m\int \frac{\partial F_1}{\partial h_i} \qquad = m\sum_{j,k} C_{jk}\,\frac{\partial D_{jk}}{\partial h_i}\,\frac{\cos[(j\,n_1 + k\,n_2)\,t + D_{jk}]}{j\,n_1 + k\,n_2},\\
\delta g_i &= -m\int \frac{\partial F_1}{\partial G_i} \quad = -m\int \sum_{j,k} \frac{\partial C_{jk}}{\partial G_i}\cos[(j\,n_1 + k\,n_2)\,t + D_{jk}]\,dt = \\
&\qquad = -m\sum_{j,k} \frac{\partial C_{jk}}{\partial G_i}\,\frac{\sin[(j\,n_1 + k\,n_2)\,t + D_{jk}]}{j\,n_1 + k\,n_2},\\
\delta h_i &= -m\int \frac{\partial F_1}{\partial H_i} \quad = -m\sum_{j,k} \frac{\partial C_{jk}}{\partial H_i}\,\frac{\sin[(j\,n_1 + k\,n_2)\,t + D_{jk}]}{j\,n_1 + k\,n_2}
\end{aligned}\right.$$

annehmen. Diese Formeln erfordern aber noch einige wichtige Erläuterungen:

1. Einer der Summanden von (XVI; 13), nämlich der mit $j = k = 0$, ist konstant gleich $C_{00} \cos D_{00}$ und liefert bei der Integration ein der Zeit proportionales Glied. Allgemein haben also die gestörten Elemente (XVI; 12) die Gestalt

$$E = E_0 + E_1\,t + \sum_{j,k\neq 0} \frac{E_{jk}}{j\,n_1 + k\,n_2}\,\frac{\cos}{\sin}\,[(j\,n_1 + k\,n_2)\,t + D_{jk}], \tag{XVI; 15}$$

wobei nun in der Summe die Kombination $j = k = 0$ fortgelassen ist.

2. Eine Ausnahme bilden die Störungen der Elemente L_i; denn hier entfallen ja, wie die ersten beiden Gleichungen (XVI; 14) zeigen, vor Ausführung der Integration die Terme mit $j = k = 0$, da deren Amplituden den Faktor j bzw. k enthalten. Für $E = L_1, L_2$ ist also in (XVI; 15) $E_1 = 0$ zu setzen. Die L_i bzw. die L_i^2 proportionalen großen Halbachsen a_i der oskulierenden Bahnen sind daher, wenigstens was die Störungen erster Ordnung anbelangt, nur periodischen und keinen „säkularen", d.h. mit der Zeit fortschreitenden, Störungen unterworfen. Dies ist das zuerst von LAPLACE ausgesprochene Theorem von der Stabilität des Planetensystems; es besagt, daß die mittleren Entfernungen der Planeten von der Sonne nur periodisch um konstante Mittelwerte schwanken. Wäre dies nicht der Fall, gäbe es also säkulare Veränderungen der großen Halbachsen, so würde im Laufe der Zeit eine durchgreifende Strukturänderung des Systems unvermeidlich sein. Im planetaren Dreikörperproblem (etwa Sonne–Jupiter–Saturn) würde dann die mittlere Entfernung eines der beiden Planeten ins Unendliche wachsen, die des anderen gegen Null abnehmen. Später hat POISSON bemerkt, daß das Theorem von der Unveränderlichkeit der mittleren Sonnenabstände auch dann noch gilt, wenn man Störungen zweiter Ordnung in Betracht zieht. Für Störungen dritter Ordnung gilt es allerdings nicht mehr. ANDOYER hat gezeigt, daß allgemein in den Störungen p-ter Ordnung der Elemente L_i Glieder auftreten, die $t, t^2, \ldots, t^{p-2}$ proportional sind. Terme, die der Zeit t direkt proportional sind, erscheinen also zuerst in den Störungen der Ordnung $p = 3$. Da aber der Proportionalitätsfaktor eines solchen säkularen Terms von der Ordnung der dritten Potenz der störenden Massen wäre (im Sonnensystem also mindestens von der Ordnung 10^{-9}), wird es sehr lange dauern, bis ein solcher Term eben merklich wird, und praktisch unendlich lange, bis er Beträge annimmt, die das Gefüge des Systems wesentlich verändern. Immerhin muß vermerkt werden, daß das Gesetz von der Stabilität des Planetensystems nur innerhalb gewisser, allerdings sehr weiter Zeitgrenzen als gesichert angesehen werden darf.

3. Eine weitere Besonderheit der Störungsausdrücke (XVI; 14) muß noch hervorgehoben werden. Wenn die mittleren Bewegungen n_1, n_2 sich wie zwei ganze Zahlen verhalten, so gibt es unter den Termen von (XVI; 13) unendlich viele, für die $j n_1 + k n_2 = 0$ ist, und alle diese Terme würden bei der Integration Beiträge zu den säkularen Störungen liefern, wenn es erlaubt wäre, diese Beziehung als streng gültig für alle Zeiten anzusehen, und zwar würden in diesem Fall auch die L_i und die großen Halbachsen säkulare Störungen erleiden. Aber dies trifft in Wirklichkeit nur für $j = k = 0$ zu. In jedem anderen Fall wird eine „Kommensurabilität der mittleren Bewegungen"

$$\frac{n_2}{n_1} = -\frac{j}{k},$$

wenn überhaupt, immer nur für gewisse Zeitpunkte eintreten können, da ja die mittleren Bewegungen n_i infolge der periodischen Störungen, denen diese Größen unterworfen sind, nichtkonstante Funktionen der Zeit sind. Hier stoßen wir auf eine der größten Schwierigkeiten der allgemeinen Störungstheorie; die zahlreichen und noch keineswegs befriedigenden Versuche zu ihrer

Überwindung werden eines der wichtigsten Themata des dritten Bandes bilden. Hier genügen einige kurze Bemerkungen.

Die Entwicklung (XVI; 15) gilt streng, wenn wir die Größen $E_1, E_{jk}, D_{jk}, n_1, n_2$ nicht als Konstante, sondern im Sinne der Störungstheorie als Funktionen der Zeit ansehen. Es werden dann immer, selbst wenn für irgendeinen Zeitpunkt die mittleren Bewegungen in einem irrationalen Verhältnis zueinander stehen, Divisoren $q_{jk} = j\,n_1 + k\,n_2$ auftreten, die (wenn auch möglicherweise erst für sehr große positive Zahlen j, $-k$) dem Betrage nach unter jede noch so kleine Schranke fallen. Dann treten in (XVI; 15) periodische Glieder von sehr langer Periode $2\pi/q_{jk}$ auf, deren Amplituden E_{jk}/q_{jk} gegebenenfalls sehr groß sein können. Im allgemeinen nehmen allerdings die E_{jk} mit wachsenden Beträgen von j, k so rasch ab, daß auch dann die Amplituden noch klein bleiben. Nur im Falle kleiner Divisoren mit niedrigzahligen j, k können diese Terme so bedeutend werden, daß langperiodische Störungen mit beträchtlicher Amplitude auftreten. Das klassische Beispiel hierfür bietet die Bewegung der Planeten Jupiter und Saturn. Für sie sind die (als Mittelwerte über sehr lange Zeiten genommenen) mittleren täglichen Bewegungen

$$n_1 = 0^\circ.08309, \quad n_2 = 0^\circ.03346.$$

Es ist also

$$n_2 : n_1 = 0.40219 \approx 2 : 5.$$

In den Störungen, die diese Planeten aufeinander ausüben, sind also Glieder mit dem kleinen Divisor

$$5n_2 - 2n_1 = 0^\circ.00112 \approx \frac{1}{900}$$

enthalten, die eine langperiodische Störung mit der Periode

$$\frac{360^\circ}{0^\circ.00112} \text{ Tage} \approx 880 \text{ Jahre}$$

bewirken. Diese Störung ist besonders stark in den mittleren Längen der beiden Planeten ausgeprägt; ihre Amplitude beträgt bei Jupiter rund 20′, bei Saturn rund 48′; auch diese Zahlen verhalten sich annähernd wie 2 : 5.

Auch der besonders interessante und problematische Fall, daß die mittleren Bewegungen in der Zeiteinheit genau oder fast genau niedrigzahlig kommensurabel sind, kommt im Planetensystem mehrfach vor. So haben z.B. die Jupitermonde I, II, III mittlere Bewegungen, die sehr genau die Beziehung

$$n_1 - 3n_2 + 2n_3 = 0$$

erfüllen. Ähnliche Kommensurabilitäten niedriger Ordnung beobachtet man bei den Saturnsatelliten Mimas und Tethys (2 : 1), Enceladus und Dione (2 : 1), Titan und Hyperion (4 : 3). In diesem Zusammenhang muß man auch die Trojaner nennen, deren mittlere Bewegungen sich zu der des Jupiter sogar ganz streng wie 1 : 1 verhalten.

Diese merkwürdigen Beobachtungen illustrieren die Tatsache, daß reguläre Lösungen des Störungsproblems auch dann existieren, wenn die Reihen

(XVI; 15) ihren Sinn verlieren; denn offensichtlich divergieren diese, wenn irgendwelche Divisoren q_{jk} und ihre Vielfachen verschwinden oder nahezu verschwinden. In der Tat hat POINCARÉ gezeigt, daß die Reihen (XVI; 15) nicht gleichmäßig konvergent sind und daher die Lösung des Störungsproblems nur formal darzustellen vermögen. Sie sind dagegen, wenn man den Fall strenger Kommensurabilität ausschließt, für die Zwecke der Planetentheorie bedingt brauchbar – sie stellen (wiederum nach POINCARÉ) semikonvergente Reihen dar, die mehr oder weniger gute Annäherungen an die wirklichen Verhältnisse gewährleisten, wenn man sie bei Termen bestimmter Ordnung abbricht. An welcher Stelle der Entwicklung dies zu geschehen hat, ist eine Frage, deren Beantwortung weiterer Überlegungen bedarf. Im Falle strenger Kommensurabilität versagt die Methode ganz, und man wird dann nach anderen Lösungen des Störungsproblems suchen müssen. Hier verweisen wir auf Abschnitt 163, in dem der Fall der Trojanerbewegung noch einmal aufgegriffen werden wird, sowie auf andere Abschnitte des Kapitels XIX, die von den periodischen Lösungen des eingeschränkten Dreikörperproblems handeln.

Die säkularen Störungen haben, soweit Störungen erster Ordnung berücksichtigt werden, die Form $E_1 t$. Sofern sie die Winkelgrößen $g = \omega$, $h = \Omega$ betreffen, verändern diese Störungen die Form der Planetenbahnen nicht, sondern rufen nur Verschiebungen der Perihellage und der Richtung der Knotenlinien hervor. Dagegen bewirken die säkularen Störungen von G und H mit der Zeit fortschreitende Änderungen der Exzentrizitäten und Bahnneigungen, die Form und Lage der Bahnen wesentlich umgestalten können. Berücksichtigt man aber auch die Störungen höherer Ordnung, so wird man finden, daß zu den mit der Zeit t linear fortschreitenden säkularen Termen noch solche hinzutreten, die höheren Potenzen der Zeit proportional sind. Die säkularen Terme $E_1 t$ werden dann nur die ersten Glieder von Potenzreihen

$$f(t) = E_1 t + E_2 t^2 + E_3 t^3 + \cdots$$

darstellen, die möglicherweise beschränkt sind und den Charakter von Schwankungen mit sehr langer Periode haben.

Wir haben nun noch die Störungsgleichungen (XVI; 11) der Elemente l_1, l_2 zu diskutieren, die Terme von der nullten Ordnung, nämlich

$$-\frac{\partial F_0}{\partial L} = \frac{\sigma^4}{\mu L^3}$$

enthalten. Wegen

$$L = L^{(0)} + m \int \frac{\partial F_1}{\partial l} dt = L^{(0)} + \delta L$$

ist aber, bis zu Termen erster Ordnung genau,

$$\frac{dl}{dt} = -\left(\frac{\partial F_0}{\partial L} + m \frac{\partial F_1}{\partial L}\right) = \frac{\sigma^4}{\mu} (L^{(0)} + \delta L)^{-3} - m \frac{\partial F_1}{\partial L} =$$

$$= n^{(0)}\left(1 - 3 \frac{\delta L}{L^{(0)}}\right) - m \frac{\partial F_1}{\partial L},$$

wobei $n^{(0)} = \sigma^4 \mu^{-1} L^{(0)-3}$ die mittlere Bewegung in der ungestörten Bahn darstellt und für JACOBIsche Koordinaten

(XVI; 16a) $$n_1^{(0)} = a_1^{(0)-3/2} \sqrt{1 + m_1}; \quad n_2^{(0)} = a_2^{(0)-3/2} \sqrt{\frac{1 + m_1 + m_2}{1 + m_1}},$$

für heliozentrische Koordinaten

(XVI; 16b) $$n_i^{(0)} = a_i^{(0)-3/2} \sqrt{1 + m_i}, \qquad (i = 1, 2)$$

zu setzen ist. Die Integration ergibt dann

$$l = n^{(0)} t - m \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial L} dt - 3 \frac{n^{(0)}}{L^{(0)}} \int_0^t \delta L \, dt,$$

also, getrennt für l_1 und l_2,

$$\begin{aligned}
l_1 &= n_1^{(0)} t - m \int \sum_{j,k} \frac{\partial C_{jk}}{\partial L_1} \cos[(j n_1 + k n_2) t + D_{jk}] \, dt - \\
&\quad - 3 \frac{n_1^{(0)}}{L_1^{(0)}} m \int \sum_{j,k} j \, C_{jk} \frac{\cos[(j n_1 + k n_2) t + D_{jk}]}{j n_1 + k n_2} dt = \\
&= n_1^{(0)} t - m \sum_{j,k} \frac{\partial C_{jk}}{\partial L_1} \frac{\sin[(j n_1 + k n_2) t + D_{jk}]}{j n_1 + k n_2} - m \frac{\partial C_{00}}{\partial L_1} \cos D_{00} \cdot t - \\
&\quad - 3 \frac{n_1^{(0)}}{L_1^{(0)}} m \sum_{j,k} j \, C_{jk} \frac{\sin[(j n_1 + k n_2) t + D_{jk}]}{(j n_1 + k n_2)^2} = \\
&= \left(n_1^{(0)} - m \frac{\partial C_{00}}{\partial L_1} \cos D_{00} \right) t + \delta l_1 = (n_1^{(0)} + \delta n_1) \, t + \delta l_1, \\
l_2 &= n_2^{(0)} t - m \sum_{j,k} \frac{\partial C_{jk}}{\partial L_2} \frac{\sin[(j n_1 + k n_2) t + D_{jk}]}{j n_1 + k n_2} - m \frac{\partial C_{00}}{\partial L_2} \cos D_{00} \cdot t - \\
&\quad - 3 \frac{n_2^{(0)}}{L_2^{(0)}} m \sum_{j,k} k \, C_{jk} \frac{\sin[(j n_1 + k n_2) t + D_{jk}]}{(j n_1 + k n_2)^2} = \\
&= \left(n_2^{(0)} - m \frac{\partial C_{00}}{\partial L_2} \cos D_{00} \right) t + \delta l_2 = (n_2^{(0)} + \delta n_2) \, t + \delta l_2.
\end{aligned}$$

Man erhält also auch für die mittleren Anomalien säkulare und periodische Störungen. Die letzteren, die wir mit δl bezeichnet haben, enthalten – im Gegensatz zu den periodischen Störungen der anderen Elemente – Terme mit den Divisoren $(j n_1 + k n_2)^2$, die im Falle niedrigzahliger Kommensurabilitäten langperiodische Störungen mit besonders großen Amplituden hervorrufen. Hier erkennen wir auch die Ursache dafür, daß sich die langperiodischen Störungen der Bahnen von Jupiter und Saturn besonders auffällig in den mittleren Längen $\lambda = \Omega + \omega + l$ bemerkbar machen, worauf wir weiter oben hingewiesen haben. Auch die Trojaner, die mit Jupiter eine Kommensurabilität vom Typus 1 : 1 in den mittleren Bewegungen zeigen, führen ja langperiodische Schwankungen in Länge aus, die sehr große Amplituden haben: In

Abschnitt 120 wurde festgestellt, daß die Schwankungen in Länge diejenigen der Abstände von der Sonne um Faktoren von der Größenordnung $m^{-1/2}$ (bei den infinitesimalen Librationsbahnen der CHARLIERschen Theorie um den Faktor 19) übertreffen.

Die Formeln (XVI; 16a) bzw. (XVI; 16b) stellen das dritte KEPLERsche Gesetz für die oskulierenden Bahnen der Ausgangsepoche dar. Dieses Gesetz gilt aber auch für die oskulierenden Bahnen jeder beliebigen anderen Oskulationszeit. Sind also δn_i und δa_i die Störungen der mittleren Bewegung und der großen Halbachse für irgendeine Zeit, so gilt auch dann

$$(n_i^{(0)} + \delta n_i)\,(a_i^{(0)} + \delta a_i)^{-3/2} = n_i^{(0)}\, a_i^{(0)-3/2} = \varkappa_i.$$

Hier muß aber darauf hingewiesen werden, daß eine solche Beziehung nur für die n und a der oskulierenden Kegelschnittbahnen besteht, nicht aber für die Mittelwerte der mittleren Bewegungen und der großen Halbachsen, die man aus den Beobachtungen über lange Zeiträume ableitet. Diese Mittelwerte, aus denen die periodischen Störungen ganz oder zum größten Teil verschwunden sind, haben natürlich für die Beschreibung der Planetenbewegung eine besondere Bedeutung und erscheinen daher in den astronomischen Tafeln als „mittlere Elemente“. Für sie gilt aber, wenn n und a unabhängig voneinander aus langjährigen Beobachtungsreihen ermittelt wurden, das dritte KEPLERsche Gesetz nicht.

136. *Elimination der bekannten Integrale*

Das relative Dreikörperproblem erfordert zwölf Integrale, von denen vier, nämlich das Energieintegral und die drei Drehimpulssätze, bekannt sind. Es ist daher prinzipiell möglich, das System der Differentialgleichungen von der zwölften Ordnung auf die achte zu reduzieren, indem man diese Beziehungen verwendet. Diese Reduktion gelingt besonders einfach und formschön, wenn man die Unveränderliche Ebene (UVE) als Hauptebene des Koordinatensystems wählt und die Differentialgleichungen in der kanonischen Form als Störungsgleichungen für die DELAUNAYschen Elemente schreibt.

Diese Differentialgleichungen haben die Form (XVI; 6)

$$\begin{aligned} \frac{dL_i}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l_i}; & \frac{dG_i}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g_i}; & \frac{dH_i}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h_i}, \\ \frac{dl_i}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L_i}; & \frac{dg_i}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G_i}; & \frac{dh_i}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H_i}, \end{aligned} \qquad (i = 1, 2).$$

Die Drehimpulssätze lauten, wenn wir JACOBIsche Koordinaten

$$\mathfrak{q}_i(x_i, y_i, z_i)$$

für die beiden Planeten wählen und deren Massen m_1, m_2 in Einheiten der Sonnenmasse $m_0 = 1$ ausdrücken, nach (XI; 61) oder (XI; 66)

$$\sum_{i=1}^{2} \mu_i [\mathfrak{q}_i \dot{\mathfrak{q}}_i] = \mathfrak{g} = \text{const},$$

wobei nach (XI; 66)

$$\mu_1 = \frac{m_1}{1 + m_1}; \quad \mu_2 = \frac{m_2(1 + m_1)}{1 + m_1 + m_2}$$

zu setzen ist. Diese Gleichungen gelten aber, weil sie nur von den Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten abhängen, für jeden Zeitpunkt t auch für die Orts- und Geschwindigkeitsvektoren der zu t gehörenden oskulierenden Bahnen. Sind also $\mathfrak{g}_1(t)$ der (variable) Drehimpulsvektor der oskulierenden Bahn $\mathfrak{p}_1(t)$ des Planeten m_1 zur Zeit t und $\mathfrak{g}_2(t)$ der entsprechende Vektor der oskulierenden Bahn $\mathfrak{p}_2(t)$ von m_2, so ist für jeden Augenblick auch

$$\mu_1[\mathfrak{p}_1\,\dot{\mathfrak{p}}_1] + \mu_2[\mathfrak{p}_2\,\dot{\mathfrak{p}}_2] = \mu_1\,\mathfrak{g}_1(t) + \mu_2\,\mathfrak{g}_2(t) = \mathfrak{g} = \text{const.}$$

Nun haben aber, ausgedrückt in den variablen oskulierenden Bahnelementen, die Funktionen $\mathfrak{g}_1(t)$ und $\mathfrak{g}_2(t)$ die Form

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_1 &= \varkappa_1\sqrt{p_1}\,\mathfrak{k}_1 = k\sqrt{1+m_1}\sqrt{p_1}\,\mathfrak{k}_1; \quad \mu_1\,\mathfrak{g}_1 = \sigma_1\sqrt{p_1}\,\mathfrak{k}_1, \\
\mathfrak{g}_2 &= \varkappa_2\sqrt{p_2}\,\mathfrak{k}_2 = k\sqrt{\frac{1+m_1+m_2}{1+m_1}}\sqrt{p_2}\,\mathfrak{k}_2; \quad \mu_2\,\mathfrak{g}_2 = \sigma_2\sqrt{p_2}\,\mathfrak{k}_2,
\end{aligned} \qquad (\sigma_i = \varkappa_i\,\mu_i),$$

wenn $p_i = a_i(1 - e_i^2)$ die Parameter der oskulierenden Kegelschnittbahnen sind und $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2$ Einheitsvektoren bezeichnen, die auf den oskulierenden Bahnebenen senkrecht stehen. Sind also i_i, Ω_i Neigungen und Knotenlängen dieser Bahnen in bezug auf die Hauptebene des Koordinatensystems, so haben diese Einheitsvektoren nach (IV; 6) die Koordinaten

$$\mathfrak{k}_i = (\sin i_i \sin \Omega_i, \; -\sin i_i \cos \Omega_i, \; \cos i_i).$$

Beziehen wir sie aber auf die UVE als Hauptkoordinatenebene, so hat der konstante Vektor $\mathfrak{g}$ die Koordinaten

$$\mathfrak{g} = (0, 0, c),$$

und es ist c der konstante Betrag von $\mathfrak{g}$. Daraus folgen aber die Koordinatenbeziehungen

(XVI; 17a) $$\sigma_1\sqrt{p_1}\,\sin i_1 \sin \Omega_1 + \sigma_2\sqrt{p_2}\,\sin i_2 \sin \Omega_2 = 0,$$

(XVI; 17b) $$\sigma_1\sqrt{p_1}\,\sin i_1 \cos \Omega_1 + \sigma_2\sqrt{p_2}\,\sin i_2 \cos \Omega_2 = 0,$$

(XVI; 17c) $$\sigma_1\sqrt{p_1}\,\cos i_1 + \sigma_2\sqrt{p_2}\,\cos i_2 = c$$

und, indem man die beiden ersten Gleichungen durcheinander dividiert,

(XVI; 18) $$\tan \Omega_1 = \tan \Omega_2.$$

Das ist aber nichts anderes als der schon im Abschnitt 97 abgeleitete JACOBIsche Knotensatz, der besagt, daß in jedem Augenblick die Knotenlängen der oskulierenden Bahnebenen auf der UVE die Beziehung

$$\Omega_2 = \Omega_1 \pm 180^\circ$$

erfüllen; denn die andere Lösung von (XVI; 18), $\Omega_2 = \Omega_1$, würde ja besagen, daß die beiden Terme von (XVI; 17a) und (XVI; 17b) gleiches Vorzeichen haben, ihre Summe also nur dann verschwinden könnte (da $\sin i$ nicht negativ sein kann), wenn entweder die p_i oder die i_i verschwinden. Im ersten Fall würde es sich um geradlinige Bahnen (Fallbewegungen) handeln, im zweiten um das ebene Dreikörperproblem, in dem die Elemente Ω entfallen.

Nun sind die DELAUNAYschen Elemente durch (XVI; 7)

$$L_i = \sigma_i \sqrt{a_i}\,; \quad G_i = \sigma_i \sqrt{p_i}\,; \quad H_i = \sigma_i \sqrt{p_i} \cos i_i,$$
$$l_i = M_i; \qquad g_i = \omega_i; \qquad h_i = \Omega_i$$

definiert. Es ist demnach

$$\sigma_i \sqrt{p_i} \sin i_i = \sqrt{G_i^2 - H_i^2}\,,$$

und man kann die Gleichungen (XVI; 17) auch in der Form

$$\sqrt{G_1^2 - H_1^2} \sin h_1 + \sqrt{G_2^2 - H_2^2} \sin h_2 = 0,$$
$$\sqrt{G_1^2 - H_1^2} \cos h_1 + \sqrt{G_2^2 - H_2^2} \cos h_2 = 0,$$
$$H_1 + H_2 = c$$

schreiben, wobei den Quadratwurzeln stets das positive Zeichen zuzuordnen ist. Da aber aus dem Knotensatz

$$\sin h_2 = -\sin h_1; \quad \cos h_2 = -\cos h_1$$

folgt, gilt

(XVI; 19a) $$h_1 = h_2 \pm 180°,$$

(XVI; 19b) $$G_1^2 - H_1^2 = G_2^2 - H_2^2,$$

(XVI; 19c) $$H_1 + H_2 = c = \text{const.}$$

Die dritte dieser schönen und eleganten Formeln läßt übrigens eine Erweiterung des in Abschnitt 135 bewiesenen LAPLACEschen Satzes von der Stabilität des Planetensystems zu, jenes Satzes, der besagt, daß die großen Halbachsen nur periodische Störungen erleiden, wenigstens, wenn man auf die Mitnahme von Störungen dritter und höherer Ordnung verzichtet. Dieser Satz, der nicht nur dieser Einschränkung wegen das Problem der Stabilität nur unbefriedigend löst, würde seine Bedeutung vollends verlieren, wenn es sich etwa herausstellen sollte, daß andere für die Struktur des Planetensystems maßgebende Elemente wie Exzentrizitäten und Bahnneigungen im Laufe der Zeit durch säkulare Störungen durchgreifende Änderungen erfahren. Gegenwärtig sind diese Elemente bei allen großen Planeten (nur Pluto fällt hier ein wenig aus dem Rahmen) ziemlich klein; insbesondere sind die Bahnen so wenig exzentrisch, daß die gegenseitigen Abstände dieser Himmelskörper immer groß bleiben. Das könnte sich ändern, wenn etwa die Exzentrizitäten infolge säkularer Störungen so stark anwüchsen, daß Annäherungen zweier Planeten auf kleine Distanz möglich würden. Nahe Vorübergänge oder gar Zusammenstöße würden aber eine völlige Umgestaltung des Systems nach sich ziehen.

Wie verhält es sich in dieser Hinsicht wirklich? Nehmen wir an, daß die großen Halbachsen a_1 und a_2 zweier Planeten bis auf kleine periodische Schwankungen konstant sind. Setzen wir $p = a(1 - e^2) = a\cos^2\varphi$, so gilt (XVI; 17c):

$$\sigma_1 \sqrt{a_1} \cos\varphi_1 \cos i_1 + \sigma_2 \sqrt{a_2} \cos\varphi_2 \cos i_2 = c = \text{const.} \tag{XVI; 20}$$

Daneben gilt aber

$$\sigma_1 \sqrt{a_1} + \sigma_2 \sqrt{a_2} = C + \delta, \tag{XVI; 21}$$

wo C eine Konstante ist, die man erhält, wenn man auf der linken Seite für a_1, a_2 die langjährigen, von den periodischen Störungen befreiten Mittelwerte der großen Halbachsen einsetzt, während δ periodische Glieder enthält, die größenordnungsmäßig gegen C stark zurücktreten. Eine entsprechende Beziehung gilt, wenn die Zahl der Planeten größer als zwei ist. Man kann also schreiben, indem man (XVI; 20) von (XVI; 21) subtrahiert und $C - c = \gamma$ setzt,

$$\sum \sigma_i \sqrt{a_i}\,(1 - \cos\varphi_i \cos i_i) = \sum \sigma_i \sqrt{a_i}\,\frac{1 - \cos^2\varphi_i \cos^2 i_i}{1 + \cos\varphi_i \cos i_i} = \gamma + \delta$$

oder, wenn man wieder $\cos^2\varphi = 1 - e^2$ setzt,

$$\sum \sigma_i \sqrt{a_i}\,\frac{e_i^2 \cos^2 i_i + \sin^2 i_i}{1 + \cos\varphi_i \cos i_i} = \gamma + \delta. \tag{XVI; 22}$$

Sind nun, was im Planetensystem für die Gegenwart zutrifft, die e_i und i_i klein, so ist auch der Ausdruck (XVI; 22) klein, und er bleibt es auch für sehr lange Zeiten, da γ konstant ist und δ ein periodischer Zusatz von höchstens derselben Größenordnung ist. Hieraus folgt aber, daß die Exzentrizitäten und Neigungen auch in sehr langen Zeiträumen eine niedrigliegende Schranke nicht überschreiten können. Das gilt jedenfalls, solange die a_i nur um verhältnismäßig kleine Beträge schwanken und die Faktoren $\sigma_i \sqrt{a_i}$ von nahezu gleicher Größenordnung sind. Die letztere Voraussetzung ist für die großen Planeten einigermaßen erfüllt, so daß die säkularen Störungen der Exzentrizitäten und Neigungen diese Elemente nicht über mäßige Werte hinaus anwachsen lassen können, wenn sie einmal klein waren. Ist dagegen die Masse irgendeines Körpers des Systems, etwa m_i, *sehr* klein gegen die der übrigen oder, wie im Falle eines Planetoiden oder Kometen, sogar verschwindend klein, so gilt für diesen (oder diese) Körper der obige Schluß nicht mehr; denn da σ_i die Masse m_i als Faktor enthält, wird der betreffende Summand von (XVI; 22) auch dann nur einen unwesentlichen Beitrag zu der Summe liefern, wenn e_i und i_i größere Werte erreichen. Eine andere Einschränkung dieser Stabilitätsbetrachtung ergibt sich, wenn die Planeten im Anfangszustand in verschiedenen Richtungen um den Zentralkörper kreisen; denn dann haben die σ_i, die ja den mittleren Bewegungen proportional sind, verschiedene Vorzeichen, und die obigen Schlüsse gelten nicht mehr.

Nach diesen Zwischenbemerkungen wenden wir uns wieder dem Problem der Reduktion der Differentialgleichungen (XIV; 6) auf eine niedrigere Ordnung zu. Aus (XVI; 19b, c) findet man

$$G_1^2 - G_2^2 = H_1^2 - H_2^2 = (H_1 + H_2)(H_1 - H_2) = c(H_1 - H_2),$$

$$1 = \frac{1}{c}(H_1 + H_2).$$

Aus diesen beiden Gleichungen bestimmt man

$$\text{(XVI; 23)} \qquad \begin{cases} H_1 = \dfrac{1}{2}\left[c + \dfrac{1}{c}(G_1^2 - G_2^2)\right], \\ H_2 = \dfrac{1}{2}\left[c - \dfrac{1}{c}(G_1^2 - G_2^2)\right]. \end{cases}$$

Man kann also vermittels dieser Beziehungen H_1 und H_2 aus der HAMILTONschen Funktion F eliminieren. Die Aufgabe besteht dann darin, statt der vier Elemente G_i, H_i zwei neue, Γ_1, Γ_2, einzuführen, so daß nun $F = F(L, \Gamma; l, g, h)$ wird. Es ist aber wegen (XVI; 19c)

$$\frac{\partial F}{\partial h_1} = \dot{H}_1; \qquad \frac{\partial F}{\partial h_2} = \dot{H}_2 = -\dot{H}_1,$$

also $\partial F/\partial h_1 = -\partial F/\partial h_2$, woraus folgt, daß F die h_i nur in der Kombination $h_2 - h_1$ enthält. Wählt man aber, wie oben vorausgesetzt, die UVE als Hauptkoordinatenebene, so ist $|h_2 - h_1| = \pi/2 = \text{const}$, so daß man $F = F(L, \Gamma; l, g)$ setzen darf. Es läßt sich dann zeigen, daß die Größen $L_i, \Gamma_i; l_i, g_i$ wiederum ein kanonisches System

$$\text{(XVI; 24)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dL_i}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial l_i}; \quad \dfrac{d\Gamma_i}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial g_i}, \\ \dfrac{dl_i}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial L_i}; \quad \dfrac{dg_i}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial \Gamma_i} \end{cases}$$

bilden. Das ist aber evident, mit Ausnahme der letzten dieser vier Gleichungen; denn wenn auch G mit Γ identisch ist, so darf man daraus nicht schließen, daß auch die partiellen Ableitungen von F nach den G und den Γ übereinstimmen. Bei der Bildung der $\partial F/\partial G_i$ werden ja die H_i als unabhängige Variable betrachtet, während sie bei der Bildung der $\partial F/\partial \Gamma_i$ nach (XVI; 23) Funktionen der $\Gamma_i = G_i$ sind, so daß die Differentiation sich auch auf die H_i zu erstrecken hat. Es ist aber

$$\frac{\partial F}{\partial \Gamma_1} = \frac{\partial F}{\partial G_1} + \frac{\partial F}{\partial H_1}\frac{\partial H_1}{\partial \Gamma_1} + \frac{\partial F}{\partial H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \Gamma_1} = \frac{\partial F}{\partial G_1} + \frac{1}{c}\Gamma_1\left(\frac{\partial F}{\partial H_1} - \frac{\partial F}{\partial H_2}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial \Gamma_2} = \frac{\partial F}{\partial G_2} + \frac{\partial F}{\partial H_1}\frac{\partial H_1}{\partial \Gamma_2} + \frac{\partial F}{\partial H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \Gamma_2} = \frac{\partial F}{\partial G_2} - \frac{1}{c}\Gamma_2\left(\frac{\partial F}{\partial H_1} - \frac{\partial F}{\partial H_2}\right).$$

Andererseits ist

$$\frac{\partial F}{\partial H_1} = -\frac{dh_1}{dt}; \quad \frac{\partial F}{\partial H_2} = -\frac{dh_2}{dt},$$

mithin

$$\frac{\partial F}{\partial H_1} - \frac{\partial F}{\partial H_2} = \frac{d}{dt}(h_2 - h_1) = 0,$$

da $h_2 - h_1 = \text{const}$ ist.

Neben $G_1 = \Gamma_1$, $G_2 = \Gamma_2$ gilt also auch $\partial F/\partial G_1 = \partial F/\partial \Gamma_1$, $\partial F/\partial G_2 = \partial F/\partial \Gamma_2$, und somit ist (XVI; 24) ein vollständiges kanonisches System mit $F = F(L, \Gamma; l, g)$. Vorausgesetzt, daß es gelungen ist, dieses System zu integrieren, folgen die übrigen Variablen des Problems (XVI; 6) neben $G_i = \Gamma_i$ aus

$$H_1 = \frac{1}{2}\left[c + \frac{1}{c}(\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2)\right], \tag{XVI; 25a}$$

$$H_2 = c - H_1, \tag{XVI; 25b}$$

$$h_1 = h_1^{(0)} - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial F}{\partial H_1} dt, \tag{XVI; 25c}$$

$$h_2 = h_1 \pm 180^\circ, \tag{XVI; 25d}$$

und es ist insbesondere $\partial F/\partial H_1$ eine bekannte Funktion der Zeit, so daß sich h_1 nach (XVI; 25c) durch Quadratur ergibt. Denn setzt man im Integranden zunächst $F = F(L, G, H; l, g, h_2 - h_1)$ und nach erfolgter partieller Differentiation wieder $G_i = \Gamma_i$, $H_i = H_i(\Gamma_1, \Gamma_2)$; $h_2 - h_1 = \pm\pi/2$, so ist dies unmittelbar einzusehen. Damit ist gezeigt, daß das Problem 12. Ordnung (XVI; 6) gelöst ist, wenn man das System 8. Ordnung (XVI; 24) integriert hat. Dieses System besitzt aber außerdem, da F die Zeit t nicht explizite enthält, das Integral

$$F = \text{const}, \tag{XVI; 26}$$

mit dessen Hilfe man es auf die 7. Ordnung reduzieren könnte, indem man eine der acht Variablen durch die übrigen ausdrückt.

Schließlich wäre es noch möglich, das System auf die sechste Ordnung zu reduzieren, indem man die Zeit t durch die (gestörte) mittlere Anomalie l_1 eines der beiden Planeten ersetzt. Dividiert man nämlich alle übrigen Differentialgleichungen durch

$$\frac{dl_1}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L_1},$$

so erhält man Beziehungen der Form

$$\frac{dL_1}{dl_1} = -\frac{\partial F}{\partial l_1} : \frac{\partial F}{\partial L_1}, \ldots,$$

die aber nun natürlich kein kanonisches System mehr bilden. Dieses System ist von der sechsten Ordnung, wenn sämtliche oben beschriebenen Reduktionen vorher ausgeführt worden sind. Ist es gelöst, so ergibt sich der Zusammenhang zwischen l_1 und der Zeit t durch die Integration von

$$\frac{dl_1}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L_1}; \quad dt = -\frac{dl_1}{\partial F/\partial L_1},$$

die nunmehr ebenfalls durch Quadratur über eine bekannt gewordene Funktion von l_1 möglich ist.

137. *Säkulare Störungen. Allgemeiner Überblick*

Aus der Fülle der Störungsprobleme, deren ausführliche Diskussion ein wesentliches Thema des dritten Bandes bilden wird, greifen wir hier das der säkularen Störungen heraus, da diese nicht unerhebliche Veränderungen der oskulierenden Bahnelemente der Planeten im Verlaufe längerer Zeiträume hervorrufen, die den Lösungen des planetaren Drei- und Mehrkörperproblems ein besonderes Gepräge verleihen. Es ist daher schon jetzt angebracht, sich über die Auswirkungen dieser Störungen einen Überblick zu verschaffen.

Wählen wir wieder, wie im vorigen Abschnitt, DELAUNAYsche Elemente und beschränken uns auf Störungen erster Ordnung, so hat die Störungsfunktion die Gestalt

$$F = F_0 + m \sum_{j,k} C_{jk} \cos[j\, l_1 + k\, l_2 + D_{jk}],$$

und es hängt F_0 nur von den Elementen L ab, während die Koeffizienten C_{jk} Funktionen der Elemente L, G, H, die D_{jk} Funktionen der g, h allein sind. Säkulare Störungen werden nur durch die von den l_i unabhängigen Terme

$$[F] = F_0 + m\, C_{00} \cos D_{00}$$

verursacht. Diese Störungen erhält man also durch Integration der Differentialgleichungen

(XVI; 27a) $$\frac{dL_i}{dt} = \frac{\partial [F]}{\partial l_i} = 0; \quad \frac{dl_i}{dt} = -\frac{\partial [F]}{\partial L_i}$$

und

(XVI; 27b) $$\left\{\begin{aligned} \frac{dG_i}{dt} &= \frac{\partial [F]}{\partial g_i}; \quad \frac{dg_i}{dt} = -\frac{\partial [F]}{\partial G_i}, \\ \frac{dH_i}{dt} &= \frac{\partial [F]}{\partial h_i}; \quad \frac{dh_i}{dt} = -\frac{\partial [F]}{\partial H_i}. \end{aligned}\right.$$

Offensichtlich bilden die Differentialgleichungen (XVI; 27b) ein vollständiges kanonisches System für sich; denn $[F]$ ist ja – abgesehen von den Variablen G, H, g, h – nur noch von den L abhängig, die aber wegen der ersten Gleichung (XVI; 27a) Konstante sind. Hat man also das System (XVI; 27b) gelöst, so folgen, neben $L = \text{const}$, aus den zweiten Gleichungen (XVI; 27a) die $l(t)$ durch einfache Quadratur über bekannte Funktionen.

Solange nur Störungen erster Ordnung berücksichtigt werden, erhält man durch Integration von (XVI; 27b), abgesehen von periodischen Termen,

$$\text{(XVI; 28)} \qquad G_i = \frac{\partial [F]}{\partial g_i} t + \text{const}; \quad \ldots; \quad h_i = -\frac{\partial [F]}{\partial H_i} t + \text{const}.$$

Diese Form der säkularen Veränderungen der Bahnelemente ist, wie schon im Abschnitt 135 bemerkt wurde, nur als erste Näherung zu bewerten. Berücksichtigt man auch Störungen zweiter Ordnung, so kommen Terme hinzu, die zwar sehr klein sind, aber proportional t^2 verlaufen. Außerdem treten auch gemischte Glieder auf, die zwar periodische Form haben, deren Amplituden aber der Zeit proportional anwachsen. Die säkularen Terme (XVI; 28) sind also, strenggenommen, nur Anfangsglieder von Potenzreihen, die Funktionen von der Art sehr langperiodischer Schwankungen darstellen. Im Falle der großen Planeten sind die Terme zweiter und höherer Ordnung so klein, daß der lineare Verlauf der Funktionen (XVI; 28) die säkularen Störungen für lange Zeiten, meist für mehrere Jahrhunderte, ohne ins Gewicht fallende Fehler darzustellen vermag. Anders ist es allerdings, wenn es sich um die Bewegungen der Satelliten, insbesondere des Erdmondes, handelt. Im System Sonne–Erde–Mond ist die störende Wirkung der Sonne auf die Bahn des Mondes so groß, daß die säkularen Terme eine rasche Änderung der Bahnelemente verursachen. So zeigen die Beobachtungen, daß die rückläufige Bewegung der Knoten der Mondbahn fast 20° im Jahr beträgt, so daß die Knotenlänge bereits in 18.6 Jahren um 360° abnimmt. Die säkulare Störung der Länge des Perigäums ist sogar mehr als doppelt so groß (Umlaufszeit des Perigäums in rechtläufigem Sinne gleich 8.85 Jahre). Man wird also in der Mondtheorie im Verlauf der iterativen Berechnung der Störungen die variablen Elemente schon möglichst frühzeitig in die Störungsfunktion einführen müssen, um für längere Zeiträume brauchbare Formeln zu erhalten. Da die wahre Mondbahn schon nach kurzer Zeit von jeder oskulierenden Kegelschnittbahn erheblich abweicht, genügt es also nicht, die Störungsfunktion mit ungestörten Koordinaten aufzubauen, sondern man wird hierbei mindestens die wichtigsten säkularen Terme mit berücksichtigen müssen. Die Theorie der Satelliten erfordert also besondere Verfahren, über die in Kapitel XX das Nötigste gesagt werden wird. Hier beschränken wir uns auf das planetare Problem, in dem uns die alleinige Betrachtung der Ausdrücke (XVI; 28) schon einen hinreichenden Überblick über die säkularen Variationen der Bahnelemente verschafft.

Da der Ausdruck F_0 zu den in (XVI; 27b) vorkommenden partiellen Ableitungen keinen Beitrag liefert, dürfen wir uns auf die konstanten Anteile von mF_1 beschränken, und zwar ist, wie die Formeln (XV; 70a, b) zeigen,

$$F_1 \sim \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r_i^3} \sum_k x_{ik} x_{jk} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r_i^2} r_j \cos \varphi_{ij}.$$

Die mathematische Form dieses Ausdrucks ist dieselbe, wenn wir JACOBIsche oder heliozentrische Koordinaten zugrunde legen; nur die geometrische Bedeutung der Größen r_i, r_j, φ_{ij} ist in beiden Fällen etwas verschieden. Nun

läßt sich aber zeigen, daß konstante Terme nur im Hauptteil der Störungsfunktion vorkommen, also in $1/\varrho$, während der Nebenteil nur periodische Glieder enthält. Betrachten wir nämlich x_{i1}, x_{i2}, x_{i3} (oder x_i, y_i, z_i) als die Koordinaten des störenden Körpers, die in F_1 durch die ungestörten Koordinaten ersetzt werden dürfen, so dürfen wir (bis auf einen konstanten Faktor)

$$\frac{x_i}{r_i^3} = -\ddot{x}_i; \quad \frac{y_i}{r_i^3} = -\ddot{y}_i; \quad \frac{z_i}{r_i^3} = -\ddot{z}_i$$

setzen. Der Nebenteil ist demnach proportional $\ddot{x}_i x_j + \ddot{y}_i y_j + \ddot{z}_i z_j$. Da dieser Ausdruck, als Skalarprodukt zweier Vektoren, von der speziellen Wahl des Koordinatensystems unabhängig ist, dürfen wir die Koordinaten der Orts- und Beschleunigungsvektoren auf die Bahnebene von m_i und das Perihel als Anfangsrichtung beziehen. Es wird dann

$$x_i = r_i \cos v_i; \quad y_i = r_i \sin v_i; \quad z_i = 0,$$

und wir dürfen nach (VII; 52) setzen

$$-\ddot{x} = \frac{\cos v}{r^2} = \frac{1}{a^2} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \nu I_{\nu-1}(\nu e) \cos \nu M,$$

$$-\ddot{y} = \frac{\sin v}{r^2} = \frac{1}{a^2} \sqrt{1 - e^2} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \nu I_{\nu-1}(\nu e) \sin \nu M.$$

Die Beschleunigungskoordinaten (und daher auch jede lineare homogene Funktion von ihnen) lassen sich also in trigonometrische Reihen nach Vielfachen der mittleren Anomalie entwickeln, in denen kein konstantes Glied vorkommt. Der Nebenteil der Störungsfunktion enthält somit nur periodische Terme und trägt zu $[F]$ nicht bei. Es genügt daher, in den Differentialgleichungen für die säkularen Störungen F_1 durch den Hauptteil W zu ersetzen, der proportional $1/\varrho$ ist, einer Größe also, die ebenfalls unabhängig vom Koordinatensystem ist.

Für den Theoretiker wäre es mit gewissen Vorteilen verbunden, Jacobische Koordinaten zu benutzen und die UVE als Hauptkoordinatenebene zu wählen. In der Praxis ist es dagegen zweckmäßiger, mit heliozentrischen Koordinaten in einem der gebräuchlichen festen Systeme (etwa Ekliptik und mittleres Äquinoktium für 1950.0 oder irgendeine andere Normalepoche) zu arbeiten, da alle Beobachtungen der Planeten sich auf solche Systeme beziehen oder leicht auf sie reduziert werden können. Man nimmt dabei gern in Kauf, daß die Differentialgleichungen der Bewegung nur halbkanonisch sind. In der Tat spielt dies kaum eine Rolle, soweit säkulare Störungen erster Ordnung betrachtet werden; denn da in jedem Fall der Hauptteil der Störungsfunktion proportional $1/\varrho$ ist, unterscheiden sich die vorkommenden Störungsausdrücke jeweils nur um konstante Faktoren. Man kann, wenn m_i die Masse des gestörten, m_j die des störenden Planeten ist, den Hauptteil der Störungsfunktion F_1 immer in der Form

$$W_i = k^2 m_j \frac{1}{\varrho} \qquad \text{(XVI; 29)}$$

schreiben, wie (XV; 70a, b) zeigt. Wenn man JACOBIsche Koordinaten benutzt, treten an bestimmten Stellen nur noch Faktoren

$$1 + m_i \quad \text{bzw.} \quad \frac{1 + m_i + m_j}{1 + m_i}$$

hinzu; man darf aber die von diesen Faktoren herrührenden Terme von der Ordnung der Massen auf die Störungen zweiter und höherer Ordnung werfen, die ja ohnehin unberücksichtigt bleiben.

Wir werden uns der Einfachheit halber der heliozentrischen Koordinaten bedienen. Es ist dann (Abb. 26, S. 227)

$$\varrho^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\varphi = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

und die Differentialgleichungen der säkularen Störungen in den DELAUNAYschen Elementen haben die Form

$$\frac{dG_i}{dt} = \frac{\partial[W_i]}{\partial g_i}; \quad \frac{dH_i}{dt} = \frac{\partial[W_i]}{\partial h_i},$$
$$\frac{dg_i}{dt} = -\frac{\partial[W_i]}{\partial G_i}; \quad \frac{dh_i}{dt} = -\frac{\partial[W_i]}{\partial H_i}.$$

Im Hinblick auf die besonderen Verhältnisse im System der großen Planeten (kleine Exzentrizitäten und Bahnneigungen) ist es günstiger, statt dessen die in Abschnitt 132 eingeführten POINCARÉschen kanonischen Elemente (XV; 73a):

$$\text{(XVI; 30)} \quad \begin{cases} L = \varkappa\sqrt{a}; & \xi = 2\sqrt{L}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\tilde{\omega}; & p = 2\sqrt{L\cos\varphi}\sin\frac{i}{2}\cos\Omega, \\ \lambda = M + \tilde{\omega}; & \eta = -2\sqrt{L}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\tilde{\omega}; & q = -2\sqrt{L\cos\varphi}\sin\frac{i}{2}\sin\Omega, \end{cases}$$

zu wählen. Statt des Obigen gilt dann für die säkularen Elementenstörungen jedes der beiden Planeten das kanonische System

$$\text{(XVI; 31)} \quad \begin{cases} \dfrac{d\xi_i}{dt} = \dfrac{\partial[W_i]}{\partial\eta_i}; & \dfrac{dp_i}{dt} = \dfrac{\partial[W_i]}{\partial q_i}, \\ \dfrac{d\eta_i}{dt} = -\dfrac{\partial[W_i]}{\partial\xi_i}; & \dfrac{dq_i}{dt} = -\dfrac{\partial[W_i]}{\partial p_i}, \end{cases}$$

nach dessen Lösung neben $L_i = \text{const}$ die mittleren Längen λ_i durch Quadratur erhalten werden können. Diese Elemente haben gegenüber den DELAUNAYschen den großen Vorzug, daß ξ, η von der Ordnung der kleinen Exzentrizitäten, p, q von der Ordnung der kleinen Bahnneigungen sind und daß die Faktoren $\sin(\varphi/2)$ bzw. $\sin(i/2)$ die Unsicherheit in der Bestimmung der Perihellängen $\tilde{\omega}$ und der Knotenlängen Ω kompensieren.

Im planetaren Problem kann man daher die Funktion $[W]$ in eine rasch konvergierende Reihe entwickeln, die nach den Potenzen von ξ, η; p, q fortschreitet und die man daher schon nach wenigen Gliedern abbrechen kann.

Selbst wenn es sich um die Planeten Jupiter und Saturn handelt, die verhältnismäßig große Störungen aufeinander ausüben, wird man die säkularen Störungen schon bis auf unbedeutende Reste erhalten, wenn man diese Entwicklung nach den Gliedern zweiter Ordnung abbricht. Die Exzentrizitäten dieser beiden Planeten sind von der Größenordnung $1/_{20}$, die Neigungen noch etwas geringer. Es sind also e^3 und $\sin^3 i$ etwa von der Ordnung 10^{-4}, und da die störenden Massen von der Ordnung 10^{-3} sind, wird man bei Vernachlässigung der Glieder dritter Ordnung in e und $\sin i$ nur Fehler von der Ordnung 10^{-7} oder geringere begehen. Wenn man also die Entwicklung von $[W]$ bis zu Gliedern zweiter Ordnung durchführt, so wird diese genäherte Lösung des Problems, die mit verhältnismäßig geringer Mühe erzielt wird, einen hinreichend guten Überblick über Art und Größe der säkularen Elementenstörungen ermöglichen.

138. *Entwicklung der säkularen Störungsfunktion*

Die vollständige Entwicklung der Störungsfunktion F in trigonometrische Reihen, die nach den Vielfachen der Winkel $j\,l_1 + k\,l_2$ bzw. $j\,\lambda_1 + k\,\lambda_2$ fortschreiten, ist seit den berühmten Arbeiten von LAPLACE Gegenstand zahlreicher Untersuchungen gewesen. Hier interessiert uns besonders die Entwicklung des Hauptteils W, dessen unperiodischer Bestandteil $[W]$ der Theorie der säkularen Störungen zugrunde liegt. Schreibt man

$$\varrho^{-1} = [r_1^2 - 2 r_1 r_2 \cos\varphi + r_2^2]^{-1/2} = r_1^{-1}\left[1 - 2\frac{r_2}{r_1}\cos\varphi + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right]^{-1/2},$$

so läßt sich, wenn die Indizes so festgelegt werden, daß $r_2 < r_1$ ist, also der Planet mit der Masse m_2 der innere von beiden ist, der dimensionslose Ausdruck

$$[1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2]^{-1/2}, \qquad \left(\alpha = \frac{r_2}{r_1}\right)$$

in eine nach Potenzen von α fortschreitende Reihe entwickeln, der man aber auch die Form einer trigonometrischen Reihe

$$\frac{r_1}{\varrho_1} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos k\,\varphi, \quad b_k = b_k(\alpha)$$

mit von α abhängigen Koeffizienten geben kann.

Diese Form der Entwicklung ist aber nicht unmittelbar für unsere Zwecke geeignet. Wir brauchen vielmehr eine Entwicklung, die nach trigonometrischen Funktionen der mittleren Längen λ_1, λ_2 fortschreitet und deren konstanten Term es zu ermitteln gilt. Es ist aber r_1 eine Funktion von λ_1, und es sind α und der Winkel φ, wenn die beiden intermediären Bahnen gegeneinander geneigt sind, in recht komplizierter Weise von λ_1 und λ_2 abhängig. Im Falle kleiner Exzentrizitäten und Neigungen kann man in erster Näherung annehmen, daß beide Bahnen kreisförmig sind und (mit den gleichen mittleren Bewegungen wie die wahren) in der Hauptkoordinatenebene verlaufen. Es

wäre dann, wenn ϱ_0 den gegenseitigen Abstand der fiktiven Planeten in den Kreisbahnen mit den Halbmessern a_1 und a_2 bezeichnet,

$$\varrho_0^2 = a_1^2 - 2 a_1 a_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) + a_2^2$$

und

$$\frac{a_1}{\varrho_0} = [1 - 2\alpha \cos(\lambda_2 - \lambda_1) + \alpha^2]^{-1/2}, \quad \left(\alpha = \frac{a_2}{a_1} = \text{const}\right).$$

Sind die Exzentrizitäten und Neigungen von Null verschieden, aber klein von der ersten Ordnung, so kann man für die rechtwinkligen Koordinaten, bezogen auf ein System, gegen dessen Hauptkoordinatenebene[1]) die intermediären Bahnebenen möglichst wenig geneigt sind, den Ansatz

$$\text{(XVI; 32)} \qquad x_i = x_i^0 + u_i; \quad y_i = y_i^0 + v_i; \quad z_i = w_i$$

machen, wobei

$$x_i^0 = a_i \cos\lambda_i; \quad y_i^0 = a_i \sin\lambda_i, \qquad (i = 1, 2)$$

die Koordinaten in der Kreisbahn darstellen und u_i, v_i, w_i Zusatzglieder erster und höherer Ordnung in den Exzentrizitäten und Neigungen bedeuten. Es wäre dann

$$\text{(XVI; 33)} \quad \begin{cases} \varrho_0^2 = (x_2^0 - x_1^0)^2 + (y_2^0 - y_1^0)^2, \\ \varrho^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = \\ \quad = \varrho_0^2 + 2[(x_2^0 - x_1^0)(u_2 - u_1) + (y_2^0 - y_1^0)(v_2 - v_1)] + \\ \qquad + (u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2 + (w_2 - w_1)^2 = \varrho_0^2 + \sigma, \end{cases}$$

wo σ ein Ausdruck, der nur Terme erster und höherer Ordnung enthält, und

$$\text{(XVI; 34)} \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_0}\left(1 + \frac{\sigma}{\varrho_0^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varrho_0^3} + \frac{3}{8}\frac{\sigma^2}{\varrho_0^5} - \cdots$$

ist. Soll also W bis zu Gliedern zweiter Ordnung in den Exzentrizitäten und Neigungen einschließlich dargestellt werden, so wird man die Größen ϱ_0^{-1}, ϱ_0^{-3}, ϱ_0^{-5} und σ als Funktionen von α und λ_1, λ_2 darzustellen haben.

Im Mittelpunkt der allgemeinen Störungstheorie steht das Problem, die Ausdrücke

$$\text{(XVI; 35)} \quad \left(\frac{a_1}{\varrho_0}\right)^{2s} = [1 - 2\alpha\cos(\lambda_2 - \lambda_1) + \alpha^2]^{-s} = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k^{(s)} \cos k(\lambda_2 - \lambda_1)$$

für $s = 1/2, 3/2, 5/2, \ldots$ in trigonometrische, nach den Kosinus der Vielfachen von $\lambda_2 - \lambda_1$ fortschreitende Reihen zu entwickeln, eine Aufgabe, die von LAPLACE in einer glänzenden mathematischen Analyse gelöst und deren Lösung seither in vielen scharfsinnigen Untersuchungen vervollständigt worden ist. Die *LAPLACEschen Koeffizienten* $b_k^{(s)}$ lassen sich entweder durch Potenzreihen nach α oder auch in Form elliptischer Integrale darstellen und sind

[1]) Im Falle der großen Planeten genügt es, statt der UVE, die natürlich die günstigsten Bedingungen bieten würde, als Hauptkoordinatenebene die Ekliptik zu wählen.

überdies durch Rekursionen vielfältig miteinander verbunden. Ihre Theorie wird in Abschnitt 139, soweit hier nötig, aber in Band III ausführlicher dargestellt werden; im Anhang III dieses Bandes findet der Leser Tabellen, aus denen die numerischen Werte derjenigen LAPLACEschen Koeffizienten in Abhängigkeit von α zu entnehmen sind, die in den Formeln für die säkularen Störungen erscheinen, so daß er sich ein Bild von ihrer Größe und ihrem Verlauf machen kann.

Wenn man Glieder von der dritten Ordnung ab vernachlässigt, so tragen zu den säkularen Störungen nur die von λ_1, λ_2 unabhängigen Terme erster und zweiter Ordnung der Entwicklungen von $1/\varrho_0, \sigma/\varrho_0^3, \sigma^2/\varrho_0^5$ bei, die verhältnismäßig gering an Zahl sind. Das ist unschwer einzusehen. Die LAPLACEschen Reihen (XVI; 35) konvergieren rasch, wenn α klein gegen die Einheit ist. Das ist der Fall, wenn es sich um die Bewegung eines Satelliten um seinen Planeten handelt; denn dann sind a_1, a_2 die mittleren Abstände der Sonne bzw. des Satelliten von dem jetzt als Zentralkörper anzusehenden Planeten. Für den Erdmond und den äußersten der vier großen Jupitermonde (IV Kallisto) ist $\alpha = a_2/a_1$ von der Größenordnung $^1/_{400}$, für den Saturntrabanten Titan von der Ordnung 10^{-3}. Dagegen ist α in den Störungstheorien der großen Planeten beträchtlich größer: Im Fall Jupiter-Saturn ist $\alpha \approx 0.54$, im Falle mancher der durch Jupiter gestörten Planetoidenbahnen reicht es sogar noch beträchtlich näher an 1 heran. Die Reihen (XVI; 35) konvergieren dann sehr langsam, und es müssen unter Umständen zahlreiche Terme berücksichtigt werden.

Diese Bedenken entfallen aber weitgehend, wenn man sich auf Bahnen hinreichend kleiner Exzentrizitäten und Neigungen beschränkt. Wie oben bemerkt, genügt es dann, die Entwicklungen

$$\text{(XVI; 36)}\quad \left\{\begin{aligned} \frac{a_1}{\varrho_0} &= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k^{(1/2)} \cos k(\lambda_2-\lambda_1) = a_1\left\{\frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k(\lambda_2-\lambda_1)\right\},\\ \left(\frac{a_1}{\varrho_0}\right)^3 &= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k^{(3/2)} \cos k(\lambda_2-\lambda_1) = \frac{a_1^2}{a_2}\left\{\frac{1}{2}B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos k(\lambda_2-\lambda_1)\right\},\\ \left(\frac{a_1}{\varrho_0}\right)^5 &= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k^{(5/2)} \cos k(\lambda_2-\lambda_1) = \frac{a_1^3}{a_2^2}\left\{\frac{1}{2}C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos k(\lambda_2-\lambda_1)\right\}\end{aligned}\right.$$

zu betrachten. Nun enthält aber in (XVI; 34) der erste Summand rechts nur ein einziges von den λ_i freies Glied, nämlich $^1/_2 A_0$. Ferner wird sich zeigen, daß die Größe σ von der Gestalt

$$\text{(XVI; 37)}\qquad \sigma = \sum_{j,k}[\beta_{jk}\cos(j\,\lambda_1 + k\,\lambda_2) + \gamma_{jk}\sin(j\,\lambda_1 + k\,\lambda_2)]$$

ist und daß die Koeffizienten β, γ mindestens von der ersten Ordnung in den kleinen Exzentrizitäten und Neigungen sind. Bildet man die Produkte

$$\sigma\,\varrho_0^{-3};\quad \sigma^2\,\varrho_0^{-5},$$

so werden nur solche Glieder von σ und σ^2 nichtperiodische Terme von W liefern, also zum Aufbau von $[W]$ beitragen, für die $j = -k$ ist (einschließlich

$j = k = 0$); denn diese geben in (XVI; 34) zu Termen Anlaß, die proportional

$$B_k \cos^2 k(\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{1}{2} B_k [1 + \cos 2k(\lambda_2 - \lambda_1)],$$

$$C_k \cos^2 k(\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{1}{2} C_k [1 + \cos 2k(\lambda_2 - \lambda_1)]$$

sind und die von den λ_i freie Bestandteile haben. Es wird sich aber herausstellen, daß bei Beschränkung auf Glieder bis zur zweiten Ordnung solche Terme in σ nur für $k = 0, 1, 2$, in σ^2 dagegen auch solche für $k = 3$ vorkommen. Von den LAPLACEschen Koeffizienten werden also hier nur

$$A_0;\ B_0, B_1, B_2;\ C_0, C_1, C_2, C_3$$

gebraucht, Größen, zwischen denen – wie oben bemerkt wurde – Rekursionsbeziehungen bestehen, die es erlauben, auch mit einer geringeren Anzahl auszukommen.

Wir führen jetzt die Entwicklung von σ als Funktion der mittleren Längen λ_i und der kleinen Größen $\xi_i, \eta_i;\ p_i, q_i$ bis zu Termen zweiter Ordnung einschließlich durch.

In den intermediären Bahnen ist nach (XVI; 30)

$$\xi^2 + \eta^2 = 4L \sin^2 \frac{\varphi}{2}; \quad p^2 + q^2 = 4L \cos\varphi \sin^2 \frac{i}{2}, \quad (L = \varkappa \sqrt{a}),$$

also

$$4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \left(\frac{\xi}{\sqrt{L}}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\sqrt{L}}\right)^2; \quad 4 \sin^2 \frac{i}{2} \cos\varphi = \left(\frac{p}{\sqrt{L}}\right)^2 + \left(\frac{q}{\sqrt{L}}\right)^2.$$

Vorausgesetzt, daß dritte und höhere Potenzen von $\sin(\varphi/2)$, $\sin(i/2)$ vernachlässigt werden, darf man $\cos\varphi$, $\cos(\varphi/2)$, $\cos i$, $\cos(i/2)$, falls sie als Faktoren bei Größen erster Ordnung auftreten, gleich der Einheit setzen. Mit der hier angestrebten Genauigkeit ist also

$$\text{(XVI; 38)} \quad \begin{cases} e = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \approx 2 \sin \frac{\varphi}{2}, \\ \sin i = 2 \sin \frac{i}{2} \cos \frac{i}{2} \approx 2 \sin \frac{i}{2}, \\ p \approx \sqrt{L \cos\varphi} \sin i \cos \Omega \approx \sqrt{L} \sin i \cos \Omega, \\ q \approx -\sqrt{L \cos\varphi} \sin i \sin \Omega \approx -\sqrt{L} \sin i \sin \Omega \end{cases}$$

und daher

$$\text{(XVI; 39)} \quad \begin{cases} f = \frac{\xi}{\sqrt{L}} \approx e \cos\tilde{\omega}; \quad g = -\frac{\eta}{\sqrt{L}} \approx e \sin\tilde{\omega}, \\ h = \frac{p}{\sqrt{L}} \approx \sin i \cos \Omega; \quad k = -\frac{q}{\sqrt{L}} \approx \sin i \sin \Omega, \\ 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = f^2 + g^2 \approx e^2; \quad 4 \sin^2 \frac{i}{2} = \frac{h^2 + k^2}{\cos\varphi} \approx \sin^2 i. \end{cases}$$

Die heliozentrischen Koordinaten x, y, z eines Planeten in der intermediären Bahn lassen sich nach den in Kapitel VII gegebenen Formeln des Zweikörperproblems in trigonometrische Reihen entwickeln, die nach den Vielfachen der mittleren Länge λ fortschreiten und deren Koeffizienten Funktionen von f, g, h, k sind und als Potenzreihen nach diesen Größen geschrieben werden können. Beschränkt man sich also auf Terme zweiter Ordnung, so erhält man für diese Koeffizienten algebraische Funktionen ersten und zweiten Grades in f, g, h, k.

Es seien nun in der intermediären Bahnebene $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ Einheitsvektoren, die nach dem Perihel (wahre Anomalie des Planeten $v = 0$) und in eine dazu senkrechte Richtung ($v = 90°$) zeigen.[1]) Dann ist der Ortsvektor des Planeten zu einer beliebigen Zeit

$$\mathfrak{p} = r(\mathfrak{i} \cos v + \mathfrak{j} \sin v),$$

und die Koordinaten von $\mathfrak{i}$ (Richtungskosinus des Perihels) sind nach (V; 22)

$$\text{(XVI; 40a)} \quad \begin{cases} \Phi_x = \cos(\varpi - \Omega) \cos \Omega - \sin(\varpi - \Omega) \sin \Omega \cos i, \\ \Phi_y = \cos(\varpi - \Omega) \sin \Omega + \sin(\varpi - \Omega) \cos \Omega \cos i, \\ \Phi_z = \sin(\varpi - \Omega) \sin i, \end{cases}$$

die des Vektors $\mathfrak{j}$, die man aus (XVI; 40a) erhält, indem man ϖ durch $\varpi + \pi/2$ ersetzt,

$$\text{(XVI; 40b)} \quad \begin{cases} \Psi_x = -\sin(\varpi - \Omega) \cos \Omega - \cos(\varpi - \Omega) \sin \Omega \cos i, \\ \Psi_y = -\sin(\varpi - \Omega) \sin \Omega + \sin(\varpi - \Omega) \cos \Omega \cos i, \\ \Psi_z = \cos(\varpi - \Omega) \sin i, \end{cases}$$

und es ist dann

$$\text{(XVI; 41)} \quad \begin{cases} x = r(\Phi_x \cos v + \Psi_x \sin v), \\ y = r(\Phi_y \cos v + \Psi_y \sin v), \\ z = r(\Phi_z \cos v + \Psi_z \sin v). \end{cases}$$

Die gleichen Formeln erhält man auch, wenn man in (IV; 13) für das „Argument der Breite" $u = v + \varpi - \Omega$ einführt und nach Funktionen von v entwickelt.

In (XVI; 40a, b) darf man nun, entsprechend der Festsetzung (XVI; 38), $\cos i = 1 - 2\sin^2(i/2) \approx 1 - {}^1/_2 \sin^2 i$ setzen. Es ist dann

$$\Phi_x = \cos\varpi + \frac{1}{2} (\sin\varpi \cos \Omega - \cos\varpi \sin \Omega) \sin^2 i \sin \Omega =$$

$$= \cos\varpi \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 i \sin^2 \Omega\right) + \frac{1}{2} \sin\varpi \sin^2 i \sin \Omega \cos \Omega$$

---

[1]) Eine Verwechslung der Winkelgröße v (wahre Anomalie) und der in (XVI; 32) definierten linearen Größe $v = y - y^0$ ist wohl nicht zu befürchten.

oder

$$
\text{(XVI; 42a)}\quad \begin{cases} \Phi_x = \left(1 - \dfrac{k^2}{2}\right)\cos\varpi + \dfrac{h\,k}{2}\sin\varpi, \quad \text{ebenso} \\ \Phi_y = \dfrac{h\,k}{2}\cos\varpi + \left(1 - \dfrac{h^2}{2}\right)\sin\varpi, \\ \Phi_z = -k\cos\varpi + h\sin\varpi \end{cases}
$$

und

$$
\text{(XVI; 42b)}\quad \begin{cases} \Psi_x = \dfrac{h\,k}{2}\cos\varpi - \left(1 - \dfrac{k^2}{2}\right)\sin\varpi, \\ \Psi_y = \left(1 - \dfrac{h^2}{2}\right)\cos\varpi - \dfrac{h\,k}{2}\sin\varpi, \\ \Psi_z = h\cos\varpi + k\sin\varpi. \end{cases}
$$

Nach (VII; 43) bestehen die Reihenentwicklungen

$$
\frac{r\cos v}{a} = -\frac{3}{2}e + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dJ_n(n\,e)}{de}\,\frac{\cos nM}{n^2},
$$

$$
\frac{r\sin v}{a} = 2\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\sum_{n=1}^{\infty}J_n(n\,e)\,\frac{\sin nM}{n},
$$

in denen die Besselschen Funktionen nach (VII; 23) durch

$$
J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!} - \frac{x^{n+2}}{2^{n+2}\cdot 1!\,(n+1)!} + \frac{x^{n+4}}{2^{n+4}\,2!\,(n+2!)} - \cdots
$$

definiert sind. Entwickelt man die Ausdrücke $r\cos v$, $r\sin v$ bis zu Termen der Ordnung e^2, so darf man die obigen Summen mit $n = 3$ abbrechen und

$$
J_1(e) = \frac{1}{2}e - \frac{1}{16}e^3 + \cdots; \qquad \frac{d}{de}J_1(e) = \frac{1}{2} - \frac{3}{16}e^2 + \cdots,
$$

$$
J_2(2e) = \frac{1}{2}e^2 - \cdots; \qquad \frac{d}{de}J_2(2e) = e - \cdots,
$$

$$
J_3(3e) = \frac{9}{16}e^3 - \cdots; \qquad \frac{d}{de}J_3(3e) = \frac{27}{16}e^2 - \cdots
$$

setzen, woraus

$$
\frac{r\cos v}{a} = \cos M - \frac{3}{2}e + \frac{1}{2}e\cos 2M + \frac{1}{8}e^2\cos M - {}
$$

$$
- \frac{1}{2}e^2\cos M + \frac{3}{8}e^2\cos 3M + \cdots,
$$

$$
\frac{r\sin v}{a} = \sin M + \frac{1}{2}e\sin 2M - \frac{1}{8}e^2\sin M - \frac{1}{2}e^2\sin M + \frac{3}{8}e^2\sin 3M + \cdots
$$

folgt. Multipliziert man diese Ausdrücke gemäß (XVI; 41) mit Φ_x, Ψ_x bzw. Φ_y, Ψ_y bzw. Φ_z, Ψ_z und addiert, so erhält man nach kurzer Rechnung, indem man alle Terme dritten und höheren Grades unterdrückt und

$$M = \lambda - \tilde{\omega}; \quad e\cos\tilde{\omega} = f; \quad e\sin\tilde{\omega} = g; \quad e^2 = f^2 + g^2;$$
$$e^2\cos 2\tilde{\omega} = f^2 - g^2; \quad e^2\sin 2\tilde{\omega} = 2fg$$

setzt,

$$\text{(XVI; 43)} \quad \left\{\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \cos\lambda - \frac{3}{2}f + \frac{f}{2}\cos 2\lambda + \frac{g}{2}\sin 2\lambda - \frac{h^2}{2}\cos\lambda + \frac{hk}{2}\sin\lambda - \\ &\quad - \frac{1}{2}(f^2+g^2)\cos\lambda + \frac{1}{8}(f^2-g^2)\cos\lambda + \frac{fg}{4}\sin\lambda + \\ &\quad + \frac{3}{8}(f^2-g^2)\cos 3\lambda + \frac{3}{4}fg\sin 3\lambda, \\ \frac{y}{a} &= \sin\lambda - \frac{3}{2}g + \frac{f}{2}\sin 2\lambda - \frac{g}{2}\cos 2\lambda - \frac{h^2}{2}\sin\lambda + \frac{hk}{2}\cos\lambda - \\ &\quad - \frac{1}{2}(f^2+g^2)\sin\lambda - \frac{1}{8}(f^2-g^2)\sin\lambda + \frac{fg}{4}\cos\lambda + \\ &\quad + \frac{3}{8}(f^2-g^2)\sin 3\lambda - \frac{3}{4}fg\cos 3\lambda, \\ \frac{z}{a} &= h\sin\lambda - k\cos\lambda + \frac{3}{2}(fk-gh) - \\ &\quad - \frac{1}{2}(fk+gh)\cos 2\lambda + \frac{1}{2}(fh-gk)\sin 2\lambda. \end{aligned}\right.$$

Man setze nun

$$x_i = x_i^0 + u_i' + u_i''; \quad y_i = y_i^0 + v_i' + v_i''; \quad z_i = w_i' + w_i'',$$

wo u', u'' usw. Größen erster bzw. zweiter Ordnung bedeuten, und man zerlege ebenfalls

$$\sigma = \sigma' + \sigma''$$

in Summanden erster und zweiter Ordnung. Dann entnimmt man aus (XVI; 33)

$$\text{(XVI; 44)} \quad \left\{\begin{aligned} \sigma' &= 2\,[(x_2^0 - x_1^0)(u_2' - u_1') + (y_2^0 - y_1^0)(v_2' - v_1')], \\ \sigma'' &= \sigma_1'' + \sigma_2'' = 2\,[(x_2^0 - x_1^0)(u_2'' - u_1'') + (y_2^0 - y_1^0)(v_2'' - v_1'')] + \\ &\quad + (u_2' - u_1')^2 + (v_2' - v_1')^2 + (w_2' - w_1')^2, \end{aligned}\right.$$

und es darf im letzten Term von (XVI; 34)

$$\text{(XVI; 45)} \qquad \sigma^2 = \sigma'^2$$

gesetzt werden. Aus (XVI; 43) folgt dann

$$x^0 = a\cos\lambda;\quad y^0 = a\sin\lambda,$$
$$2u' = a[-3f + f\cos 2\lambda + g\sin 2\lambda],$$
$$2v' = a[-3g + f\sin 2\lambda - g\cos 2\lambda],$$
$$w' = a[h\sin\lambda - k\cos\lambda]$$

und

$$2u'' = a\left[(p-q)\cos\lambda + \left(hk + \frac{fg}{2}\right)\sin\lambda + \frac{3}{4}(f^2-g^2)\cos 3\lambda + \frac{3}{2}fg\sin 3\lambda\right],$$
$$2v'' = -a\left[(p+q)\sin\lambda - \left(hk + \frac{fg}{2}\right)\cos\lambda - \frac{3}{4}(f^2-g^2)\sin 3\lambda + \frac{3}{2}fg\cos 3\lambda\right]$$

mit

$$p = \frac{1}{4}(f^2-g^2) + \frac{1}{2}(h^2-k^2);\quad q = (f^2+g^2) + \frac{1}{2}(h^2+k^2),$$

während w'' in (XVI; 44) und (XVI; 45) nicht vorkommt und daher künftig außer Betracht bleiben kann.

Die Aufgabe besteht dann darin, die Größen σ', σ'' und σ'^2 in trigonometrische Reihen der Form (XVI; 37) zu entwickeln und aus ihnen diejenigen Terme herauszugreifen, die von der Form

$$\text{(XVI; 46)}\qquad \beta_i\cos i(\lambda_2-\lambda_1),\qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

sind; denn nur diese tragen zu säkularen Gliedern des Ausdrucks (XVI; 34) bei. Man gelangt dabei zu folgenden Ergebnissen:

1. σ' enthält keine Glieder der Form (XVI; 46), da $x_2^0 - x_1^0$ nur Glieder mit $\cos\lambda_i$, $y_2^0 - y_1^0$ nur solche mit $\sin\lambda_i$ enthält, $u_2' - u_1'$, $v_2' - v_1'$ dagegen außer Konstanten nur Glieder mit $\cos 2\lambda_i$ und $\sin 2\lambda_i$ enthalten. Alle säkularen Terme von (XVI; 34), mit Ausnahme desjenigen von ϱ_0^{-1}, der nullter Ordnung ist und sich auf den Laplaceschen Koeffizienten $^1/_2 A_0$ beschränkt, sind also von der zweiten Ordnung in den Größen f_i, g_i, h_i, k_i. Explizit erhält man nach kurzer Rechnung

$$\text{(XVI; 47)}\quad \left\{\begin{aligned} \sigma' = {} & (3a_1a_2f_2 - 2a_1^2f_1)\cos\lambda_1 + (3a_1a_2g_2 - 2a_1^2g_1)\sin\lambda_1 + \\ & + (3a_1a_2f_1 - 2a_2^2f_2)\cos\lambda_2 + (3a_1a_2g_1 - 2a_2^2g_2)\sin\lambda_2 - \\ & - a_1a_2[f_2\cos(2\lambda_2-\lambda_1) + g_2\sin(2\lambda_2-\lambda_1) + \\ & + f_1\cos(2\lambda_1-\lambda_2) + g_1\sin(2\lambda_1-\lambda_2)]. \end{aligned}\right.$$

2. σ'' besteht aus zwei Teilen. Um die zu säkularen Termen beitragenden Glieder des ersten,

$$\text{(XVI; 48)}\qquad \sigma_1'' = 2[(x_2^0 - x_1^0)(u_2'' - u_1'') + (y_2^0 - y_1^0)(v_2'' - v_1'')],$$

zu ermitteln, genügt es offenbar, die mit $\cos\lambda_i$ bzw. $\sin\lambda_i$ multiplizierten Anteile von u_i'' bzw. v_i'' zu betrachten. Man schreibe also (XVI; 48) in der abgekürzten Form

$$(a_2\cos\lambda_2 - a_1\cos\lambda_1)\,[a_2(p_2 - q_2)\cos\lambda_2 - a_1(p_1 - q_1)\cos\lambda_1] -$$
$$-\,(a_2\sin\lambda_2 - a_1\sin\lambda_1)\,[a_2(p_2 + q_2)\sin\lambda_2 - a_1(p_1 + q_1)\sin\lambda_1].$$

Beim Ausmultiplizieren bemerkt man, daß nur die mit den Faktoren q_i behafteten Summanden Beiträge zu säkularen Termen liefern; es reduziert sich also der erste Teil von σ'' auf

$$\bar{\sigma}_1'' = -(a_1^2 q_1 + a_2^2 q_2) + a_1 a_2 (q_1 + q_2)\cos(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Der zweite Summand von σ'' wird durch die Quadratsumme der Ausdrücke

$$u_2' - u_1' = \frac{a_2}{2}(-3f_2 + f_2\cos 2\lambda_2 + g_2\sin 2\lambda_2) -$$
$$-\frac{a_1}{2}(-3f_1 + f_1\cos 2\lambda_1 + g_1\sin 2\lambda_1),$$
$$v_2' - v_1' = \frac{a_2}{2}(-3g_2 + f_2\sin 2\lambda_2 - g_2\cos 2\lambda_2) -$$
$$-\frac{a_1}{2}(-3g_1 + f_1\sin 2\lambda_1 - g_1\cos 2\lambda_1),$$
$$w_2' - w_1' = a_2(h_2\sin\lambda_2 - k_2\cos\lambda_2) - a_1(h_1\sin\lambda_1 - k_1\cos\lambda_1)$$

gebildet. Terme der Form (XVI; 46) kommen zunächst in sämtlichen rein quadratischen Gliedern dieser Quadratsumme vor, nämlich

$$\frac{5}{2}a_1^2(f_1^2 + g_1^2) + \frac{5}{2}a_2^2(f_2^2 + g_2^2) + \frac{1}{2}a_1^2(h_1^2 + k_1^2) + \frac{1}{2}a_2^2(h_2^2 + k_2^2).$$

In den gemischten Produkten zählen, außer der Konstanten

$$-\frac{9}{2}a_1 a_2(f_1 f_2 + g_1 g_2),$$

nur diejenigen, die

$$\cos i\lambda_2 \cos i\lambda_1 = \frac{1}{2}[\cos i(\lambda_2 - \lambda_1) + \cos i(\lambda_2 + \lambda_1)]$$

oder

$$\sin i\lambda_2 \sin i\lambda_1 = \frac{1}{2}[\cos i(\lambda_2 - \lambda_1) - \cos i(\lambda_2 + \lambda_1)]$$

enthalten. Diese liefern die Terme

$$-a_1 a_2(h_1 h_2 + k_1 k_2)\cos(\lambda_2 - \lambda_1) - \frac{1}{2}a_1 a_2(f_1 f_2 + g_1 g_2)\cos 2(\lambda_2 - \lambda_1).$$

3. Durch Quadrieren von (XVI; 47) erhält man zunächst die konstanten Terme von σ'^2,

$$\frac{1}{2}(3a_1 a_2 f_2 - 2a_1^2 f_1)^2 + \frac{1}{2}(3a_1 a_2 g_2 - 2a_1^2 g_1)^2 + \frac{1}{2}(3a_1 a_2 f_1 - 2a_2^2 f_2)^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}(3a_1 a_2 g_1 - 2a_2^2 g_2)^2 + \frac{1}{2} a_1^2 a_2^2 (f_1^2 + g_1^2 + f_2^2 + g_2^2) =$$
$$= 5a_1^2 a_2^2 (f_1^2 + g_1^2 + f_2^2 + g_2^2) + 2a_1^4 (f_1^2 + g_1^2) + 2a_2^4 (f_2^2 + g_2^2) -$$
$$- 6(a_1^3 a_2 + a_1 a_2^3)(f_1 f_2 + g_1 g_2),$$

während von den gemischten Produkten nach Ausscheiden der uninteressanten nur diejenigen übrigbleiben, die

$$\cos\lambda_1 \cos\lambda_2 = \frac{1}{2}[\cos(\lambda_2 - \lambda_1) + \cos(\lambda_2 + \lambda_1)],$$

$$\sin\lambda_1 \sin\lambda_2 = \frac{1}{2}[\cos(\lambda_2 - \lambda_1) - \cos(\lambda_2 + \lambda_1)],$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos(2\lambda_i - \lambda_j)\cos\lambda_i &= \frac{1}{2}[\cos(\lambda_2 - \lambda_1) + \cos(3\lambda_i - \lambda_j)],\\
\sin(2\lambda_i - \lambda_j)\sin\lambda_i &= \frac{1}{2}[\cos(\lambda_2 - \lambda_1) - \cos(3\lambda_i - \lambda_j)],\\
\cos(2\lambda_i - \lambda_j)\cos\lambda_j &= \frac{1}{2}[\cos 2(\lambda_2 - \lambda_1) + \cos 2\lambda_i],\\
\sin(2\lambda_i - \lambda_j)\sin\lambda_j &= \frac{1}{2}[\cos 2(\lambda_2 - \lambda_1) - \cos 2\lambda_i],
\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} i &= 1, 2,\\ j &= 2, 1,\end{aligned}$$

$$\cos(2\lambda_2 - \lambda_1)\cos(2\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{1}{2}[\cos 3(\lambda_2 - \lambda_1) + \cos(\lambda_2 + \lambda_1)],$$

$$\sin(2\lambda_2 - \lambda_1)\sin(2\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{1}{2}[\cos 3(\lambda_2 - \lambda_1) - \cos(\lambda_2 + \lambda_1)]$$

enthalten. Aus diesen leitet man die zu säkularen Gliedern beitragenden Terme

$$\cos(\lambda_2 - \lambda_1)\,[(3a_1 a_2 f_2 - 2a_1^2 f_1)(3a_1 a_2 f_1 - 2a_2^2 f_2) +$$
$$+ (3a_1 a_2 g_2 - 2a_1^2 g_1)(3a_1 a_2 g_1 - 2a_2^2 g_2)] -$$
$$- a_1 a_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)\,[f_1(3a_1 a_2 f_2 - 2a_1^2 f_1) + g_1(3a_1 a_2 g_2 - 2a_1^2 g_1) +$$
$$+ f_2(3a_1 a_2 f_1 - 2a_2^2 f_2) + g_2(3a_1 a_2 g_1 - 2a_2^2 g_2)] -$$
$$- a_1 a_2 \cos 2(\lambda_2 - \lambda_1)\,[f_1(3a_1 a_2 f_1 - 2a_2^2 f_2) + g_1(3a_1 a_2 g_1 - 2a_2^2 g_2) +$$
$$+ f_2(3a_1 a_2 f_2 - 2a_1^2 f_1) + g_2(3a_1 a_2 g_2 - 2a_1^2 g_1)] +$$
$$+ a_1^2 a_2^2 \cos 3(\lambda_2 - \lambda_1)\,[f_1 f_2 + g_1 g_2]$$

ab. Sammelt man nun die zu σ und σ^2 gehörigen Terme der Form (XVI; 46) und bildet mit ihnen und den LAPLACEschen Reihen (XVI; 36) den Ausdruck (XVI; 34), so erhält man für die säkularen Bestandteile von $1/\varrho_0$, $-\sigma/2\varrho_0^3$, $^3/_8\,\sigma^2/\varrho_0^5$ die folgenden Formeln:

$$\left[\frac{1}{\varrho_0}\right] = \frac{1}{2} A_0,$$

$$\begin{aligned}\left[-\frac{\sigma}{2\varrho_0^3}\right] = &\frac{1}{4}\frac{B_0}{a_1 a_2}\left\{-\frac{3}{2}a_1^2(f_1^2+g_1^2) - \frac{3}{2}a_2^2(f_2^2+g_2^2) + \frac{9}{2}a_1 a_2(f_1 f_2 + g_1 g_2)\right\} + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{B_1}{a_1 a_2}\left\{-\frac{1}{2}a_1 a_2\left(f_1^2+g_1^2+f_2^2+g_2^2+\frac{h_1^2+k_1^2}{2}+\frac{h_2^2+k_2^2}{2}\right)+\right. \\ &\left.+\frac{1}{2}a_1 a_2(h_1 h_2 + k_1 k_2)\right\} + \frac{1}{8}\frac{B_2}{a_1 a_2}\{a_1 a_2(f_1 f_2 + g_1 g_2)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{3}{8}\frac{\sigma^2}{\varrho_0^5}\right] = &\frac{3}{16}\frac{C_0}{a_1^2 a_2^2}\{5a_1^2 a_2^2(f_1^2+g_1^2+f_2^2+g_2^2) + 2a_1^4(f_1^2+g_1^2) + \\ &+ 2a_2^4(f_2^2+g_2^2) - 6a_1 a_2(a_1^2+a_2^2)(f_1 f_2 + g_1 g_2)\} + \\ &+ \frac{3}{16}\frac{C_1}{a_1^2 a_2^2}\{-4a_1^3 a_2(f_1^2+g_1^2) - 4a_1 a_2^3(f_2^2+g_2^2) + \\ &\qquad + 7a_1^2 a_2^2(f_1 f_2 + g_1 g_2)\} + \\ &+ \frac{3}{16}\frac{C_2}{a_1^2 a_2^2}\{-3a_1^2 a_2^2(f_1^2+g_1^2+f_2^2+g_2^2) + \\ &\qquad + 2a_1 a_2(a_1^2+a_2^2)(f_1 f_2 + g_1 g_2)\} + \\ &+ \frac{3}{16}\frac{C_3}{a_1^2 a_2^2}\{a_1^2 a_2^2(f_1 f_2 + g_1 g_2)\},\end{aligned}$$

insgesamt also, mit $a_2/a_1 = \alpha$; $i = 1, 2$; $j = 2, 1$:

$$\text{(XVI; 49)}\quad\left\{\begin{aligned}[W_i] = k^2 m_j &\left[\frac{1}{2}A_0 + (f_1^2+g_1^2)\left\{-\frac{3}{8}\frac{B_0}{\alpha} - \frac{1}{4}B_1 + \right.\right. \\ &+\left.\left(\frac{15}{16}+\frac{3}{8\alpha^2}\right)C_0 - \frac{3}{4}\frac{C_1}{\alpha} - \frac{9}{16}C_2\right\} + \\ &+ (f_2^2+g_2^2)\left\{-\frac{3}{8}\alpha B_0 - \frac{1}{4}B_1 + \left(\frac{15}{16}+\frac{3}{8}\alpha^2\right)C_0 - \right. \\ &\left.-\frac{3}{4}\alpha C_1 - \frac{9}{16}C_2\right\} + \\ &+ (f_1 f_2 + g_1 g_2)\left\{\frac{9}{8}B_0 + \frac{1}{8}B_2 - \frac{9}{8}\left(\frac{1}{\alpha}+\alpha\right)C_0 + \right. \\ &\left.+\frac{21}{16}C_1 + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{\alpha}+\alpha\right)C_2 + \frac{3}{16}C_3\right\} - \\ &\left.-\frac{1}{8}(h_1^2+k_1^2)B_1 - \frac{1}{8}(h_2^2+k_2^2)B_1 + \frac{1}{4}(h_1 h_2 + k_1 k_2)B_1\right].\end{aligned}\right.$$

Der säkulare Teil der Störungsfunktion hängt also allein von den Größen

$$f_1^2 + g_1^2 = e_1^2; \quad f_2^2 + g_2^2 = e_2^2; \quad f_1 f_2 + g_1 g_2 = e_1 e_2 \cos(\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_1)$$

und

$$h_1^2 + k_1^2 + h_2^2 + k_2^2 - 2(h_1 h_2 + k_1 k_2) = (h_2 - h_1)^2 + (k_2 - k_1)^2 =$$
$$= \sin^2 i_1 + \sin^2 i_2 - 2 \sin i_1 \sin i_2 \cos(\Omega_2 - \Omega_1)$$

ab. Das war auch zu erwarten; denn da ϱ^{-1} eine von der Wahl des Koordinatensystems unabhängige geometrische Größe ist, gilt das auch für ihren konstanten Teil. Das kommt zunächst darin zum Ausdruck, daß in den Formeln nur die Differenzen der Perihellängen $\tilde{\omega}_i$ und der Knotenlängen Ω_i vorkommen, die Festsetzung des Anfangspunktes der Längenzählung also ohne Einfluß bleibt. Ferner ist (Abb. 27) in dem sphärischen Dreieck KK_1K_2, das von den Knoten K_1, K_2 der beiden Bahnebenen mit der Hauptkoordinatenebene (Ekliptik) und dem Knoten K der Bahnebenen mit sich selber gebildet wird, nach dem Kosinussatz für Winkel

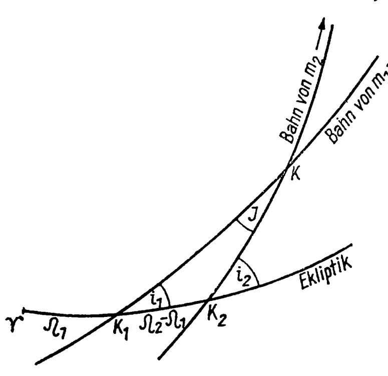


Abb. 27. Spuren zweier Planetenbahnen an der Sphäre

$$\cos J = \cos i_1 \cos i_2 + \sin i_1 \sin i_2 \cos(\Omega_2 - \Omega_1),$$

wenn mit J der (von der Lage der Hauptkoordinatenebene unabhängige) Winkel zwischen den Bahnebenen bezeichnet wird. Sind i_1, i_2 kleine Größen, deren dritte Potenzen vernachlässigt werden dürfen, so kann

$$\cos i_1 = 1 - 2\sin^2 \frac{i_1}{2} = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 i_1,$$
$$\cos i_2 = 1 - 2\sin^2 \frac{i_2}{2} = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 i_2$$

gesetzt werden, und es ist daher innerhalb der angestrebten Genauigkeit

$$\cos J = 1 - 2\sin^2 \frac{J}{2} = 1 - \frac{1}{2}(\sin^2 i_1 + \sin^2 i_2) + \sin i_1 \sin i_2 \cos(\Omega_2 - \Omega_1),$$

also auch

$$4\sin^2 \frac{J}{2} = \sin^2 i_1 + \sin^2 i_2 - 2\sin i_1 \sin i_2 \cos(\Omega_2 - \Omega_1) =$$
$$= (h_2 - h_1)^2 + (k_2 - k_1)^2$$

in den hier zulässigen Grenzen invariant in bezug auf die Wahl des Koordinatensystems.

139. *Integration der säkularen Störungsgleichungen*

Die Integration der Differentialgleichungen (XVI; 31) bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten, da die Störungsfunktion $[W]$ außer einer Konstanten nur eine quadratische Form (XVI; 49) der Variablen

$$\xi_i = f_i \sqrt{L_i}, \quad \eta_i = -g_i \sqrt{L_i}; \quad p_i = h_i \sqrt{L_i}, \quad q_i = -k_i \sqrt{L_i},$$
$$(L_i = \varkappa_i \sqrt{a_i} = \text{const})$$

enthält, die außerdem in getrennte Ausdrücke für ξ_i, η_i allein und für p_i, q_i allein zerfällt. Die Differentialgleichungen lassen sich demnach in der Form

$$\text{(XVI; 50)} \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = \beta_i \eta_1 + \gamma_i \eta_2; \quad \ldots$$

schreiben; die Konstanten $\beta_i, \gamma_i, \ldots$ sind dann im wesentlichen Funktionen von $\alpha = a_2/a_1$ und den LAPLACEschen Koeffizienten, außerdem aber mit den im planetaren Störungsproblem stets sehr kleinen störenden Massen behaftet. Infolgedessen sind zwei verschiedene Lösungsverfahren möglich: Entweder betrachtet man, wie auch sonst bei Beschränkung auf Störungen erster Ordnung üblich und erlaubt ist, die rechten Seiten der Differentialgleichungen (XVI; 50) als konstant und findet dann

$$\text{(XVI; 50a)} \qquad \xi_i = \xi_i^{(0)} + (\beta_i \eta_1 + \gamma_i \eta_2)\, t; \quad \ldots,$$

also der Zeit proportional wachsende oder abnehmende Größen, die für mehr oder weniger beschränkte, aber durchweg beträchtliche Zeiträume die säkularen Änderungen der Elemente befriedigend darstellen, oder man löst die Gleichungen (XVI; 50) nach den für lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten gültigen allgemeinen Regeln streng und erhält dann genauere Ergebnisse, die (sofern die Exzentrizitäten und Neigungen klein genug bleiben) auch für sehr lange Zeiten verbindlich sind.

Die Ausführung der hier angedeuteten Operationen läßt sich wesentlich erleichtern, wenn man die Störungsfunktion (XVI; 49) und die Differentialgleichungen (XVI; 31) zweckdienlich umformt. Zunächst kann man die im vorigen Abschnitt erwähnten Rekursionsbeziehungen zwischen den LAPLACEschen Koeffizienten benutzen, um der Störungsfunktion eine einfachere Form zu geben. Aus (XVI; 35),

$$\left(\frac{a_1}{\varrho_0}\right)^{2s} = [1 - 2\alpha\cos(\lambda_2 - \lambda_1) + \alpha^2]^{-s} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k^{(s)} \cos k(\lambda_2 - \lambda_1),$$
$$s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$$

folgt, wenn man

$$z = e^{i(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

setzt,

$$1 - 2\alpha\cos(\lambda_2 - \lambda_1) + \alpha^2 = (1 - \alpha z)(1 - \alpha z^{-1}),$$
$$\cos k(\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{1}{2}(z^k + z^{-k})$$

und damit

$$\text{(XVI; 51)} \quad (1 - \alpha z)^{-s} (1 - \alpha z^{-1})^{-s} = [1 + \alpha^2 - \alpha(z + z^{-1})]^{-s} = \frac{1}{2} \sum_k b_k^{(s)} z^k.$$

Entwickelt man also die linke Seite dieser Gleichung in eine Potenzreihe nach z, die für $\alpha < 1$ sicher konvergent ist, so ergibt sich $1/_2 b_k^{(s)} = 1/_2 b_{-k}^{(s)}$ als Koeffizient von z^k. Differenziert man (XVI; 51) nach z, so findet man

$$\text{(XVI; 52)} \quad -s[1 + \alpha^2 - \alpha(z + z^{-1})]^{-s-1} (-\alpha + \alpha z^{-2}) =$$
$$= \alpha s (1 - z^{-2}) [1 + \alpha^2 - \alpha(z + z^{-1})]^{-s-1} = \frac{1}{2} \sum_k k\, b_k^{(s)} z^{k-1}$$

oder, nach Multiplikation mit $2z[1 + \alpha^2 - \alpha(z + z^{-1})]$,

$$\alpha s (z - z^{-1}) \sum_k b_k^{(s)} z^k = [1 + \alpha^2 - \alpha(z + z^{-1})] \sum_k k\, b_k^{(s)} z^k.$$

Da aber[1])

$$z \sum_k b_k^{(s)} z^k = \sum_k b_k^{(s)} z^{k+1} = \sum_k b_{k-1}^{(s)} z^k; \quad z^{-1} \sum_k b_k^{(s)} z^k = \sum_k b_k^{(s)} z^{k-1} = \sum_k b_{k+1}^{(s)} z^k$$

ist, folgt

$$\alpha s \sum_k (b_{k-1}^{(s)} - b_{k+1}^{(s)}) z^k = \sum_k \{(1 + \alpha^2) k\, b_k^{(s)} - \alpha(k - 1) b_{k-1}^{(s)} - \alpha(k + 1) b_{k+1}^{(s)}\} z^k.$$

Das ist eine Identität. Koeffizientenvergleich ergibt also

$$\text{(XVI; 53)} \quad \alpha(k - s + 1) b_{k+1}^{(s)} + \alpha(k + s - 1) b_{k-1}^{(s)} = (1 + \alpha^2) k\, b_k^{(s)}.$$

Andererseits ist nach Definition

$$[1 + \alpha^2 - \alpha(z + z^{-1})]^{-s-1} = \frac{1}{2} \sum_k b_k^{(s+1)} z^k.$$

Setzt man dies in (XVI; 52) ein, so erhält man

$$\alpha s (z - z^{-1}) \sum_k b_k^{(s+1)} z^k = \sum_k k\, b_k^{(s)} z^k$$

oder

$$\alpha s \sum_k (b_{k-1}^{(s+1)} - b_{k+1}^{(s+1)}) z^k = \sum_k k\, b_k^{(s)} z^k$$

und hieraus durch Gleichsetzung der Koeffizienten

$$\text{(XVI; 54)} \quad \alpha s (b_{k-1}^{(s+1)} - b_{k+1}^{(s+1)}) = k\, b_k^{(s)}.$$

Die beiden Rekursionsformeln (XVI; 53) und (XVI; 54) genügen, um sämtliche LAPLACEschen Koeffizienten sukzessive zu berechnen, wenn nur zwei von ihnen, etwa $b_0^{(1)}$ und $b_1^{(1)}$ oder irgendein anderes Paar, das man aus der Reihenentwicklung (XVI; 51) oder auf andere Weise in Abhängigkeit von α bestimmt hat, vorgegeben sind.

---

[1]) Da k von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft, darf man in der Summe dem Index k eine ganze Zahl hinzufügen, also statt k auch $k - 1$ bzw. $k + 1$ setzen, wie es hier geschieht.

Zunächst folgt aus (XVI; 53), wenn man k durch $k + 1$ ersetzt,

$$\text{(XVI; 55)} \quad \alpha(k - s + 2)\, b_{k+2}^{(s)} = (1 + \alpha^2)\,(k + 1)\, b_{k+1}^{(s)} - \alpha(k + s)\, b_k^{(s)}.$$

Mit Hilfe dieser Formel lassen sich alle Koeffizienten der Folge s berechnen, wenn zwei von ihnen, etwa $b_0^{(s)}$ und $b_1^{(s)}$, bekannt sind. Aus (XVI; 54) könnte man dann, wenn auf diese Weise alle Glieder einer Folge der Ordnung $s + 1$ bestimmt worden sind, nacheinander auch alle Glieder der Folgen niedrigerer Ordnung, also die $b_k^{(s)}$, $b_k^{(s-1)}, \ldots$, ermitteln. Besser ist es natürlich, Formeln zu besitzen, die es gestatten, die LAPLACEschen Koeffizienten höherer Ordnung aus denen niedrigerer Ordnung abzuleiten. Das gelingt durch Umformung der Rekursionsbeziehungen. Aus (XVI; 55) ergibt sich, wenn man s, k mit $s + 1$, $k - 1$ vertauscht,

$$\text{(XVI; 56a)} \quad \alpha(k - s)\, b_{k+1}^{(s+1)} + \alpha(k + s)\, b_{k-1}^{(s+1)} = (1 + \alpha^2)\, k\, b_k^{(s+1)}.$$

Eliminiert man durch diese Gleichung $b_{k+1}^{(s+1)}$ aus (XVI; 54), so folgt

$$k\, s\,[2\alpha\, b_{k-1}^{(s+1)} - (1 + \alpha^2)\, b_k^{(s+1)}] = k(k - s)\, b_k^{(s)}$$

oder, für $k = 1, 2, 3, \ldots$, wenn man durch k dividiert,

$$\text{(XVI; 56b)} \qquad 2\alpha\, s\, b_{k-1}^{(s+1)} = (1 + \alpha^2)\, s\, b_k^{(s+1)} + (k - s)\, b_k^{(s)}$$

und, wenn man k durch $k + 1$ ersetzt,

$$\text{(XVI; 56c)} \quad (1 + \alpha^2)\, s\, b_{k+1}^{(s+1)} = 2\alpha\, s\, b_k^{(s+1)} - (k - s + 1)\, b_{k+1}^{(s)}.$$

Aus den drei linearen Gleichungen (XVI; 56a, b, c) kann man $b_{k+1}^{(s+1)}$, $b_k^{(s+1)}$, $b_{k-1}^{(s+1)}$ bestimmen und durch Glieder der Folge s ausdrücken. Multipliziert man (XVI; 56b) mit $(1 + \alpha^2)(k + s)$, (XVI; 56c) mit $2\alpha(k - s)$, addiert und berücksichtigt (XVI; 56a), so ergibt sich zunächst

$$2(1 + \alpha^2)^2\, s\, k\, b_k^{(s+1)} = [(1 + \alpha^2)^2\, s(k + s) + 4\alpha^2\, s(k - s)]\, b_k^{(s+1)} + \\ + (1 + \alpha^2)\,(k^2 - s^2)\, b_k^{(s)} - 2\alpha(k - s)\,(k - s + 1)\, b_{k+1}^{(s)}$$

oder, wenn man die Terme mit $b_k^{(s+1)}$ zusammenfaßt und den Faktor $k - s$, der stets von Null verschieden ist, herausdividiert,

$$\text{(XVI; 57a)} \quad (1 - \alpha^2)^2\, s\, b_k^{(s+1)} = (1 + \alpha^2)\,(k + s)\, b_k^{(s)} - 2\alpha(k - s + 1)\, b_{k+1}^{(s)}.$$

Diese Rekursionsformel löst bereits das Problem, doch erhält man Formeln von schönerer Symmetrie, wenn man sie mit derjenigen kombiniert, die durch Vertauschung von k mit $-(k + 1)$ entsteht. Dann ist, da ja für beliebiges k $b_{-k}^{(s)} = b_k^{(s)}$ ist,

$$\text{(XVI; 57b)} \quad (1 - \alpha^2)^2\, s\, b_{k+1}^{(s+1)} = 2\alpha(k + s)\, b_k^{(s)} - (1 + \alpha^2)\,(k - s + 1)\, b_{k+1}^{(s)}$$

und, wenn man (XVI; 57a) und (XVI; 57b) addiert und subtrahiert,

$$\text{(XVI; 58)} \quad \begin{cases} s\,[b_k^{(s+1)} + b_{k+1}^{(s+1)}] = \dfrac{1}{(1 - \alpha)^2}\,[(k + s)\, b_k^{(s)} - (k - s + 1)\, b_{k+1}^{(s)}], \\[2ex] s\,[b_k^{(s+1)} - b_{k+1}^{(s+1)}] = \dfrac{1}{(1 + \alpha)^2}\,[(k + s)\, b_k^{(s)} + (k - s + 1)\, b_{k+1}^{(s)}]. \end{cases}$$

Aus diesen symmetrisch gebauten Formeln kann man, wiederum durch Addition und Subtraktion, zwei aufeinanderfolgende Glieder der Folge $s+1$ aus zwei entsprechenden der Folge s berechnen.

In der Formel (XVI; 49) für die HAMILTONsche Funktion $[W_i]$ der säkularen Störungsgleichungen kommen nur die Konstanten A_0; B_0, B_1, B_2; C_0, C_1, C_2, C_3 vor, und man entnimmt aus (XVI; 36), daß diese Größen mit den LAPLACEschen Koeffizienten durch die Beziehungen

(XVI; 59)
$$a_1 A_k = b_k^{(1/2)}; \quad a_1 B_k = \alpha\, b_k^{(3/2)}; \quad a_1 C_k = \alpha^2\, b_k^{(5/2)}, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

zusammenhängen. Mit Hilfe der zwischen den LAPLACEschen Koeffizienten bestehenden Rekursionsbeziehungen lassen sich diese Konstanten durch eine geringere Anzahl von ihnen ausdrücken, und man wird diese Reduktion so vornehmen, daß der Ausdruck (XVI; 49) eine möglichst einfache Gestalt erhält.

Nun kommt A_0, der einzige Koeffizient der Folge A_i, der in (XVI; 49) auftritt, nur in dem konstanten, d.h. von den f_i, g_i, h_i, k_i bzw. den ξ_i, η_i, p_i, q_i unabhängigen Teil von $[W]$ vor und fällt daher in den Differentialgleichungen (XVI; 31) heraus. Die B_k und C_k lassen sich dann mit Hilfe der oben abgeleiteten Formeln auf B_1 und B_2 zurückführen. Führt man die Größen B_k, C_k durch (XVI; 59) an Stelle der $b_k^{(s)}$ ein, so nehmen die Gleichungen (XVI; 58) für $k = 0$, $s = 3/2$ die Gestalt

$$C_0 + C_1 = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\left[B_0 + \frac{1}{3} B_1\right],$$
$$C_0 - C_1 = \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}\left[B_0 - \frac{1}{3} B_1\right]$$

an, woraus

(XVI; 60a)
$$\left\{\begin{aligned} C_0 &= \frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^2}\left[(1+\alpha^2) B_0 + \frac{2}{3}\alpha B_1\right], \\ C_1 &= \frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^2}\left[2\alpha B_0 + \frac{1}{3}(1+\alpha^2) B_1\right] \end{aligned}\right.$$

folgt. Ferner erhält man aus (XVI; 56a) für $s = 3/2$ und $k = 1$ bzw. 2

(XVI; 60b)
$$\left\{\begin{aligned} C_2 &= 5 C_0 - 2\frac{1+\alpha^2}{\alpha} C_1, \\ C_3 &= -7 C_1 + 4\frac{1+\alpha^2}{\alpha} C_2 \end{aligned}\right.$$

und für $s = 1/2$, $k = 1$

(XVI; 60c)
$$B_2 = -3 B_0 + 2\frac{1+\alpha^2}{\alpha} B_1.$$

Mittels (XVI; 60a, b) lassen sich die in (XVI; 49) auftretenden linearen Ausdrücke in den C_i auf B_0 und B_1 zurückführen, und man erhält nach kurzer Rechnung

$$\left(\frac{15}{16}+\frac{3}{8}\alpha^2\right)C_0-\frac{3}{4}\alpha\, C_1-\frac{9}{16}C_2=\frac{3}{8}(\alpha B_0+B_1), \tag{XVI; 61a}$$

eine Gleichung, die auch ihre Gültigkeit behält, wenn man α durch $1/\alpha$ ersetzt, denn nach (XVI; 36) bleiben ja die Entwicklungen

$$\frac{1}{2}A_0+\sum_k A_k\cos k(\lambda_2-\lambda_1)=\frac{1}{\varrho_0},$$

$$\frac{1}{2}B_0+\sum_k B_k\cos k(\lambda_2-\lambda_1)=\frac{a_1 a_2}{\varrho_0^3},$$

$$\frac{1}{2}C_0+\sum_k C_k\cos k(\lambda_2-\lambda_1)=\frac{a_1^2 a_2^2}{\varrho_0^5}$$

ungeändert, wenn man a_1 und a_2 miteinander vertauscht. Es gilt also auch

$$\left(\frac{15}{16}+\frac{3}{8\alpha^2}\right)C_0-\frac{3}{4}\frac{C_1}{\alpha}-\frac{9}{16}C_2=\frac{3}{8}\left(\frac{B_0}{\alpha}+B_1\right). \tag{XVI; 61b}$$

Schließlich findet man

$$-\frac{9}{8}\frac{1+\alpha^2}{\alpha}C_0+\frac{21}{16}C_1+\frac{3}{8}\frac{1+\alpha^2}{\alpha}C_2+\frac{3}{16}C_3= \tag{XVI; 61c}$$

$$=-\frac{3}{4}\frac{1+\alpha^2}{\alpha}B_1=-\frac{3}{8}(B_2+3B_0),$$

wenn man noch (XVI; 60c) berücksichtigt. Setzt man (XVI; 61a, b, c) in (XVI; 49) ein, so heben sich alle Terme mit B_0 gegenseitig auf, und man erhält

$$[W_i]=k^2 m_j\left[\frac{1}{2}A_0+\frac{1}{8}B_1\{f_1^2+g_1^2+f_2^2+g_2^2-(h_2-h_1)^2-(k_2-k_1)^2\}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}B_2(f_1 f_2+g_1 g_2)\right]. \tag{XVI; 62}$$

Die von a_1, a_2 abhängigen Größen B_1 und B_2 können, wie schon erwähnt, durch Potenzreihen dargestellt werden, die allerdings schlecht konvergieren, wenn nicht α hinreichend klein ist. Die verschiedenen Methoden, die LAPLACEschen Koeffizienten zu berechnen und, sei es durch Reihenentwicklungen, durch Kettenbrüche oder durch elliptische Funktionen, darzustellen, werden im Zusammenhang mit den Problemen der allgemeinen Störungsrechnung in Band III Platz finden. Hier sei der Leser auf die Tabellen im Anhang verwiesen, die den numerischen Verlauf der A_i, B_i, C_i für kleine Indizes erkennen lassen.

Führt man in den Differentialgleichungen (XVI; 31) statt der Variablen $\xi, \eta; p, q$

(XVI; 63) $$f = \frac{\xi}{\sqrt{L}}, \quad g = -\frac{\eta}{\sqrt{L}}; \quad h = \frac{p}{\sqrt{L}}, \quad k = -\frac{q}{\sqrt{L}}, \quad (L = \varkappa \sqrt{a})$$

ein, so behalten sie ihre kanonische Gestalt in diesen Koordinaten, wenn man die HAMILTONschen Funktionen $[W_i]$ durch

$$[V_i] = -\frac{[W_i]}{L_i}$$

ersetzt, und es ist dann

$$\frac{df_i}{dt} = \frac{\partial [V_i]}{\partial g_i}; \qquad \frac{dh_i}{dt} = \frac{\partial [V_i]}{\partial k_i},$$

$$\frac{dg_i}{dt} = -\frac{\partial [V_i]}{\partial f_i}; \qquad \frac{dk_i}{dt} = -\frac{\partial [V_i]}{\partial h_i}.$$

Benutzt man für $[W_i]$ die Form (XVI; 62), so ergibt sich nach Ausführung der partiellen Differentiationen

(XVI; 64) $$\begin{cases} \dfrac{df_i}{dt} = -c_i g_i + d_i g_j; & \dfrac{dh_i}{dt} = c_i(k_i - k_j), \\ \dfrac{dg_i}{dt} = c_i f_i - d_i f_j; & \dfrac{dk_i}{dt} = -c_i(h_i - h_j), \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \\ j = 2, 1 \end{pmatrix}$$

mit den Konstanten

$$c_i = \frac{k^2 m_j}{4L_i} B_1, \quad c_j = \frac{k^2 m_i}{4L_j} B_1; \quad d_i = \frac{k^2 m_j}{4L_i} B_2, \quad d_j = \frac{k^2 m_i}{4L_j} B_2.$$

Da im planetaren Dreikörperproblem diese Konstanten immer von der Ordnung der jeweils störenden Masse sind, die stets $< 10^{-3}$ ist, so darf man, ohne einen Fehler von geringerer als zweiter Ordnung zu begehen, $k = \varkappa_i$ setzen. Man erhält dann, da die mittleren täglichen Bewegungen der Planeten

$$n_i = \frac{\varkappa_i}{a_i^{3/2}} = \frac{\varkappa_i^2}{a_i L_i}$$

sind, also $\varkappa_i^2 / L_i = n_i a_i$ geschrieben werden kann,

(XVI; 65) $$\begin{cases} c_i = \dfrac{1}{4} m_j n_i a_i B_1; & c_j = \dfrac{1}{4} m_i n_j a_j B_1, \\ d_i = \dfrac{1}{4} m_j n_i a_i B_2; & d_j = \dfrac{1}{4} m_i n_j a_j B_2. \end{cases}$$

Die Größen $a_i B_1$, $a_i B_2$, $a_j B_1$, $a_j B_2$, die nach (XVI; 59) nur von α und den LAPLACEschen Koeffizienten abhängen, sind dimensionslose Zahlen.

Aus

$$e^2 = f^2 + g^2; \quad \tan\tilde{\omega} = \frac{g}{f},$$

$$\sin^2 i = h^2 + k^2; \quad \tan \Omega = \frac{k}{h}$$

erhält man schließlich

$$\text{(XVI; 66)} \quad \begin{cases} e\dfrac{de}{dt} = f\dfrac{df}{dt} + g\dfrac{dg}{dt}; & e^2\dfrac{d\tilde{\omega}}{dt} = f\dfrac{dg}{dt} - g\dfrac{df}{dt}, \\ \sin i \cos i\dfrac{di}{dt} = h\dfrac{dh}{dt} + k\dfrac{dk}{dt}; & \sin^2 i\dfrac{d\Omega}{dt} = h\dfrac{dk}{dt} - k\dfrac{dh}{dt} \end{cases}$$

als Differentialgleichungen für die säkularen Störungen der Elemente $e, \tilde{\omega}$, i, Ω selbst.

Hierin ist, was für kleine e und i immer erlaubt sein wird,

$$2\sin\frac{\varphi}{2} \approx \sin\varphi = e; \quad 2\sin\frac{i}{2} \approx \sin i$$

gesetzt worden. Führt man also, wie in (XVI; 39),

$$f = e\cos\tilde{\omega}; \quad g = e\sin\tilde{\omega}; \quad h = \sin i \cos\Omega; \quad k = \sin i \sin\Omega$$

und für deren Ableitungen die Ausdrücke (XVI; 64) ein, so folgt statt (XVI; 66)

$$\text{(XVI; 66a)} \quad \begin{cases} \dfrac{de_i}{dt} = \dfrac{d_i}{e_i}(f_i g_j - g_i f_j) = d_i e_j \sin(\tilde{\omega}_j - \tilde{\omega}_i), \\ \cos i_i \dfrac{di_i}{dt} = c_i \sin i_j \sin(\Omega_i - \Omega_j), \\ \dfrac{d\tilde{\omega}_i}{dt} = c_i - d_i\dfrac{e_j}{e_i}\cos(\tilde{\omega}_j - \tilde{\omega}_i), \\ \dfrac{d\Omega_i}{dt} = -c_i\left\{1 - \dfrac{\sin i_j}{\sin i_i}\cos(\Omega_i - \Omega_j)\right\}. \end{cases}$$

Im Falle der gegenseitigen Störung zweier Planeten genügt das rohe Integrationsverfahren (XVI; 50a), in dem die rechten Seiten der Differentialgleichungen (XVI; 64) und (XVI; 66a) als Konstante gelten, für ziemlich lange Zeiten, und man erhält dann die Elemente $e, \tilde{\omega}; i, \Omega$ als lineare, sehr langsam wachsende oder abnehmende Funktionen der Zeit. Ein besonders instruktives Beispiel hierfür bietet das System Sonne–Jupiter–Saturn. Die gegenseitigen Störungen dieser beiden großen Körper überwiegen die Gesamtheit der Störungen durch die übrigen Planeten so sehr, daß deren Vernachlässigung bei der Berechnung der säkularen Störungen der Bahnen von Jupiter und Saturn verhältnismäßig wenig Einfluß hat. Das gilt insbesondere für Jupiter, dessen Bewegung durch die inneren Planeten ihrer geringen Masse wegen, durch die transsaturnischen Planeten Uranus und Neptun ihres großen Abstandes wegen

nur wenig gestört wird. Im Anhang IV sind nach der oben beschriebenen Methode die jährlichen säkularen Änderungen der Exzentrizität, Neigung, Perihel- und Knotenlänge berechnet worden. Ein Vergleich mit den Zahlen, die man erhält, wenn man die säkularen Störungen durch alle Planeten berücksichtigt, zeigt deutlich, daß die Störungen durch Saturn allein das Ergebnis größenordnungsmäßig richtig liefern: Der Fehler, der durch Vernachlässigung der Störungen durch die übrigen Planeten entsteht, verfälscht das Resultat nur um wenige Prozent. Ähnliches gilt auch für Saturn, obwohl hier die Vernachlässigung insbesondere der Uranusstörungen merklich mehr ins Gewicht fällt als bei Jupiter.

Zur Berechnung der säkularen Störungen des Mondes ist die in diesem Kapitel entwickelte Methode nicht verwendbar. Die Masse der Sonne, die hier als störender Körper fungiert, ist sehr groß. Obwohl ihre störende Wirkung durch die im Verhältnis zum geozentrischen Abstand des Mondes sehr große Entfernung der Sonne stark abgeschwächt wird, ist es nicht statthaft, die von höheren Potenzen der störenden Masse abhängigen Terme der Störungsfunktion zu unterdrücken, wie es bei den Planeten erlaubt war. Wir werden auf diesen Spezialfall des Dreikörperproblems in Kapitel XX zurückkommen.

140. *Störungen sehr langer Periode. Die säkulare Gleichung*

Zur Ermittlung der säkularen Störungen der Planetenbewegung über sehr lange Zeiträume reicht das im vorigen Abschnitt beschriebene und im Anhang am Beispiel Jupiter–Saturn erläuterte Verfahren nicht mehr aus. Man darf die rechten Seiten der Gleichungen (XVI; 64) dann nicht mehr als Konstante gelten lassen, sondern muß auch dort die Größen $f, \ldots, k$ als Funktionen der Zeit ansehen.

Es handelt sich hier um ein System linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, das der Form nach in zwei Systeme für die Variablengruppen f_i, g_i bzw. h_i, k_i allein zerfällt.

Wir betrachten zunächst das System

$$\text{(XVI; 67)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{df_i}{dt} &= -c_i g_i + d_i g_j, \\ \frac{dg_i}{dt} &= c_i f_i - d_i f_j, \end{aligned} \right.$$

dessen Lösung die säkularen Veränderungen der Exzentrizitäten und Perihellängen der beiden Planetenbahnen ergibt. Diese Differentialgleichungen besitzen das partikuläre Integral

$$\text{(XVI; 68)} \qquad f_i = \beta_i \cos(\nu t + \gamma); \quad g_i = \beta_i \sin(\nu t + \gamma).$$

Setzt man nämlich diese Werte in die erste Gleichung (XVI; 67) ein, so erhält man für $i = 1, 2; j = 2, 1$

$$-\nu \beta_1 \sin(\nu t + \gamma) = -c_1 \beta_1 \sin(\nu t + \gamma) + d_1 \beta_2 \sin(\nu t + \gamma),$$
$$-\nu \beta_2 \sin(\nu t + \gamma) = -c_2 \beta_2 \sin(\nu t + \gamma) + d_2 \beta_1 \sin(\nu t + \gamma),$$

Gleichungen, die immer identisch erfüllt sind, wenn zwischen den Konstanten ν, β_1, β_2 die Beziehungen

$$\beta_1(c_1 - \nu) - \beta_2 d_1 = 0,$$
$$\beta_1 d_2 - \beta_2(c_2 - \nu) = 0$$

erfüllt sind, und genau dieselben Bedingungen ergeben sich auch aus der zweiten Gleichung (XVI; 67). Das sind aber zwei lineare homogene Gleichungen für die Konstanten β_1, β_2, die nichtverschwindende Lösungen besitzen, wenn die Determinante dieses Systems Null ist, also ν der quadratischen Gleichung

(XVI; 69)
$$\begin{vmatrix} c_1 - \nu & d_1 \\ d_2 & c_2 - \nu \end{vmatrix} = 0$$

genügt. Es ergibt sich dann für das Verhältnis $\beta_2 : \beta_1$

(XVI; 70)
$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{c_1 - \nu}{d_1} = \frac{d_2}{c_2 - \nu}.$$

Von den in den partikulären Lösungen (XVI; 68) vorkommenden Konstanten sind also nur zwei, etwa β_1, γ, willkürlich, während ν und β_2 dann aus (XVI; 69) bzw. (XVI; 70) folgen. Sind ν_1 und ν_2 die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung, so läßt sich das vollständige Integral von (XVI; 67) in der Form

(XVI; 71)
$$\begin{cases} f_i = \beta_{i1} \cos(\nu_1 t + \gamma_1) + \beta_{i2} \cos(\nu_2 t + \gamma_2), \\ g_i = \beta_{i1} \sin(\nu_1 t + \gamma_1) + \beta_{i2} \sin(\nu_2 t + \gamma_2) \end{cases}$$

schreiben, und es ist, wenn $\beta_{11}, \beta_{12}; \gamma_1, \gamma_2$ als unabhängige Integrationskonstante angesehen werden,

(XVI; 72)
$$\begin{cases} \beta_{21} = \beta_{11} \dfrac{c_1 - \nu_1}{d_1} = \beta_{11} \dfrac{d_2}{c_2 - \nu_1}, \\ \beta_{22} = \beta_{12} \dfrac{c_1 - \nu_2}{d_1} = \beta_{12} \dfrac{d_2}{c_2 - \nu_2}. \end{cases}$$

Die Lösung (XVI; 71) ist periodisch, wenn ν_1 und ν_2 reell sind. In der Tat hat die quadratische Gleichung (XVI; 69),

$$\nu^2 - (c_1 + c_2)\,\nu + c_1 c_2 - d_1 d_2 = 0,$$

nur reelle Wurzeln

$$\nu = \frac{c_1 + c_2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(c_1 + c_2)^2 - 4(c_1 c_2 - d_1 d_2)} =$$
$$= \frac{c_1 + c_2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(c_1 - c_2)^2 + 4 d_1 d_2}.$$

Wenn nämlich die Bewegungen der beiden Planeten im gleichen Sinne erfolgen, so haben die mittleren Bewegungen n_1 und n_2 das gleiche Vorzeichen, und man darf annehmen, daß sie dann beide positiv sind, da das durch geeignete Wahl des Koordinatensystems immer erreicht werden kann. Da ferner aus Tab. III des Anhangs ersichtlich ist, daß die Größen B_1 und B_2 positiv sind und daß

immer $B_2 < B_1$ gilt, folgt nach (XVI; 65), daß auch die Größen c_i, d_i positiv sind und daß $d_i = \varepsilon c_i$ ist, wo $\varepsilon = B_2/B_1 < 1$ ist. Die Diskriminante

$$\Delta = (c_1 - c_2)^2 + 4d_1 d_2 = (c_1 + c_2)^2 - 4c_1 c_2(1 - \varepsilon^2)$$

ist also positiv. Das ist sogar auch dann noch richtig, wenn die Bewegungen in entgegengesetztem Sinne verlaufen. Sind nämlich c_1, d_1 positiv und c_2, d_2 negativ, so setze man $-c_2 = c_2'$, $-d_2 = \varepsilon c_2'$, und es ist dann auch

$$\Delta = (c_1 - c_2')^2 + 4c_1 c_2'(1 - \varepsilon^2) > 0.$$

Im Falle des planetaren Dreikörperproblems, in dem die Bewegungen stets gleichsinnig erfolgen, sind ν_1 und ν_2 beide positiv und verschieden voneinander, und es ist

$$e_i^2 = \beta_{i1}^2 + \beta_{i2}^2 + 2\beta_{i1}\beta_{i2}\cos[(\nu_1 - \nu_2)\,t + \gamma_1 - \gamma_2].$$

Die Exzentrizitäten bleiben also auch für sehr lange Zeiten beschränkt, und es gilt die Ungleichung

$$\big||\beta_{i1}| - |\beta_{i2}|\big| \leqq e_i \leqq \big||\beta_{i1}| + |\beta_{i2}|\big|,$$

die noch einmal die aus (XVI; 22) gezogenen Schlüsse über die Stabilität der Planetenbahnen bestätigt. Da die Größen ν_1, ν_2 von der Ordnung der c_i, d_i, also von der Ordnung der störenden Massen, sind, ist die Periode, mit der die Exzentrizitäten zwischen diesen Grenzen schwanken, sehr lang, nämlich $p = 2\pi/|\nu_1 - \nu_2|$.

Die Konstanten β_{1i}, γ_i ergeben sich aus den Anfangsbedingungen, d.h. aus den Werten, die von den Elementen $e_1, \tilde{\omega}_1, e_2, \tilde{\omega}_2$ zur Zeit $t = 0$ angenommen werden. Es sei für diesen Zeitpunkt nach (XVI; 71)

$$\begin{aligned}
f_1^{(0)} &= \beta_{11}\cos\gamma_1 + \beta_{12}\cos\gamma_2 = x_1 + x_2,\\
f_2^{(0)} &= \beta_{21}\cos\gamma_1 + \beta_{22}\cos\gamma_2 = s_1 x_1 + s_2 x_2,\\
g_1^{(0)} &= \beta_{11}\sin\gamma_1 + \beta_{12}\sin\gamma_2 = y_1 + y_2,\\
g_2^{(0)} &= \beta_{21}\sin\gamma_1 + \beta_{22}\sin\gamma_2 = s_1 y_1 + s_2 y_2
\end{aligned}$$

und hierin nach (XVI; 70)

$$s_1 = \frac{\beta_{21}}{\beta_{11}} = \frac{c_1 - \nu_1}{d_1} = \frac{d_2}{c_2 - \nu_1}; \quad s_2 = \frac{\beta_{22}}{\beta_{12}} = \frac{c_1 - \nu_2}{d_1} = \frac{d_2}{c_2 - \nu_2}.$$

Dann bestimmt man aus diesen Gleichungen

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{f_2^{(0)} - s_2 f_1^{(0)}}{s_1 - s_2}; \quad & x_2 &= \frac{s_1 f_1^{(0)} - f_2^{(0)}}{s_1 - s_2},\\
y_1 &= \frac{g_2^{(0)} - s_2 g_1^{(0)}}{s_1 - s_2}; \quad & y_2 &= \frac{s_1 g_1^{(0)} - g_2^{(0)}}{s_1 - s_2}
\end{aligned}$$

und erhält

$$\beta_{11} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \quad \beta_{12} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}; \quad \tan\gamma_1 = \frac{y_1}{x_1}, \quad \tan\gamma_2 = \frac{y_2}{x_2}.$$

Zu einer anschaulichen Übersicht über das säkulare Verhalten der Perihellängen gelangt man am besten, indem man einen ebenen Vektor $\mathfrak{e}_i$ mit den Koordinaten $f_i = e_i \cos\tilde{\omega}_i$, $g_i = e_i \sin\tilde{\omega}_i$ betrachtet. Nach (XVI; 71) läßt sich dieser Vektor,

$$\mathfrak{e}_i = \mathfrak{e}_i^{(1)} + \mathfrak{e}_i^{(2)},$$

in zwei Komponenten $\mathfrak{e}_i^{(1)}$ und $\mathfrak{e}_i^{(2)}$ zerlegen, die konstante Beträge β_{i1} bzw. β_{i2} haben und sich mit sehr langen und verschiedenen Perioden $p_1 = 2\pi/\nu_1$ bzw. $p_2 = 2\pi/\nu_2$ gleichförmig in positivem Sinne drehen. Ist $|\beta_{i1}| \neq |\beta_{i2}|$, was meist der Fall sein wird, so sei $|\beta_{i1}| > |\beta_{i2}|$. Man kann dann die säkulare Veränderung von $\tilde{\omega}_i$, d.h. den Weg, den die Spitze des Vektors $\mathfrak{e}_i^{(1)} + \mathfrak{e}_i^{(2)}$ um den Ursprung des ebenen $e_i, \tilde{\omega}_i$-Polarkoordinatensystems beschreibt, als eine Epizykelbewegung im Sinne der antiken Astronomie (vgl. Kapitel I) ansehen. Der Endpunkt des Vektors $\mathfrak{e}_i^{(1)}$ beschreibt mit der Winkelgeschwindigkeit ν_1 einen Kreis, und um ihn beschreibt der Endpunkt des kürzeren Vektors $\mathfrak{e}_i^{(2)}$ einen „Epizykel" mit der Winkelgeschwindigkeit ν_2. Die Perihellänge $\tilde{\omega}_i$ wird dann durch den Richtungswinkel der Vektorsumme $\mathfrak{e}_i$ (Abb. 28) dargestellt. Abgesehen von mehr oder weniger großen periodischen Schwankungen oder Librationen, die durch die Epizykelbewegung hervorgerufen werden und offensichtlich die Periode $p = 2\pi/|\nu_1 - \nu_2|$ des „synodischen Umlaufs" haben, erfolgt das säkulare Fortschreiten der Perihellänge $\tilde{\omega}_i$ mit derjenigen mittleren Geschwindigkeit, die der Komponente mit dem größten Betrag zukommt, also, falls $|\mathfrak{e}_i^{(1)}| > |\mathfrak{e}_i^{(2)}|$ ist, mit der Geschwindigkeit ν_1. Ein Ausnahmefall würde eintreten, wenn genau $|\mathfrak{e}_i^{(1)}| = |\mathfrak{e}_i^{(2)}| = \beta_i$ ist. Dann wäre nämlich

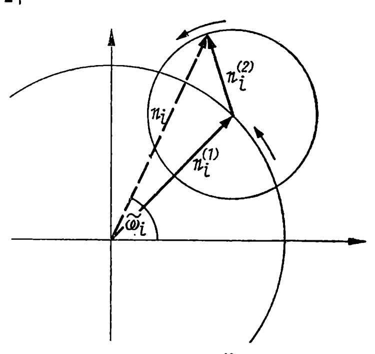


Abb. 28. Säkulare Änderungen der Exzentrizitäten $e_i = |\mathfrak{e}_i|$ und der Perihellängen

$$e_i \cos\tilde{\omega}_i = \beta_i [\cos(\nu_1 t + \gamma_1) + \cos(\nu_2 t + \gamma_2)] =$$

$$= 2\beta_i \cos\left[\frac{\nu_1 + \nu_2}{2} t + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right] \cos\left[\frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}\right],$$

$$e_i \sin\tilde{\omega}_i = \beta_i [\sin(\nu_1 t + \gamma_1) + \sin(\nu_2 t + \gamma_2)] =$$

$$= 2\beta_i \sin\left[\frac{\nu_1 + \nu_2}{2} t + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right] \cos\left[\frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}\right]$$

und daher

$$\tan\tilde{\omega}_i = \tan\left[\frac{\nu_1 + \nu_2}{2} t + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right],$$

$$\tilde{\omega}_i = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} t + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}.$$

Die Perihellänge schreitet dann gleichförmig mit der Geschwindigkeit $^1/_2(\nu_1 + \nu_2)$ (ohne periodische Schwankungen) fort, während die Exzentrizität

$$e_i = \left| 2\beta_i \cos\left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}\right)\right|$$

im Laufe der sehr langen Periode $4\pi/|\nu_1 - \nu_2|$ zwischen 0 und $2\beta_i$ schwankt.

In entsprechender Weise findet man die Lösung des Systems

$$\text{(XVI; 73)} \qquad \frac{dh_i}{dt} = c_i(k_i - k_j); \quad \frac{dk_i}{dt} = -c_i(h_i - h_j), \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \\ j = 2, 1 \end{pmatrix},$$

das die säkularen Änderungen der Bahnneigungen und der Knotenlängen beschreibt. Der Ansatz

$$h_i = \beta_i' \cos(\nu' t + \gamma'); \quad k_i = \beta_i' \sin(\nu' t + \gamma')$$

führt, in die erste oder die zweite der Gleichungen (XVI; 73) eingesetzt, auf die Bedingungen

$$\beta_1'(c_1 + \nu') - \beta_2' c_1 = 0,$$
$$\beta_1' c_2 - \beta_2'(c_2 + \nu') = 0,$$

die nichtverschwindende Lösungen β_1', β_2' und die Verhältnisse

$$\text{(XVI; 74)} \qquad \frac{\beta_2'}{\beta_1'} = \frac{c_1 + \nu'}{c_1} = \frac{c_2}{c_2 + \nu'}$$

liefern, wenn ν' die quadratische Gleichung

$$\text{(XVI; 75)} \qquad \begin{vmatrix} c_1 + \nu' & c_1 \\ c_2 & c_2 + \nu' \end{vmatrix} = 0$$

befriedigt.

Die Lösungen dieser Gleichung sind

$$\nu_1' = 0; \quad \nu_2' = \nu' = -(c_1 + c_2).$$

Das vollständige Integral von (XVI; 73) hat also die Form

$$h_i = \beta_{i1}' \cos\gamma_1' + \beta_{i2}' \cos(\nu' t + \gamma_2'),$$
$$k_i = \beta_{i1}' \sin\gamma_1' + \beta_{i2}' \sin(\nu' t + \gamma_2')$$

mit den vier unabhängigen Integrationskonstanten

$$\beta_{11}';\ \beta_{12}';\ \gamma_1';\ \gamma_2',$$

während nach (XVI; 74)

$$\beta_{21}' = \frac{c_1 + \nu_1'}{c_1} \beta_{11}' = \beta_{11}'; \quad \beta_{22}' = \frac{c_1 + \nu_2'}{c_1} \beta_{12}' = -\frac{c_2}{c_1} \beta_{12}'$$

ist.

Die Berechnung dieser Konstanten erfolgt wiederum aus den Anfangsbedingungen für $t = 0$:

(XVI; 76a)
$$\begin{cases} h_1^{(0)} = \beta'_{11}\cos\gamma'_1 + \beta'_{12}\cos\gamma'_2 = x'_1 + x'_2, \\ h_2^{(0)} = \beta'_{21}\cos\gamma'_1 + \beta'_{22}\cos\gamma'_2 = x'_1 - s\,x'_2, \\ k_1^{(0)} = \beta'_{11}\sin\gamma'_1 + \beta'_{12}\sin\gamma'_2 = y'_1 + y'_2, \\ k_2^{(0)} = \beta'_{21}\sin\gamma_1 + \beta'_{22}\sin\gamma'_2 = y'_1 - s\,y'_2, \end{cases} \qquad \left(s = \frac{c_2}{c_1}\right),$$

woraus

(XVI; 76b)
$$\begin{cases} x'_1(1+s) = s\,h_1^{(0)} + h_2^{(0)}; & x'_2(1+s) = h_1^{(0)} - h_2^{(0)}, \\ y'_1(1+s) = s\,k_1^{(0)} + k_2^{(0)}; & y'_2(1+s) = k_1^{(0)} - k_2^{(0)} \end{cases}$$

folgt. Setzt man wieder

(XVI; 77)
$$h_i = \sin i_i \cos \Omega_i; \quad k_i = \sin i_i \sin \Omega_i,$$

so gilt

$$\sin^2 i_i = h_i^2 + k_i^2 = \beta'^2_{i1} + \beta'^2_{i2} + 2\beta'_{i1}\beta'_{i2}\cos(\nu' t + \gamma'_2 - \gamma'_1),$$

so daß die Neigungen zwischen zwei kleinen Schranken eingeschlossen bleiben, von denen eine in Ausnahmefällen auch gleich Null sein kann. Betrachtet man die ebenen Vektoren $\mathfrak{i}_i$ mit den Koordinaten h_i, k_i, so lassen sich diese in die Komponenten

$$\mathfrak{i}_i = \mathfrak{i}_i^{(1)} + \mathfrak{i}_i^{(2)}$$

zerlegen, wo $\mathfrak{i}_i^{(1)}$ einen konstanten Vektor darstellt und $\mathfrak{i}_i^{(2)}$ sich mit der Winkelgeschwindigkeit $-(c_1 + c_2)$, also in rückläufigem Sinne, um den durch den Ortsvektor $\mathfrak{i}_i^{(1)}$ gekennzeichneten Punkt der $h\,k$-Ebene dreht. Ist demnach $|\mathfrak{i}_i^{(2)}| > |\mathfrak{i}_i^{(1)}|$, so schreitet die Knotenlänge Ω_i langsam und unter periodischen Schwankungen rückwärts, und ihre Umlaufsperiode ist $p' = 2\pi/(c_1 + c_2)$. Ist dagegen der konstante Vektor $\mathfrak{i}_i^{(1)}$ länger als der bewegliche, so bleibt die Knotenlänge im Mittel konstant und führt um diesen Mittelwert langperiodische Librationen aus.

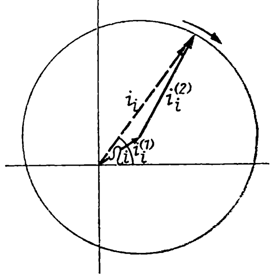


Abb. 29. Säkulare Änderungen der Neigungen $\sin i_i = |\mathfrak{i}_i|$ und Knotenlängen Ω_i

Wenn man als Hauptkoordinatenebene die UVE des Systems wählt, das durch die Sonne und die beiden Planeten gebildet wird, dann läßt sich leicht zeigen, daß der konstante Vektor sehr klein ist. Die Bahnneigungen sind dann (siehe Abb. 29) fast konstant, und die Knoten bewegen sich mit fast konstanter Geschwindigkeit rückläufig. Der in Jacobischen Koordinaten ausgedrückte Flächensatz hat nach (XI; 63) die Form

$$\mu_1[\mathfrak{q}_1\,\dot{\mathfrak{q}}_1] + \mu_2[\mathfrak{q}_2\,\dot{\mathfrak{q}}_2] = \text{const.}$$

Wenn man Terme von der Ordnung der Quadrate der Planetenmassen vernachlässigt, darf man $\mu_i = m_i$ setzen und die Jacobischen Ortsvektoren $\mathfrak{q}_i$ durch die heliozentrischen ersetzen. Die Koordinaten der Flächengeschwindig-

keitsvektoren $\mathfrak{g}_i = [\mathfrak{q}_i\, \dot{\mathfrak{q}}_i]$ in den oskulierenden Bahnen sind dann nach (IV; 8) proportional

$$\sqrt{p_i} \sin i_i \sin \Omega_i; \quad -\sqrt{p_i} \sin i_i \cos \Omega_i; \quad \sqrt{p_i} \cos i_i.$$

Wählt man nun die UVE als Hauptkoordinatenebene, so gilt

$$\text{(XVI; 78)} \quad \begin{cases} m_1 \sqrt{p_1} \sin i_1 \sin \Omega_1 + m_2 \sqrt{p_2} \sin i_2 \sin \Omega_2 = 0, \\ m_1 \sqrt{p_1} \sin i_1 \cos \Omega_1 + m_2 \sqrt{p_2} \sin i_2 \cos \Omega_2 = 0, \\ m_1 \sqrt{p_1} \cos i_1 \qquad + m_2 \sqrt{p_2} \cos i_2 \qquad = \text{const}, \end{cases}$$

und diese Gleichungen sind angenähert erfüllt, wenn man – vorausgesetzt, daß die Exzentrizitäten klein sind – Terme von der Ordnung e_i^2 vernachlässigt und $p_i = \sqrt{a_i(1 - e_i^2)} \approx \sqrt{a_i}$ setzt. Dann ist aber nach (XVI; 65)

$$m_i \sqrt{a_i} = \frac{4k\, m_i\, m_j B_1}{c_i}.$$

Setzt man dies in die beiden ersten Gleichungen (XVI; 78) ein, berücksichtigt (XVI; 77) und dividiert gemeinsame konstante Faktoren heraus, so ergibt sich

$$\frac{k_1}{c_1} + \frac{k_2}{c_2} = 0; \quad \frac{h_1}{c_1} + \frac{h_2}{c_2} = 0$$

oder, mit $s = c_2/c_1$,

$$s\, k_1 + k_2 = 0; \quad s\, h_1 + h_2 = 0.$$

Nach (XVI; 76b) verschwindet also der konstante Vektor mit den Koordinaten x_1', y_1'. Werden somit die Elemente i, Ω auf die UVE des Systems bezogen, so gilt im planetaren Dreikörperproblem außer dem JACOBIschen Knotensatz ($\Omega_2 = \Omega_1 + 180°$), daß die Neigungen i_1, i_2 von säkularen Störungen frei bleiben und daß sich die Knoten, abgesehen von kurzperiodischen Störungen, mit konstanter Geschwindigkeit rückläufig bewegen.

Eine Ausdehnung der Untersuchung der säkularen Störungen der Elemente $e, \tilde{\omega}$ bzw. i, Ω auf den Fall einer beliebigen Anzahl von Planeten bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten mehr, immer unter der Voraussetzung, daß die Exzentrizitäten und Neigungen genügend klein sind; sie wird in Band III im Zusammenhang mit der allgemeinen Störungstheorie vorgenommen werden. Hier genügen einige Hinweise auf die Ergebnisse, die ohne Beweis vorweggenommen werden mögen:

1. Die Differentialgleichungen der säkularen Störungen bleiben, sofern Terme höherer als zweiter Ordnung in den Exzentrizitäten und Neigungen vernachlässigt werden, getrennt für die $e_i, \tilde{\omega}_i$ einerseits und die i_i, Ω_i andererseits, und sie sind linear mit konstanten Koeffizienten.

2. Die allgemeinen Integrale haben bei n Planeten die Form von ebenen Vektorsummen aus je n Summanden; diese haben konstante Beträge und

drehen sich mit gewissen sehr kleinen und konstanten Winkelgeschwindigkeiten ν_i, die man als die n Wurzeln einer algebraischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\nu & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\nu & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\nu \end{vmatrix} = 0 \tag{XVI; 79}$$

erhält. Man bezeichnet diese Gleichung, die in engem Zusammenhang mit der Theorie der orthogonalen Transformation quadratischer Formen steht, daher auch als *säkulare Gleichung.*

3. Die säkulare Gleichung hat nur reelle Lösungen, die im Fall der Exzentrizitäten und Perihellängen sämtlich positiv sind. Im Fall der Neigungen und Knotenlängen ist eine Wurzel der säkularen Gleichung Null, die übrigen sind negativ. Für $n = 2$ und $n = 3$ sind alle Wurzeln verschieden, für $n > 3$ können auch mehrfache Wurzeln vorkommen. Dieser Sonderfall wird besondere Überlegungen notwendig machen.

141. *Säkulare Störungen der mittleren Länge*

Nachdem bewiesen worden ist, daß die großen Halbachsen der Planetenbahnen keine säkularen Störungen erleiden, und nachdem die säkularen Änderungen der vier Elemente $e, \tilde{\omega}; i, \Omega$ durch Integration der Differentialgleichungen (XVI; 67) und (XVI; 73) ermittelt worden sind, bleibt nur noch die Untersuchung des säkularen Verhaltens der mittleren Länge λ als des sechsten und letzten der Bahnelemente übrig. Man kann die säkulare Variation von λ_i aus

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{\partial [F_i]}{\partial L_i}$$

durch einfache Quadratur ermitteln, da ja $[F_i]$ als Funktion der Poincaréschen Elemente

$$L_i;\ \xi_i, \eta_i;\ p_i, q_i$$

nun auch als Funktion der Zeit bekannt ist, und zwar ist, wenn wir wieder das heliozentrische Koordinatensystem zugrunde legen,

$$[F_i] = \frac{\varkappa_i^4}{2L_i^2} + [W_i]$$

und nach (XVI; 62)

$$[W_i] = k^2 m_j \Big[\frac{1}{2} A_0 + \frac{1}{8} B_1 \{f_1^2 + g_1^2 + f_2^2 + g_2^2 - (h_2 - h_1)^2 - (k_2 - k_1)^2\} - \\ - \frac{1}{4} B_2 \{f_1 f_2 + g_1 g_2\}\Big],$$

wobei A_0, B_1, B_2 Funktionen der großen Halbachsen und daher auch von $L_i = \varkappa_i \sqrt{a_i}$ sind. Ebenfalls sind

$$f_i = \frac{\xi_i}{\sqrt{L_i}}, \quad g_i = -\frac{\eta_i}{\sqrt{L_i}}; \quad h_i = \frac{p_i}{\sqrt{L_i}}, \quad k_i = -\frac{q_i}{\sqrt{L_i}}$$

als Funktionen von L_i anzusehen, während die POINCARÉschen Elemente $\xi_i, \eta_i; p_i, q_i$ ja von L_i – als einem anderen Element des gleichen Systems – unabhängig sind. Man erhält daher

$$\text{(XVI; 80)} \quad \frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{\varkappa_i^4}{L_i^3} - k^2 m_j \left[\frac{1}{2}\frac{\partial A_0}{\partial L_i} + \frac{1}{8}\frac{\partial B_1}{\partial L_i}\{f_1^2 + g_1^2 + f_2^2 + g_2^2 - (h_2 - h_1)^2 - (k_2 - k_1)^2\} - \frac{1}{4}\frac{\partial B_2}{\partial L_i}\{f_1 f_2 + g_1 g_2\}\right] + \frac{k^2 m_j}{2L_i}\left[\frac{1}{4}B_1\{f_i^2 + g_i^2 - (h_i - h_j)\,h_i - (k_i - k_j)\,k_i\} - \frac{1}{4}B_2\{f_1 f_2 + g_1 g_2\}\right], \qquad (i = 1, 2;\ j = 2, 1).$$

Setzt man, was hier nicht explizite ausgeführt zu werden braucht, für die f_i, g_i, h_i, k_i die säkularen Werte (also langperiodische Funktionen der Zeit; bei den h, k, falls nicht die UVE als Hauptbezugsebene gewählt wird, außerdem noch eine additive Konstante) ein und bedenkt man ferner, daß

$$n_i = \frac{\varkappa_i}{a_i^{3/2}} = \frac{\varkappa_i^4}{L_i^3}$$

ist, so erhält (XVI; 80) die Form

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = n_i + c_i + \sum_{\varrho} (a_\varrho \cos\nu_\varrho t + b_\varrho \sin\nu_\varrho t).$$

Hierin bedeuten die ν_ϱ die in den säkularen Variationen jeweils auftretenden sehr kleinen Winkelgeschwindigkeiten und die a_ϱ, b_ϱ sehr kleine Koeffizienten, die der störenden Masse proportional sind, außerdem aber Größen von der zweiten Ordnung in den kleinen Exzentrizitäten und Neigungen darstellen. Die Integration ergibt dann

$$\lambda_i = (n_i + c_i)\, t + \sum_{\varrho}\left(\frac{a_\varrho}{\nu_\varrho}\sin\nu_\varrho t - \frac{b_\varrho}{\nu_\varrho}\cos\nu_\varrho t\right) + \varepsilon_i$$

mit ε_i als Integrationskonstante. Da die ν_ϱ sehr klein sind, wird die Kleinheit der a_ϱ, b_ϱ dadurch zum Teil wieder aufgehoben, so daß die Amplituden der langperiodischen Glieder unter Umständen bedeutende Werte erreichen können. Die Konstante c_i ist dagegen im wesentlichen auf das Hauptglied

$$-\frac{1}{2}k^2 m_j \frac{\partial A_0}{\partial L_i}$$

beschränkt, das zwar die kleine störende Masse enthält, aber von den kleinen Exzentrizitäten und Neigungen nicht abhängt.

Abgesehen von langperiodischen Librationen ist also die „mittlere mittlere Länge“ durch

$$\overline{\lambda_i} = (n_i + c_i)\, t + \varepsilon_i$$

gegeben, wobei ε_i jetzt den Wert bezeichnet, den diese Größe zur Epoche $t = 0$ annimmt. Die mittlere Bewegung des Planeten ist also von derjenigen der ungestörten Bahn um einen Betrag von der Ordnung der störenden Masse verschieden. Bestimmt man die mittlere Umlaufszeit

$$\overline{T_i} = \frac{2\pi}{n_i + c_i}$$

aus einer sehr großen Anzahl von Umläufen, so daß die langperiodischen Variationen ganz oder zum größten Teil herausfallen, so unterscheidet sich diese ein wenig von der mittleren Umlaufszeit

$$T_i = \frac{2\pi}{n_i} = \frac{2\pi}{\varkappa_i}\, a_i^{3/2},$$

die man nach dem dritten KEPLERschen Gesetz aus dem mittleren (d.h. von kurzperiodischen Störungen befreiten) Wert a_i der großen Halbachse oder gar aus dem der oskulierenden Bahn irgendeiner Epoche ableiten würde. Das stimmt mit den Bemerkungen am Schluß des Abschnitts 135 überein.

KAPITEL XVII

NUMERISCHE INTEGRATION VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

142. *Übersicht über das Problem*

Wenn auch das Problem der Bewegung von drei oder mehr Körpern unter dem Einfluß NEWTONscher Gravitationskräfte nicht allgemein lösbar ist, so bereitet es doch keine grundsätzlichen Schwierigkeiten, spezielle Lösungen durch numerische Integration der Bewegungsgleichungen zu gewinnen, indem man, von gegebenen Anfangsbedingungen ausgehend, die Bahnbewegungen der beteiligten Körper schrittweise ermittelt. Diese Methode wird mit besonderem praktischem Nutzen bei der Berechnung „spezieller Störungen" der Koordinaten oder der Bahnelemente von Himmelskörpern unseres Sonnensystems verwendet. Dort sind ja im allgemeinen, wie wir wissen, störungsfreie Kegelschnittbahnen als genäherte Lösungen der Differentialgleichungen des Problems bekannt, z.B. in Form der Elemente der oskulierenden Bahnen zu einer Anfangszeit $t = t_0$, und es ist dann nur noch erforderlich, die Variationen dieser Elemente zu ermitteln, die bei Berücksichtigung der störenden Kräfte auftreten, oder die kleinen Zusatzglieder zu berechnen, die in der gestörten Bewegung den bekannten Koordinaten der intermediären Bahn hinzuzufügen sind. Da diese Störungsbeträge im allgemeinen klein sind und sich mit der Zeit ziemlich langsam ändern, kann ihre schrittweise Berechnung durch numerische Integration der Differentialgleichungen, denen sie gehorchen, verhältnismäßig rasch und mit großer Genauigkeit erfolgen.

Natürlich sind die Methoden der numerischen Integration nicht nur anwendbar, wenn es sich um die Berechnung des zeitlichen Verlaufs von Störungen bekannter Bahnbewegungen handelt, sondern auch dann, wenn – etwa bei speziellen Fällen des allgemeinen Drei- oder Mehrkörperproblems – die aus vorgegebenen Anfangswerten der Örter und Geschwindigkeiten folgende und noch gänzlich unbekannte Bewegung des Systems untersucht werden soll. Insbesondere hat sich diese Methode als ungemein fruchtbar erwiesen, um im „problème restreint" die mannigfaltigen Bewegungen der infinitesimalen Masse in periodischen, d.h. in sich zurücklaufenden, geschlossenen Bahnen zu studieren und in ein System von „Klassen" oder „Familien" zu bringen. Von einigen besonders interessanten Bahnformen dieser Art, den einfach-periodischen Bahnen um die fünf LAGRANGEschen Librationszentren, ist in Kapitel XIII schon die Rede gewesen. Die zahlreichen Arbeiten über dieses reizvolle Problem, die in den ersten Jahrzehnten dieses Jahrhunderts an der Kopenhagener Sternwarte von ELIS STRÖMGREN und seinen Mitarbeitern ausgeführt worden sind, haben dazu beigetragen, unsere Kenntnisse von den äußerst verschiedenartigen Bahnformen, die selbst das noch verhältnismäßig einfache eingeschränkte Dreikörperproblem zuläßt, zu vertiefen und, soweit dies schon möglich gewesen ist, in ein übersichtliches Schema zu bringen. Heutzutage hat die Er-

findung der elektronischen Rechenanlagen, durch die auch langwierige Rechenarbeiten in kürzester Zeit und mit bis dahin unerreichter Genauigkeit und Zuverlässigkeit bewältigt werden können, die Vorbedingungen für eine weit umfassendere systematische Durchführung dieser Aufgabe geschaffen, doch ist im Zeitpunkt des Erscheinens dieses Buches noch wenig geschehen, um sie in größerem Stile anzugreifen. Für die nächste Zukunft sind aber von einer solchen gründlichen Durchmusterung der periodischen und asymptotischen Bahnen des „problème restreint" Ergebnisse zu erwarten, die das bei aller Fülle immer noch unvollständige und unbefriedigende Bild verfeinern werden, das uns die Kopenhagener Arbeiten entworfen haben und von dem in Kapitel XIX eine knappe Übersicht gegeben werden soll. Es ist daher nicht überflüssig, wenn in diesem Kapitel die Methoden der numerischen Integration nicht nur im Hinblick auf ihre Anwendung bei der Berechnung von speziellen Störungen beschrieben werden.

Ein aktuelles Problem, zu dessen Lösung diese numerischen Methoden als bestes und nie versagendes Handwerkszeug dienen, erfordert besondere Aufmerksamkeit: das der Bewegung künstlicher Satelliten und Raumproben im Gravitationsfeld von Erde, Mond und Sonne. Hier haben wir es zunächst mit einem Spezialfall des *Vierkörperproblems* zu tun: Drei endliche Massen bewegen sich in Bahnen, die man auf Grund der Ergebnisse der klassischen Himmelsmechanik als bekannt voraussetzen darf, während die Bewegung der vierten, infinitesimalen Masse zur Diskussion steht. Die vollständige Lösung dieses Problems verlangt allerdings die Berücksichtigung mancher Umstände, die in der Himmelsmechanik sonst entfallen oder vernachlässigt werden dürfen. Insbesondere sind die Einflüsse auf die Bewegung der infinitesimalen Masse in Rechnung zu stellen, die durch die dynamische Abplattung des Erdkörpers bewirkt werden, genauer gesagt, durch die von der Massenverteilung im Erdkörper abhängige Anisotropie des Potentialfeldes der Erde. Noch schwieriger ist, solange sich der Körper in großer Erdnähe aufhält, die Berücksichtigung des Widerstandes der äußeren Schichten der Erdatmosphäre, der von verschiedenen nur unsicher bekannten Faktoren (Luftdichte als Funktion der Höhe, Abhängigkeit des Luftwiderstandes von der Form des Körpers und der Geschwindigkeit usw.) bestimmt wird. Bei Satelliten von geringer Masse, aber großer und stark reflektierender Oberfläche, wie „Echo I" und „Echo II", kommt noch der Lichtdruck als bewegende Kraft hinzu, deren Einfluß besonders störend ist, weil sie zeitweilig aussetzt, nämlich beim Durchgang des Satelliten durch den Erdschatten, und infolgedessen Unstetigkeiten in der Bewegung hervorruft.

Wenn wir von diesen letztgenannten Problemen vorläufig absehen, so lassen sich die Differentialgleichungen der Himmelsmechanik stets in der kanonischen Form

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

schreiben, wo $H = H(q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n; t)$ eine bekannte Funktion der $2n$ Variablen q, p und in besonderen Fällen auch der Zeit t ist. Es handelt

sich also meist um Differentialgleichungen erster Ordnung von der Gestalt

$$\dot{y}_i = f_i(y_1, \ldots, y_k; t), \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Unter Umständen ist es auch vorteilhaft, die Bewegungsgleichungen in ihrer ursprünglichen Form als Ausdrücke für die auf die Massen des Systems wirkenden Kräfte bzw. für die ihnen von diesen Kräften erteilten Beschleunigungen zu schreiben, d.h. als Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\ddot{y}_i = f_i(y_1, \ldots, y_k; t).$$

Schließlich stoßen wir im „problème restreint" auf Gleichungen der Form

$$\ddot{x} = f(x, y, \dot{y}),$$
$$\ddot{y} = g(x, y, \dot{x})$$

für die Koordinaten der infinitesimalen Masse in einem rotierenden System, Gleichungen also, die Ableitungen erster und zweiter Ordnung enthalten. Aber auch diese lassen sich ja, wie am Schluß des Abschnitts 122 gezeigt worden ist, auf ein kanonisches System von Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen.

Die Methoden der numerischen Integration beruhen auf folgendem Prinzip, das wir hier vorerst für ein System erster Ordnung von der Gestalt

$$\text{(XVII; 1)} \qquad \dot{y}_i = f_i(y_1, \ldots, y_n)$$

erläutern, dessen Integrale

$$y_i = y_i(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

Funktionen der Zeit und der n unabhängigen Konstanten α sind. Die Integrationskonstanten lassen sich als Funktionen der Anfangswerte

$$y_1(0); \quad y_2(0); \quad \ldots; \quad y_n(0)$$

der Koordinaten für die Zeit $t = t_0$ schreiben. Angenommen, es sei bereits gelungen, außer diesen Anfangswerten die Koordinaten $y_i(\nu)$ auch für k weitere Zeitpunkte $t_\nu = t_0 + \nu h$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ zu ermitteln, die in gleichen Abständen von der Länge h aufeinanderfolgen. Dann sind durch die Differentialgleichungen (XVII; 1) auch die f_i für die Zeitpunkte $t_0, t_1, \ldots, t_k$ bekannt. Die konstante Zeitdifferenz $h = t_\nu - t_{\nu-1}$ bezeichnen wir als *Tafelintervall, Integrationsintervall, Schritt-* oder *Maschenweite.* Die Aufgabe lautet dann, die Koordinaten

$$\text{(XVII; 2)} \qquad y_i(k+1) = y_i(k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_i(y_1, \ldots, y_n)\, dt$$

für den nächsten Schritt, d.h. für $t = t_0 + (k+1)\,h$, zu bestimmen.

Diese Aufgabe läßt sich, „vernünftiges" Verhalten der Funktionen an der betreffenden Stelle vorausgesetzt, durch rasch konvergierende Iterationsverfahren lösen, falls nur die Schrittweite h klein genug gewählt wird. Man kann etwa so vorgehen, daß man die letzten $p + 1$ schon bekannten Werte von y_i,

$$y_i(k-p);\ y_i(k-p+1);\ \ldots;\ y_i(k),$$

durch Interpolationsformeln (etwa durch Parabeln p-ter Ordnung) darstellt und mit Hilfe dieser Formeln die Funktionen y_i für das Intervall $[t_k \to t_{k+1}]$ extrapoliert. Man erhält dann nach Ausführung der Integration (XVII; 2) Näherungswerte der $y_i(k+1)$, die genauer sind als die direkt extrapolierten, und damit auch solche für die $f_i(k+1)$. Mit ihnen lassen sich nun die y_i und f_i auch im Intervall $[t_k \to t_{k+1}]$ interpolatorisch darstellen. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens erreicht man, daß die Ergebnisse der Iteration gegen Grenzwerte $y_i(k+1)$ streben, die man dann als endgültig ansehen darf.

Voraussetzung ist, daß für jede y-Folge ein „Anlaufsstück“ $y(0), y(1), \ldots, y(p)$ bekannt ist. Man gelangt zu diesen Ausgangspositionen auf verschiedene Weise, z.B. durch Berechnung von TAYLORschen Reihen

$$y(t) = y(0) + t\,\dot{y}(0) + \frac{1}{2} t^2 \ddot{y}(0) + \cdots + \frac{1}{\nu!} t^\nu y^{(\nu)}(0) + \cdots,$$

wobei die Koeffizienten $y^{(\nu)}(0)$ mit Hilfe der Bewegungsgleichungen und ihrer Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung sowie der gegebenen Anfangswerte ermittelt werden, oder es können hierbei Iterationsmethoden angewandt werden, über die im Abschnitt 151 noch einiges zu sagen sein wird. Ist aber das Anfangsstück der Integralkurven einmal in Gestalt äquidistanter Ordinatenfolgen bekannt, so beruht der Erfolg der weiteren Rechnung auf der Möglichkeit, den zeitlichen Verlauf dieser Funktionen durch Interpolation dieser Folgen mit der jeweils erforderlichen Genauigkeit darzustellen bzw. über den Rand des durch diese Folgen belegten Intervalls hinaus zu extrapolieren. Die Methoden der numerischen Interpolation von Wertefolgen stehen also im Mittelpunkt unserer Betrachtungen und sollen daher in den nächsten Abschnitten beschrieben werden.

143. *Interpolation von Funktionswerten mit gleichabständigen Argumenten. Differenzenschemata. Die NEWTONsche Interpolationsformel*

Begriff und Handhabung der Interpolation sind jedem wohlbekannt, der mit Tafeln von Logarithmen, trigonometrischen und anderen Funktionen zu tun hat. Diese Tafeln sind im allgemeinen so eingerichtet, daß der Abstand der Argumente sehr klein ist, so klein nämlich, daß die Differenzen zwischen aufeinanderfolgenden Funktionswerten sich von Schritt zu Schritt nur sehr langsam ändern. Es ist dann immer erlaubt, den Funktionsverlauf zwischen benachbarten Tafelwerten als linear anzunehmen, ohne damit einen mit der Stellengenauigkeit der Tafel unvereinbaren Fehler zu begehen.

Bei Funktionstafeln mit größerer Schrittweite, z.B. bei manchen astronomischen Ephemeriden oder bei den Störungstafeln, deren schrittweise Berechnung in der Praxis der speziellen Störungsrechnung angestrebt wird, ist lineare Interpolation nicht mehr statthaft, wenn eine merkliche Einbuße an Genauigkeit vermieden werden soll. Will man die im vorigen Abschnitt skizzierte Interpolations- und Extrapolationsmethode auf die numerische Integra-

tion von Differentialgleichungen anwenden, so liegt ein solcher Fall immer vor. Die Praxis erfordert nämlich ein Verfahren, das möglichst geringen Arbeitsaufwand mit möglichst hoher Genauigkeit vereinigt. Das hängt aber von verschiedenen Umständen ab, die einander entgegenwirken. Wählt man die Schrittweite h klein, so ist der Integrationsvorgang einfach, aber die Zahl der Schritte, die von einer Ausgangszeit t_0 zu einer Endzeit t führen, groß, und die bei jedem Schritt auftretenden unvermeidlichen Abrundungsfehler summieren sich rasch auf und beeinträchtigen die Genauigkeit bei der Überbrückung längerer Zeitintervalle erheblich. Andererseits ist bei größerer Schrittweite die Interpolations- und Integrationsarbeit größer und nimmt mit wachsendem h sehr rasch zu. Offenbar gibt es hier ein gewisses Optimum der Schrittweite, das von Fall zu Fall verschieden sein wird und um dessen Ermittlung der erfahrene Rechner vor Beginn der Integrationsarbeit sorgfältig bemüht sein wird. Die Frage der größtmöglichen Verkürzung des Arbeitsvorgangs, die bislang bei diesen Überlegungen eine besonders wichtige Rolle gespielt hat, ist allerdings heute, wo umfangreiche Rechnungen auch in der Astronomie immer mehr durch elektronische Rechenanlagen ausgeführt werden, in den Hintergrund getreten, da bei den schnellen Maschinen, die jetzt zur Verfügung stehen, der Zeitfaktor kaum noch ausschlaggebend ist.

Das Grundproblem der Interpolationsrechnung, die Bestimmung der zwischen gegebenen Ordinaten (Stützwerten) liegenden Funktionswerte bzw. die Rekonstruktion des gesamten Funktionsverlaufs aus vorgelegten diskreten Einzelwerten, ist natürlich nicht eindeutig lösbar, denn es gibt ja nicht nur *eine* Funktion, die für diskrete Argumente die vorgegebenen Stützwerte annimmt. Man kann, ohne diese Forderung zu verletzen, eine willkürliche Funktion hinzufügen, die für die Tafelargumente verschwindet. Insbesondere kann man, ohne die Stützwerte zu verändern, periodische Funktionen der Form

$$\text{(XVII; 3)} \quad \varphi(t) = a_1 \sin\alpha(t-t_0) + a_2 \sin 2\alpha(t-t_0) + a_3 \sin 3\alpha(t-t_0) + \cdots$$

mit beliebigen Koeffizienten a_i hinzufügen, wenn $\alpha = \pi/h$ ist; denn diese Funktionen verschwinden für die Zeiten

$$t = t_0 + n\,h,$$

also für die Abszissen aller Stützwerte. Andererseits folgt hieraus, daß man bei Funktionen, die kurzperiodische Terme enthalten (und das ist bei astronomischen Wertereihen sehr häufig der Fall), in der Wahl der Schrittweite vorsichtig verfahren muß, da sonst unter Umständen wichtige Bestandteile der Funktion durch die Stützwerte nicht erfaßt oder falsch interpretiert werden (s. auch Abschnitt 147).

Um die hierin begründete Willkür der Interpolation diskreter Stützwerte tunlichst einzuengen, müssen an die interpolierenden Funktionen gewisse scharfe Bedingungen gestellt werden, die wir zunächst anschaulich, wenn auch ungenau, so formulieren können: Die interpolierende Funktion soll die Stützwerte durch einen möglichst „glatt" verlaufenden Kurvenzug verbinden. Sie soll also stetig und sooft wie nötig differenzierbar sein, und ihre Ableitungen

sollen mit wachsender Ordnung rasch abnehmen und von einer gewissen Ordnung ab praktisch verschwinden.[1])

Die einfachsten analytischen Funktionen, die diese Bedingungen erfüllen und die sich durch beliebige Stützwerte leicht definieren lassen, sind die ganzen rationalen Funktionen. Sind $p + 1$ Ordinaten als Stützwerte vorgelegt, so läßt sich stets eine und nur eine ganze rationale Funktion p-ter Ordnung bestimmen, die an den vorgeschriebenen Stellen diese Werte annimmt, und ihre Ableitungen verschwinden von der $(p + 1)$-ten Ordnung an identisch. Ist andererseits die Funktion, die es zu interpolieren gilt, ihrer analytischen Form nach bekannt (oder ist diese durch Differentialgleichungen festgelegt), so kann man die Bedingungen, unter denen eine Interpolation der Stützwerte durch eine ganze rationale Funktion statthaft ist, durch folgende Überlegung festlegen:

Es sei h die konstante Schrittweite, a irgendein Argument und

$$\ldots; f(a - 2h); f(a - h); f(a); f(a + h); f(a + 2h); \ldots$$

eine Folge von gegebenen äquidistanten Funktionswerten. In einer gewissen Umgebung von a ist es dann immer möglich, die zu interpolierende Funktion, die in einem Bereich um a als stetig und beliebig oft differenzierbar angenommen werde, in eine TAYLORsche Reihe

$$\text{(XVII; 4)} \quad f(a + nh) = f(a) + nh f'(a) + \frac{1}{2!}(nh)^2 f''(a) + \frac{1}{3!}(nh)^3 f'''(a) + \cdots$$

zu entwickeln, wobei n irgendeine reelle Zahl sein soll und $f', f'', \ldots, f^{(r)}$ Ableitungen nach $t = a + nh$, genommen für $t = a$, bedeuten. Ist das Tafelintervall (die Schrittweite) h hinreichend klein, so wird die nach Potenzen von nh fortschreitende Reihe (XVII; 4) so rasch konvergieren, daß man sie im Rahmen der durch die Stellenzahl der Rechnung vorgeschriebenen Genauigkeit bei irgendeinem Glied, etwa dem der r-ten Ordnung, abbrechen kann. Die Bedingung dafür, daß dies statthaft ist, wird sein, daß die Summe der vernachlässigten Restglieder

$$\text{(XVII; 5)} \quad R_r(nh) = \frac{(nh)^{r+1}}{(r+1)!} f^{(r+1)}(a) + \frac{(nh)^{r+2}}{(r+2)!} f^{(r+2)}(a) + \cdots$$

im Anwendungsbereich der Formel dem Betrage nach eine halbe Einheit der letzten Rechenstelle nicht überschreiten darf. Es soll also, für $|n| \leqq N$,

$$|R_r(nh)| \leqq 5 \cdot 10^{-(\nu+1)}$$

sein, wenn ν die Stellenzahl der Tafel bedeutet. Dieser Rest läßt sich leicht in eine Form bringen, die für den Zweck der Abschätzung geeigneter ist. Da die

---

[1]) Diese Forderung steht in Einklang damit, daß die Funktion Bestandteile der Form (XVII; 3) nicht enthalten darf; denn die Ableitungen n-ter Ordnung von (XVII; 3) haben ja Amplituden, die proportional α^n sind, also bei kleinem h unter Umständen sehr rasch mit wachsender Ordnung zunehmen.

für das Argument a gültigen Werte der Ableitungen $f^{(i)}(a)$ als konstante Koeffizienten der Reihe (XVII; 5) anzusehen sind, kann man wegen

$$\frac{d^r R_r}{d(n h)^r} = n h f^{(r+1)}(a) + \frac{1}{2!}(n h)^2 f^{(r+2)}(a) + \cdots$$

R auch in Form des r-fachen Integrals

$$R = \int_0^{nh} \cdots \int_0^{nh} \left[x f^{(r+1)}(a) + \frac{1}{2!} x^2 f^{(r+2)}(a) + \cdots \right] (dx)^r =$$

$$= \int_0^{nh} \cdots \int_0^{nh} \frac{f^{(r)}(a+x) - f^{(r)}(a)}{x} x (dx)^r$$

schreiben. Nach den Mittelwertsätzen der Differential- und Integralrechnung ist dann

$$R_r = \frac{f^{(r)}(a+\xi) - f^{(r)}(a)}{\xi} \int_0^{nh} \cdots \int_0^{nh} x (dx)^r = f^{(r+1)}(a+\zeta) \frac{(n h)^{r+1}}{(r+1)!},$$

wobei die Größen ζ und ξ den Ungleichungen

$$0 \leqq \zeta \leqq \xi \leqq n h$$

genügen.

Hierbei ist nur die Voraussetzung gemacht worden, daß x im Integrationsbereich nicht negativ ist. Das bedeutet aber keine Einschränkung der Allgemeinheit; denn für positives n (Interpolation nach vorwärts) ist diese Voraussetzung eo ipso erfüllt, für negatives n (Interpolation nach rückwärts) brauchen wir nur anzunehmen, daß die Ordinatenfolge in umgekehrter Richtung durchlaufen wird; das negative Vorzeichen kann dann auf die ungeraden Ableitungen $f^{(2i+1)}(a)$ geworfen werden. Die Bedingung für die Anwendbarkeit der Interpolation durch eine ganze rationale Funktion r-ter Ordnung (deren Ableitungen von der Ordnung $r+1$ an identisch verschwinden) wird daher durch die Ungleichung

$$\text{(XVII; 6)} \qquad \left| f^{(r+1)}(a+\zeta) \frac{(n h)^{r+1}}{(r+1)!} \right| \leqq 5 \cdot 10^{-(\nu+1)}$$

dargestellt, die für alle n innerhalb des erforderlichen Bereichs erfüllt sein muß.

Angenommen, diese Restbedingung sei für $0 < n \leqq r$ erfüllt. Dann gelten mit hinreichender Genauigkeit die r Gleichungen

$$\text{(XVII; 7)} \quad f(a+n h) = f(a) + n h f'(a) + \frac{1}{2!}(n h)^2 f''(a) + \cdots + \frac{1}{r!}(n h)^r f^{(r)}(a),$$
$$(n = 1, 2, \ldots, r).$$

Aus diesem linearen System lassen sich die r Größen

$$h\,f'(a);\ \frac{h^2}{2!}f''(a);\ \frac{h^3}{3!}f'''(a);\ \ldots;\ \frac{h^r}{r!}f^{(r)}(a)$$

als Funktionen der $r + 1$ Stützwerte $f(a); f(a + h); \ldots; f(a + r\,h)$ berechnen, da die Determinante des Systems, die VANDERMONDEsche Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2 & 2^2 & \ldots & 2^r \\ 3 & 3^2 & \ldots & 3^r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r & r^2 & \ldots & r^r \end{vmatrix} = 1!\,2!\,3!\cdot\ldots\cdot r!$$

stets positiv ist.

Die explizite Auflösung des Gleichungssystems (XVII; 7) läßt sich umgehen, wenn man von den Methoden der Differenzenrechnung Gebrauch macht. In diesen Methoden wird das Schema der Differenzen verschieden hoher Ordnung benutzt, das man aus jeder beliebigen Folge gleichabständiger Funktionswerte konstruieren kann und dem ENCKE die folgende Form gegeben hat, die in der klassischen Astronomie allgemein verwendet worden ist:

Differenzenschema nach ENCKE

(XVII; 8)

Argument	Funktion	1. Differenz	2. Differenz	3. Differenz	4. Differenz
a	$f(a)$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		$f^{I}\left(a+\frac{1}{2}\right)$			
$a+h$	$f(a+1)$		$f^{II}(a+1)$		
		$f^{I}\left(a+\frac{3}{2}\right)$		$f^{III}\left(a+\frac{3}{2}\right)$	
$a+2h$	$f(a+2)$		$f^{II}(a+2)$		$f^{IV}(a+2)$
		$f^{I}\left(a+\frac{5}{2}\right)$		$f^{III}\left(a+\frac{5}{2}\right)$	
$a+3h$	$f(a+3)$		$f^{II}(a+3)$		$\vdots$
		$f^{I}\left(a+\frac{7}{2}\right)$		$\vdots$	
$a+4h$	$f(a+4)$		$\vdots$		$\vdots$

Heute werden in der Differenzen- und Interpolationsrechnung sowie in den Methoden der numerischen Integration meist andere Symbole verwendet, die gegenüber den ENCKEschen manche Vorteile besitzen und die daher im nächsten Abschnitt eingeführt werden und von da an fast ausschließlich benutzt werden sollen. Aber auch die ENCKEschen Symbole haben ihre unbestreitbaren Vorzüge: Sie sind einfach und einheitlich für alle Zwecke der Interpolation und der numerischen Differentiation und Integration verwendbar. In der Astronomie haben sie ein Jahrhundert lang dem auf logarithmische und Handrechnung angewiesenen Rechner unschätzbare Dienste geleistet, und der Astronom von heute sollte schon deshalb auch mit ihnen vertraut sein, weil in den Lehrbüchern, in denen die spezielle Störungsrechnung behandelt wird, die ENCKEschen Bezeichnungen bis in die jüngste Zeit hinein noch ausschließlich verwendet worden sind.

Das oben ausgeführte Schema läßt sich beliebig weit nach oben und unten fortsetzen, soweit Funktionswerte vorliegen. Der Kürze halber ist unter den Funktionszeichen die Schrittweite h fortgelassen bzw. symbolisch gleich 1 gesetzt worden. Für die Differenzen verschieden hoher Ordnung wurden die Zeichen $f^{\mathrm{I}}, f^{\mathrm{II}}, \ldots$ eingeführt, um Verwechslungen mit den Differentialquotienten $f', f'', f''', f^{(4)}, \ldots$ der Funktion vorzubeugen. Die Differenzen erster Ordnung sind durch

$$f^{\mathrm{I}}\left(a+i+\frac{1}{2}\right)=f(a+i+1)-f(a+i)$$

definiert; die Differenzen höherer Ordnung leitet man entsprechend aus denen der nächstniederen Ordnung ab. Die Argumente der Differenzen, die für ungerade Ordnungen gebrochene Zahlen enthalten, haben symbolische Bedeutung; sie dienen nur dazu, der betreffenden Größe den ihr zukommenden Platz in den Zeilen des Schemas zuzuweisen.

Es ist leicht einzusehen, daß man jeden beliebigen Funktionswert $f(a+i)$ der Tafel als lineare Funktion von $f(a)$ und den zwischen den Argumenten a und $a+i$ liegenden Differenzen bis zur Ordnung i auf mannigfache Weise darstellen kann. Will man z.B. $f(a+i)$ durch die im Schema (XVII; 8) unterstrichenen Differenzen ausdrücken, so findet man sukzessive:

$$\begin{aligned}
f(a+1) &= f(a)+f^{\mathrm{I}}\left(a+\frac{1}{2}\right),\\
f(a+2) &= f(a)+f^{\mathrm{I}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+f^{\mathrm{I}}\left(a+\frac{3}{2}\right)=\\
&= f(a)+f^{\mathrm{I}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\left[f^{\mathrm{I}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+f^{\mathrm{II}}(a+1)\right]=\\
&= f(a)+2f^{\mathrm{I}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+f^{\mathrm{II}}(a+1)
\end{aligned}$$

und ebenso

$$f(a+3)=f(a)+3f^{\mathrm{I}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+3f^{\mathrm{II}}(a+1)+f^{\mathrm{III}}\left(a+\frac{3}{2}\right).$$

Als allgemeines Gesetz deutet sich an

(XVII; 9)

$$f(a+i)=f(a)+\binom{i}{1}f^{\mathrm{I}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\binom{i}{2}f^{\mathrm{II}}(a+1)+\cdots+\binom{i}{i}f^{(i)}\left(a+\frac{i}{2}\right),$$

eine Formel, die sich durch vollständige Induktion leicht beweisen läßt. Wenn sie nämlich für $r=i$ gilt, so gilt dieselbe Formel auch für die Folge der ersten Differenzen. Es ist also auch

$$\begin{aligned}
f^{\mathrm{I}}\left(a+i+\frac{1}{2}\right)&=f^{\mathrm{I}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\binom{i}{1}f^{\mathrm{II}}(a+1)+\binom{i}{2}f^{\mathrm{III}}\left(a+\frac{3}{2}\right)+\cdots\\
&\quad+\binom{i}{i}f^{(i+1)}\left(a+\frac{i+1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$f(a + i + 1) = f(a + i) + f^{\mathrm{I}}\left(a + i + \frac{1}{2}\right),$$

also, nach Einsetzen obiger Entwicklungen,

$$f(a + i + 1) = f(a) + \left[\binom{i}{0} + \binom{i}{1}\right] f^{\mathrm{I}}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \left[\binom{i}{1} + \binom{i}{2}\right] f^{\mathrm{II}}(a + 1) + \cdots$$

$$+ \left[\binom{i}{i-1} + \binom{i}{i}\right] f^{(i)}\left(a + \frac{i}{2}\right) + \binom{i}{i} f^{(i+1)}\left(a + \frac{i+1}{2}\right).$$

Da aber bekanntlich

$$\binom{i}{k-1} + \binom{i}{k} = \binom{i+1}{k} \quad \text{und} \quad \binom{i}{i} = \binom{i+1}{i+1} = 1$$

ist, folgt

$$f(a + i + 1) = f(a) + \binom{i+1}{1} f^{\mathrm{I}}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \binom{i+1}{2} f^{\mathrm{II}}(a + 1) + \cdots$$

$$+ \binom{i+1}{i+1} f^{(i+1)}\left(a + \frac{i+1}{2}\right),$$

womit die Behauptung bewiesen ist, nachdem die Gültigkeit des Satzes oben bis zu $i = 2$ explizite gezeigt worden ist.

Aus (XVII; 9) leitet man leicht die *Newtonsche Interpolationsformel*

(XVII; 10)

$$f(a + n h) = f(a) + n f^{\mathrm{I}}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \frac{n(n-1)}{2!} f^{\mathrm{II}}(a + 1) +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} f^{\mathrm{III}}\left(a + \frac{3}{2}\right) + \cdots$$

$$+ \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{r!} f^{(r)}\left(a + \frac{r}{2}\right) + \cdots$$

ab, die für irgendein reelles n gilt und für ganzzahliges $n = r$ in (XVII; 9) übergeht. Angenommen nämlich, die Gleichungen (XVII; 7) gelten, d.h. die Folge $f(a), f(a+1), f(a+2), \ldots, f(a+r)$ läßt sich mit genügender Annäherung durch eine Parabel r-ter Ordnung interpolieren, so liefern die Gleichungen (XVII; 7) die r Ableitungen $f'(a), f''(a), \ldots, f^{(r)}(a)$ eindeutig als lineare Funktionen der $r + 1$ Stützwerte $f(a), \ldots, f(a + r)$ und damit, wie gezeigt wurde, auch von $f(a), f^{\mathrm{I}}(a + 1/2), f^{\mathrm{II}}(a + 1), \ldots, f^{(r)}(a + r/2)$. Setzt man die so erhaltenen Werte in (XVII; 7) ein, so erkennt man, daß die interpolierende Funktion $f(a + n h)$ eine lineare Funktion r-ter Ordnung der im Schema (XVII; 8) unterstrichenen Folge der Differenzen ist, die mit $f^{(r)}(a + r/2)$ abbricht, da bei einer ganzen rationalen Funktion die r-ten Differenzen konstant sind und alle höheren Differenzen verschwinden. Da aber unter dieser Annahme (XVII; 10) eine ganze rationale Funktion r-ter Ordnung der Variablen n wird, die – wie soeben bewiesen – die zu interpolierende Wertefolge

genau darstellt, und da es nur eine einzige solche Funktion geben kann, muß diese mit (XVII; 10) identisch sein.

Ein anderer Beweis der NEWTONschen Interpolationsformel folgt aus der Tatsache, daß die Entwicklung (XVII; 10) für beliebige Funktionen gültig sein muß, die den obengenannten allgemeinen Bedingungen genügen. Man gelangt daher zu dem Koeffizientengesetz der Reihe (XVII; 10) auch, wenn man von irgendeiner speziellen Funktion ausgeht, die beliebig oft differenzierbar ist und deren Differenzenschema sich leicht in analytischer Form darstellen läßt. Man wähle z.B. $f(x) = e^x$. Dann lautet das ENCKEsche Schema

Argument	Funktion	1. Differenz	2. Differenz	3. Differenz	4. Differenz
a	$\underline{e^a}$	·	·	·	·
		$\underline{e^a(e^h-1)}$	·	·	·
$a+h$	e^{a+h}		$\underline{e^a(e^h-1)^2}$	·	·
		$e^{a+h}(e^h-1)$		$\underline{e^a(e^h-1)^3}$	
$a+2h$	e^{a+2h}		$e^{a+h}(e^h-1)^2$		$\underline{e^a(e^h-1)^4}$
		$e^{a+2h}(e^h-1)$		$e^{a+h}(e^h-1)^3$	
$a+3h$	e^{a+3h}		$e^{a+2h}(e^h-1)^2$	·	·
		$e^{a+3h}(e^h-1)$	·	·	·
$a+4h$	e^{a+4h}	·	·	·	·

Die Entwicklung der Zwischenwerte dieser Funktion nach der absteigenden Folge der unterstrichenen Differenzen hätte dann die Form

$$f(a+nh) = e^{a+nh} =$$
$$= e^a + \beta_1 e^a(e^h-1) + \beta_2 e^a(e^h-1)^2 + \beta_3 e^a(e^h-1)^3 + \cdots,$$

wo $\beta_1, \beta_2, \ldots$ die zu bestimmenden, von n abhängigen Koeffizienten wären. Es wäre also

$$\text{(XVII; 11)} \quad e^{nh} = 1 + \beta_1(e^h-1) + \beta_2(e^h-1)^2 + \beta_3(e^h-1)^3 + \cdots,$$

und da diese Gleichung für beliebige, genügend kleine h gilt, bleibt auch ihre Ableitung nach h identisch erfüllt. Es gilt also gleichfalls

$$n\,e^{nh} = \beta_1 e^h + 2\beta_2 e^h(e^h-1) + 3\beta_3 e^h(e^h-1)^2 + 4\beta_4 e^h(e^h-1)^3 + \cdots$$

oder, wenn man $e^h = (e^h-1)+1$ einführt und nach Potenzen von e^h-1 ordnet,

$$\text{(XVII; 12)} \quad n\,e^{nh} = \beta_1 + (\beta_1+2\beta_2)(e^h-1) + (2\beta_2+3\beta_3)(e^h-1)^2 +$$
$$+ (3\beta_3+4\beta_4)(e^h-1)^3 + \cdots.$$

Multipliziert man (XVII; 11) mit n und vergleicht die Koeffizienten gleicher Potenzen von e^h-1 mit denen von (XVII; 12), so findet man

$$\beta_1 = n; \quad \beta_1 + 2\beta_2 = n\beta_1; \quad 2\beta_2 + 3\beta_3 = n\beta_2; \quad 3\beta_3 + 4\beta_4 = n\beta_3; \quad \ldots$$

oder

$$\beta_1 = n; \quad \beta_2 = \frac{n-1}{2}\beta_1; \quad \beta_3 = \frac{n-2}{3}\beta_2; \quad \ldots; \quad \beta_{r+1} = \frac{n-r}{r+1}\beta_r; \quad \ldots,$$

also

$$\beta_1 = n; \quad \beta_2 = \frac{n(n-1)}{2!}; \quad \beta_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}; \quad \ldots;$$

$$\beta_r = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}{r!}; \quad \ldots$$

und damit die Koeffizienten der Formel (XVII; 10).

Die NEWTONsche Interpolationsformel (XVII; 10) ist brauchbar, wenn die äquidistanten Stützwerte für eine genügende Anzahl von Argumenten bekannt sind, die auf das Ausgangsargument a *folgen*, d.h., wenn die Differenzen des ENCKEschen Schemas in schräg *absteigender* Folge bekannt sind. Das ist immer der Fall, wenn es sich darum handelt, eine bereits vorliegende Tafel von Funktionswerten (Ephemeride) zu interpolieren. Mindestens ebenso wichtig ist aber der Fall, daß Stützwerte nur bis zum Argument a bekannt sind und daß die durch sie gegebene Funktion über a hinaus extrapoliert werden soll, etwa für ein Argument $a + n\,h$, das im Intervall $[a, a + h]$ liegt. Man wird dann die von $f(a)$ ausstrahlenden Differenzen $f^{\mathrm{I}}(a - {}^1/_2)$; $f^{\mathrm{II}}(a - 1)$; $f^{\mathrm{III}}(a - {}^3/_2)$; ... benutzen müssen, die im Schema schräg *aufwärts* führen. Die (XVII; 10) entsprechende NEWTONsche Interpolationsformel erhält man dann, indem man h mit $-h$ und n mit $-n$ vertauscht. Es wird dann

$$\text{(XVII; 13)} \quad f(a + n\,h) = f(a) + n\,f^{\mathrm{I}}\left(a - \frac{1}{2}\right) + \frac{n(n+1)}{2!} f^{\mathrm{II}}(a-1) + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} f^{\mathrm{III}}\left(a - \frac{3}{2}\right) + \cdots.$$

Mit Hilfe dieser Reihe erhält man durch Extrapolation den auf $f(a)$ folgenden Tafelwert für $n = 1$, nämlich

(XVII; 13a)

$$f(a + h) = f(a) + f^{\mathrm{I}}\left(a - \frac{1}{2}\right) + f^{\mathrm{II}}(a-1) + f^{\mathrm{III}}\left(a - \frac{3}{2}\right) + \cdots.$$

Diese Reihe konvergiert, wenn überhaupt, meist langsam[1]) und wird mit Erfolg nur angewandt werden können, wenn h genügend klein ist und die Differenzen mit wachsender Ordnung rasch gegen Null abnehmen. Sie ist dagegen streng erfüllt, wenn die zu extrapolierende Funktion selbst ganz und rational ist, wie man leicht an dem Beispiel $f(x) = x^2$ zeigen kann, dessen Differenzenschema für $h = 1$

$f(1) = 1$			
	3		
$f(2) = 4$		2	
	5		$\underline{0}$
$f(3) = 9$		$\underline{2}$	
	$\underline{7}$		
$f(4) = \underline{16}$			

[1]) Die Frage nach der Konvergenz von Interpolationsformeln wird in Abschnitt 147 angeschnitten.

lautet. Benutzt man die unterstrichenen Zahlen, so ergibt (XVII; 13a), da alle Differenzen von der dritten Ordnung an verschwinden, streng den folgenden Funktionswert:

$$f(5) = 16 + 7 + 2 = 25.$$

144. *Einführung neuer Symbole. Neuer Beweis der Newtonschen Interpolationsformeln*

Die neuen Symbole, die – wie im vorigen Abschnitt auseinandergesetzt – die im Enckeschen Differenzenschema verwendeten allmählich verdrängen, haben den großen Vorteil, daß sie als „lineare Operatoren" auf die in der Differenzenrechnung zu interpolierenden oder zu integrierenden Funktionen angewandt werden können. Dadurch lassen sich alle Rechenvorschriften, die in der klassischen Darstellung zwar auf sehr elementare, aber oft recht umständliche Weise erhalten werden, überaus kurz und elegant gewinnen, wie hier zunächst an den im vorigen Abschnitt erzielten Ergebnissen gezeigt werden soll.

Gesetzt, es sei eine gleichabständige Folge von Ordinaten einer Funktion $f(x)$, mit der Schrittweite h,

$$f(a + r\,h), \quad r = \ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots$$

gegeben. Dann definieren wir den *Verschiebungsoperator* τ durch

$$\tau\, f(x) = f(x + h),$$

d.h., der Operator τ, angewandt auf die Ordinate $f(x)$, bewirkt eine Verschiebung des Arguments um die Schrittweite h, die bei allen folgenden Überlegungen ein für allemal gegeben sein soll. Erneute Anwendung des Operators ergibt

$$\tau\, f(x + h) = \tau\,\tau\, f(x) = \tau^2 f(x) = f(x + 2h).$$

Allgemein setzt man

$$\tau^n f(x) = f(x + n\,h),$$

wobei τ^n symbolisch die n-malige Anwendung des Operators bezeichnet, die eine n-fache Verschiebung um je eine Schrittweite in der Richtung wachsender Abszissen bedeutet. Entsprechend kann man eine Verschiebung nach rückwärts um n Schrittweiten durch das Symbol

$$\tau^{-n} f(x) = f(x - n\,h)$$

bezeichnen, eine Gleichung, die identisch mit

$$\tau^n f(x - n\,h) = f(x)$$

ist. Damit ist die symbolische Gleichung

$$\tau^{-n} = \frac{1}{\tau^n}$$

gerechtfertigt. Schließlich darf man auch setzen

$$\tau^0 f(x) = f(x),$$

wenn $\tau^0 = 1$ der *Identitätsoperator* ist, der die Funktion in sich selbst überführt. Man kann also mit den Verschiebungsoperatoren wie mit Potenzen rechnen, und es steht nichts im Wege, auch ganz allgemein τ^s, wo s eine beliebige reelle (positive oder negative) Zahl einschließlich der Null ist, so zu definieren, daß

$$\tau^s f(x) = f(x + s\,h)$$

ist. Für mehrfache hintereinander ausgeführte Verschiebungen gilt das kommutative Gesetz

$$\tau^s \tau^q = \tau^{s+q} = \tau^q \tau^s,$$

und alle diese Regeln gelten auch für Operatoren, die sich linear aus Verschiebungsoperatoren, d.h. also aus Potenzen von τ, zusammensetzen.

Wir wenden nun die Verschiebungsoperatoren auf die Bildung der Differenzen verschiedener Ordnung einer Funktionstafel mit der Schrittweite h an. Dann ist

$$f(a+h) - f(a) = (\tau - 1)\,f(a) = \Delta f(a) \equiv f^{\mathrm{I}}\left(a + \frac{1}{2}\right),$$

und wir bezeichnen $\Delta = \tau - 1$ als *Differenzoperator*. Wendet man ihn erneut an, so erhält man

$$\Delta\Delta f(a) = \Delta^2 f(a) \equiv f^{\mathrm{II}}(a + 1)$$

und allgemein

$$\Delta^n f(a) \equiv f^{(n)}\left(a + \frac{n}{2}\right),$$

so daß also $\Delta f(a)$; $\Delta^2 f(a)$; $\Delta^3 f(a)$; ... die von $f(a)$ schräg abwärts ausstrahlenden Differenzen des ENCKEschen Schemas darstellen, die in (XVII; 8) durch Unterstreichen gekennzeichnet sind.

Aus

$$f(a + r\,h) = \tau^r f(a) = (1 + \Delta)^r f(a)$$

findet man die Formel (XVII; 9),

$$f(a + r\,h) = \left[1 + \binom{r}{1}\Delta + \binom{r}{2}\Delta^2 + \cdots + \binom{r}{r}\Delta^r\right] f(a) =$$

$$= f(a) + \binom{r}{1}\Delta f(a) + \binom{r}{2}\Delta^2 f(a) + \cdots + \binom{r}{r}\Delta^r f(a),$$

ohne Rechnung wieder.

Mittels der Operatoren Δ nimmt das ENCKEsche Schema die Gestalt[1])

(XVII; 14)

$f(a)$	·	·	·	·
	$\Delta f(a)$		·	·
$f(a+h)$		$\Delta^2 f(a)$		·
	$\Delta f(a+h)$		$\Delta^3 f(a)$	
$f(a+2h)$		$\Delta^2 f(a+h)$		$\Delta^4 f(a)$
	$\Delta f(a+2h)$		$\Delta^3 f(a+h)$	
$f(a+3h)$		$\Delta^2 f(a+2h)$		·
	$\Delta f(a+3h)$		·	·
$f(a+4h)$	·	·	·	·

an. Andererseits kann man schreiben

$$f(a) - f(a-h) = \Delta f(a-h) = (\tau - 1) f(a-h) = (\tau - 1)\tau^{-1} f(a) = \nabla f(a),$$

wenn man als neuen Operator $\Delta\tau^{-1} = (\tau - 1)\tau^{-1} = 1 - \tau^{-1} = \nabla$ (sprich „Nabla") einführt. Es ist daher

$$\Delta = \nabla\tau; \quad \Delta^2 = \nabla^2\tau^2; \quad \Delta^3 = \nabla^3\tau^3; \quad \ldots$$

und somit

$$\Delta f(a+3h) = \nabla\tau f(a+3h) = \nabla f(a+4h),$$
$$\Delta^2 f(a+2h) = \nabla^2\tau^2 f(a+2h) = \nabla^2 f(a+4h) \quad \text{usw.},$$

so daß die in (XVII; 14) doppelt unterstrichenen Größen, die von $f(a+4h)$ in aufsteigender Folge ausstrahlen,

$$f(a+4h); \quad \nabla f(a+4h); \quad \nabla^2 f(a+4h); \ldots$$

lauten. Benutzt man also für die Differenzen die Operatoren ∇, so haben alle Differenzen in *aufsteigender* Folge das gleiche Argument wie die Funktionswerte, von denen sie ausgehen. Benutzt man die Operatoren Δ, gilt dasselbe für die Differenzen in *absteigender* Folge, wie in (XVII; 14) die einfach unterstrichenen Größen zeigen. Das hat gewisse Vorteile. Führt man z.B. in der NEWTONschen Interpolationsformel (XVII; 10) die Symbole Δ ein, so erhalten alle Terme das gleiche Argument. Dasselbe gilt für (XVII; 13), wenn man die Symbole ∇ verwendet. Die letzteren erweisen sich als besonders nützlich, wenn eine Folge von Ordinaten einer Funktion nur bis zu einem gewissen Argument a bekannt geworden ist und die Aufgabe besteht, durch numerische Integration der Differentialgleichungen die folgenden Ordinaten $f(a+h), f(a+2h), \ldots$ sukzessive zu berechnen. Dann bezeichnen aber die Differenzen $f(a)$; $\nabla f(a)$; $\nabla^2 f(a)$; ..., die alle das Argument a haben, in jeder Differenzenspalte die letzte bekannte Größe. Es ist außerdem immer

$$\nabla^n f(a) = \Delta^n\tau^{-n} f(a) = \Delta^n f(a - n h).$$

---

[1]) Abgekürzt schreibt man häufig auch

$$\Delta^n f_{a+r} \quad \text{statt} \quad \Delta^n f(a + r h) \quad \text{oder} \quad \Delta^n f(a + r).$$

Sind also von der Funktionsfolge nur $n+1$ aufeinanderfolgende Werte, etwa die von $f(a-nh)$ bis $f(a)$, bekannt, so reicht die Spitze des Differenzenschemas bis zu den Differenzen n-ter Ordnung, von denen dann nur eine, nämlich $\nabla^n f(a)$, bekannt ist.

Auch die Extrapolationsformel (XVII; 13a) läßt sich mit einem Federstrich beweisen. Es ist nämlich

$$\nabla f[a+(r+1)h] = f[a+(r+1)h] - f(a+rh),$$

also

$$(1-\nabla)f[a+(r+1)h] = f(a+rh)$$

oder

$$f[a+(r+1)h] = \frac{f(a+rh)}{1-\nabla} = (1+\nabla+\nabla^2+\nabla^3+\cdots)f(a+rh).$$

Für die NEWTONschen Interpolationsformeln (XVII; 10) und (XVII; 13) ergibt sich folgender kurze und elegante Beweis: Ist s eine beliebige reelle Zahl, so ist

$$f(a+sh) = \tau^s f(a) = (1+\Delta)^s f(a) = \\ = \left[1+\binom{s}{1}\Delta+\binom{s}{2}\Delta^2+\cdots\right]f(a),$$

wenn mit $\binom{s}{r}$ in üblicher Weise die Koeffizienten $\frac{s(s-1)\cdot\ldots\cdot(s-r+1)}{r!}$ der binomischen Reihe bezeichnet werden. Diese Formel stimmt mit (XVII; 10) überein, deren Glieder nach absteigenden Differenzen fortschreiten. Andererseits ist

$$\tau^{-s}f(a+sh) = f(a),$$

also, da $\tau^{-1} = 1-\nabla$ ist,

$$\text{(XVII; 15)}\quad f(a+sh) = (1-\nabla)^{-s}f(a) = \\ = \left[1-\binom{-s}{1}\nabla+\binom{-s}{2}\nabla^2-\binom{-s}{3}\nabla^3+\cdots\right]f(a) = \\ = \left[1+s\nabla+\frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2+\frac{s(s+1)(s+2)}{3!}\nabla^3+\cdots\right]f(a),$$

identisch mit (XVII; 13).

Es muß noch bemerkt werden, daß über Konvergenz oder Nichtkonvergenz der Interpolationsformeln keine Aussagen gemacht worden sind. Da Δ und ∇ keine Zahlen, sondern Symbole sind, die nur im Zusammenhang mit der Funktion $f(x)$ Sinn erlangen, haben auch die binomischen Entwicklungen $(1+\Delta)^s$ und $(1-\nabla)^{-s}$ hier nur formale Bedeutung. Die für Zahlen gültigen Konvergenzbedingungen $|x|<1$ für $(1\pm x)^s$ lassen sich hier also zur Entscheidung der Konvergenz nicht anwenden.

145. *Interpolation nach zentralen Differenzen. Die* STIRLING*sche Interpolationsformel*

Wir haben gesehen, daß die Interpolation einer durch $r + 1$ Stützwerte gegebenen Funktion dadurch erzielt wird, daß man eine ganze rationale Funktion r-ten Grades ermittelt, die für die Argumente der Stützwerte mit der gegebenen Funktion übereinstimmt. Außerhalb des von den Stützwerten belegten Intervalls ist das im allgemeinen nirgends mehr der Fall. Nur wenn die zu interpolierende Funktion selbst eine Parabel r-ter Ordnung ist, sind beide Funktionen für alle Argumente identisch, andernfalls ist der „Rest" von Null verschieden, abgesehen von isolierten Nullstellen, von denen $r + 1$ auf die Argumente der Stützwerte fallen. Außerhalb des Bereichs der Stützwerte wird die Restfunktion gegen $\pm\infty$ streben; sie wird sich also wie eine Parabel $(r + 1)$-ter (oder höherer) Ordnung verhalten, die mindestens $r + 1$ reelle

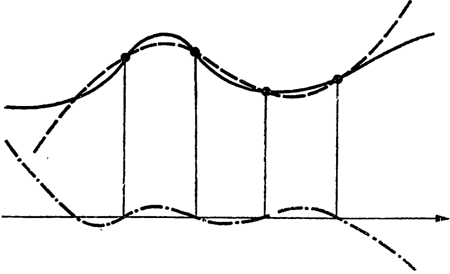


Abb. 30. Interpolation einer durch vier Stützwerte gegebenen Funktion (———) durch eine ganz rationale Funktion dritten Grades (– – –) nebst Restfunktion (–·–·–)

Nullstellen hat. Die Ordinatenbeträge der Restfunktion zwischen den (äquidistanten) Stützpunkten sind beschränkt; die Maximalwerte, die sie dort erreichen können, wachsen aber im allgemeinen von der Mitte des belegten Bereichs an nach den Rändern zu, wie die Abschätzung (XVII; 6) unmittelbar und Abb. 30 an einem einfachen Beispiel erkennen läßt. Außerhalb der Stützwerte wächst die Restfunktion mehr oder weniger rasch über alle Grenzen.

Aus diesen Überlegungen, die hier nur heuristisch angestellt werden sollen, kann man schließen, daß die Interpolation einer durch Stützwerte gegebenen Funktion am sichersten ist, wenn das Ausgangsargument a in der Mitte des von den Stützwerten eingenommenen Bereichs liegt. Am ungünstigsten ist es, von den Rändern dieses Bereichs aus zu interpolieren oder gar zu extrapolieren.

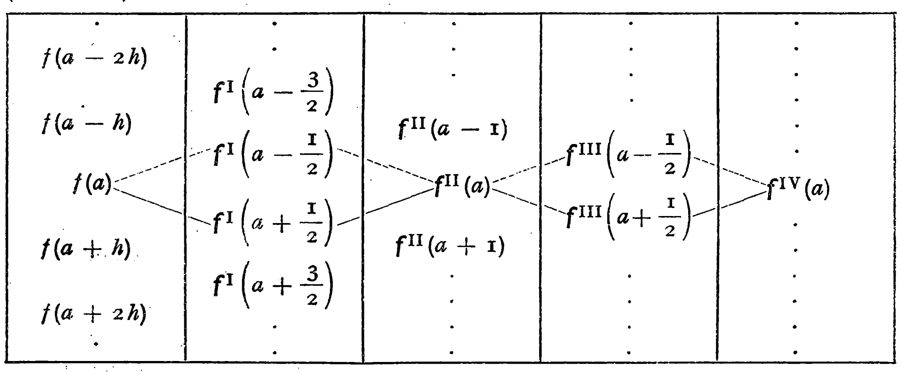
Interpolationsformeln, die von der Mitte eines durch bekannte Ordinaten eingenommenen Bereichs ausgehen und daher größtmögliche Genauigkeit versprechen, sind schon frühzeitig, so von GAUSS, LAPLACE und BESSEL, entwickelt worden. Sie lassen sich alle auf eine Formel zurückführen, die als *STIRLINGsche Interpolationsformel* bekannt ist.

Gesetzt, es sei beiderseits des Argumentes a eine Folge von $2n + 1$ äquidistanten Stützwerten

$$f(a \pm r h), \quad r \leqq n$$

gegeben. Dann kann man das ENCKEsche Differenzenschema

(XVII; 16)



aufschreiben, und die bekannten, d.h. durch die gegebenen Ordinaten bestimmbaren, Differenzen liegen in einem dreieckigen Bereich, dessen Spitze bis $f^{(2n)}(a)$ reicht. Es wird dann vorteilhaft sein, die in der Horizontale des Arguments a liegenden geraden und die dieser Horizontalen benachbarten ungeraden Differenzen zur Interpolation in der Nachbarschaft von $f(a)$ zu benutzen. GAUSS hat Interpolationsformeln der Form

(XVII; 17)

$$f(a + s h) = f(a) + \beta_1 f^{\mathrm{I}}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \beta_2 f^{\mathrm{II}}(a) + \beta_3 f^{\mathrm{III}}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \cdots$$

oder

$$f(a + s h) = f(a) + \gamma_1 f^{\mathrm{I}}\left(a - \frac{1}{2}\right) + \gamma_2 f^{\mathrm{II}}(a) + \gamma_3 f^{\mathrm{III}}\left(a - \frac{1}{2}\right) + \cdots$$

entwickelt, die nach denjenigen Differenzen fortschreiten, die im Schema (XVII; 16) auf dem ausgezogenen bzw. gestrichelt gezeichneten Linienzug liegen. Bildet man aus den beiden Formeln (XVII; 17) das arithmetische Mittel, so erhält man die STIRLINGsche Formel

(XVII; 18) $$f(a + s h) = f(a) + \alpha_1 f^{\mathrm{I}}(a) + \alpha_2 f^{\mathrm{II}}(a) + \alpha_3 f^{\mathrm{III}}(a) + \cdots,$$

in der

$$f^{\mathrm{I}}(a) = \frac{1}{2}\left[f^{\mathrm{I}}\left(a + \frac{1}{2}\right) + f^{\mathrm{I}}\left(a - \frac{1}{2}\right)\right],$$

$$f^{\mathrm{III}}(a) = \frac{1}{2}\left[f^{\mathrm{III}}\left(a + \frac{1}{2}\right) + f^{\mathrm{III}}\left(a - \frac{1}{2}\right)\right] \quad \text{usw.}$$

gesetzt worden ist; denn es wird weiter unten bewiesen werden, daß zwischen den α, β, γ die Beziehungen

$$\alpha_{2i-1} = \beta_{2i-1} = \gamma_{2i-1}; \quad \alpha_{2i} = \frac{1}{2}(\beta_{2i} + \gamma_{2i})$$

bestehen.

Führt man die Operatoren Δ bzw. ∇ ein, so schreiten die GAUSSschen Entwicklungen nach

(XVII; 19a) $$f(a) \;\; \Delta f(a-1) \;\; \Delta f(a) \;\; \Delta^2 f(a-1) \;\; \Delta^3 f(a-2) \;\; \Delta^3 f(a-1) \;\; \Delta^4 f(a-2)$$

bzw.

(XVII; 19b) $$f(a) \;\; \nabla f(a) \;\; \nabla f(a+1) \;\; \nabla^2 f(a+1) \;\; \nabla^3 f(a+1) \;\; \nabla^3 f(a+2) \;\; \nabla^4 f(a+2)$$

fort, wobei man wieder wahlweise den ausgezogenen bzw. den gestrichelten Linienzug benutzen kann. Diese Folgen von Symbolen haben aber den Nachteil, daß die Argumente nach je zwei Schritten um eine Einheit (eine Schrittweite) zu- oder abnehmen. Bei dieser Methode der Entwicklung nach „zentralen Differenzen" verdienen also die Symbole des ENCKEschen Schemas den Vorzug. Man kann aber auch die Symbole der Operatorenrechnung so kombinieren, daß alle Operatoren auf die Ausgangsordinate $f(a)$ angewandt werden. Es genügt hier, die erste GAUSSsche Formel abzuleiten und die nach Potenzen von Δ und längs der ausgezogenen Linie fortschreitende Operatorenfolge in (XVII; 19a) zu verwenden; alle übrigen Formeln lassen sich aus dieser leicht gewinnen.

Wir erinnern uns: Durch Anwendung des Operators Δ erhält man, ohne Änderung des Arguments, aus irgendeiner Differenz des Schemas die schräg abwärts liegende Differenz der nächsthöheren Ordnung, während der Operator ∇ auf die schräg aufwärts liegende Differenz führt. Es ist demnach

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(a-1) &= \nabla\Delta f(a), \\ \Delta^3 f(a-1) &= \Delta\nabla\Delta f(a), \\ \Delta^4 f(a-2) &= \nabla\Delta^3 f(a-1) = \nabla\Delta\nabla\Delta f(a) \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Man erhält daher die in (XVII; 19a) durch einen ausgezogenen Linienzug verbundenen Differenzen, indem man die Operatorenfolge

(XVII; 20) $$\Delta;\ \Delta\nabla;\ \Delta\nabla\Delta;\ \Delta\nabla\Delta\nabla;\ \Delta\nabla\Delta\nabla\Delta;\ \ldots,$$

die durch sukzessive Angliederung von abwechselnd ∇ und Δ an das Ausgangsglied Δ entsteht, auf den Stützwert $f(a)$ anwendet. Man kann diese Folge, wenn man mit

$$\delta = \Delta\nabla = \nabla\Delta$$

einen neuen Operator bezeichnet, auch in der Form

(XVII; 21) $$\Delta;\ \delta;\ \Delta\delta;\ \delta^2;\ \Delta\delta^2;\ \delta^3;\ \Delta\delta^3;\ \ldots$$

schreiben. Ohne besondere Schwierigkeit läßt sich dann das Koeffizientengesetz der GAUSSschen Interpolationsformeln herleiten. Ist wieder s eine reelle

Zahl, für die man für Zwecke der Interpolation die Einschränkung $|s| < 1$ oder auch $|s| \leqq 1/2$ gelten lassen darf, so gilt wieder

$$\text{(XVII; 22)} \qquad f(a + s\,h) = \tau^s f(a) = (1 + \Delta)^s f(a) = \\ = \left[1 + \binom{s}{1}\Delta + \binom{s}{2}\Delta^2 + \cdots\right] f(a),$$

und man hat nur noch die Potenzen von Δ als lineare Funktionen der Operatoren (XVII; 21) auszudrücken.

Aus

$$\tau = 1 + \Delta; \quad \tau^{-1} = 1 - \nabla$$

erhält man durch (symbolische) Multiplikation

$$\tau\,\tau^{-1} = 1 = (1 + \Delta)(1 - \nabla),$$

also

$$\Delta = \nabla(1 + \Delta) = \nabla + \delta.$$

Verwendet man diese Beziehung, so folgt

$$\Delta^2 = \Delta(\nabla + \delta) = \delta + \Delta\,\delta,$$
$$\Delta^3 = \Delta^2\nabla(1 + \Delta) = \Delta^2\nabla(1 + \nabla + \delta) = \Delta\,\delta + \delta^2 + \Delta\,\delta^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Bezeichnet man die Operatoren der Folge (XVII; 21) abgekürzt mit

$$\delta_1 = \Delta; \quad \delta_2 = \delta; \quad \delta_3 = \Delta\,\delta; \quad \delta_4 = \delta^2; \quad \ldots,$$

so findet man nach einfacher Rechnung

$$\text{(XVII; 23)} \left\{ \begin{aligned} \Delta &= \delta_1, \\ \Delta^2 &= \delta_2 + \delta_3, \\ \Delta^3 &= \delta_3 + \delta_4 + \delta_5, \\ \Delta^4 &= \delta_4 + 2\delta_5 + \delta_6 + \delta_7, \\ \Delta^5 &= \delta_5 + 2\delta_6 + 3\delta_7 + \delta_8 + \delta_9, \\ \Delta^6 &= \delta_6 + 3\delta_7 + 3\delta_8 + 4\delta_9 + \delta_{10} + \delta_{11}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \right.$$

Das Gesetz, nach dem diese Formeln fortschreiten, ist nun deutlich erkennbar: Es treten bei jedem folgenden Δ^n zwei neue Operatoren $\delta_{2n-2} + \delta_{2n-1}$ hinzu; die übrigen $(\delta_n, \delta_{n+1}, \ldots, \delta_{2n-3})$ erhalten gewisse Faktoren, und zwar erscheinen die in diesem Schema untereinanderstehenden Operatoren mit gleichem Index sukzessive mit den Binomialkoeffizienten verschiedener Ordnung multipliziert. Im einzelnen sind multipliziert

δ_1, δ_2 mit den Binomialkoeffizienten der Ordnung 0,

δ_3, δ_4 mit den Binomialkoeffizienten der Ordnung 1,

δ_5, δ_6 mit den Binomialkoeffizienten der Ordnung 2,

δ_7, δ_8 mit den Binomialkoeffizienten der Ordnung 3 usw.

Multipliziert man in (XVII; 22) die Δ^n mit $\binom{s}{n}$ und entwickelt nach (XVII; 23), so ergibt sich, geordnet nach fortschreitenden δ_n,

$$f(a+s\,h) = \left[1 + \binom{s}{1}\delta_1 + \binom{s}{2}\delta_2 + \left\{\binom{s}{2} + \binom{s}{3}\right\}\delta_3 + \left\{\binom{s}{3} + \binom{s}{4}\right\}\delta_4 + \right.$$
$$+ \left\{\binom{s}{3} + 2\binom{s}{4} + \binom{s}{5}\right\}\delta_5 + \left\{\binom{s}{4} + 2\binom{s}{5} + \binom{s}{6}\right\}\delta_6 +$$
$$\left. + \left\{\binom{s}{4} + 3\binom{s}{5} + 3\binom{s}{6} + \binom{s}{7}\right\}\delta_7 + \cdots\right] f(a).$$

Hieraus erhält man wegen

$$\binom{s}{r} + \binom{s}{r+1} = \binom{s+1}{r+1},$$
$$\binom{s}{r} + 2\binom{s}{r+1} + \binom{s}{r+2} = \binom{s+2}{r+2},$$
$$\binom{s}{r} + 3\binom{s}{r+1} + 3\binom{s}{r+2} + \binom{s}{r+3} = \binom{s+3}{r+3} \quad \text{usw.}$$

die erste GAUSSsche Interpolationsformel in der Gestalt

$$\text{(XVII; 24)} \quad f(a+s\,h) = \left[1 + \binom{s}{1}\delta_1 + \binom{s}{2}\delta_2 + \binom{s+1}{3}\delta_3 + \binom{s+1}{4}\delta_4 + \right.$$
$$\left. + \binom{s+2}{5}\delta_5 + \binom{s+2}{6}\delta_6 + \binom{s+3}{7}\delta_7 + \cdots\right] f(a),$$

in der, wenn wir die ENCKEschen Symbole wieder einführen,

$$\delta_{2n-1} f(a) = f^{(2n-1)}\left(a + \frac{1}{2}\right); \quad \delta_{2n} f(a) = f^{(2n)}(a)$$

zu setzen ist. Um hieraus die zweite GAUSSsche Formel (XVII; 17) abzuleiten, hat man statt der Operatoren δ_n die auf dem gestrichelten Linienzug in (XVII; 19b) liegenden Operatoren

$$\varepsilon_1 = \tau^{-1}\delta_1; \quad \varepsilon_2 = \delta_2; \quad \varepsilon_3 = \tau^{-1}\delta_3; \quad \varepsilon_4 = \delta_4; \quad \ldots$$

einzuführen, also

$$\delta_{2n-1} = \tau\,\varepsilon_{2n-1} = (1+\Delta)\,\varepsilon_{2n-1} = \varepsilon_{2n-1} + \varepsilon_{2n}; \quad \delta_{2n} = \varepsilon_{2n}$$

zu setzen. Statt

$$f(a+s\,h) = [1 + \beta_1\delta_1 + \beta_2\delta_2 + \cdots] f(a)$$

erhält man dann die äquivalente Formel

$$f(a+s\,h) = [1 + \beta_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \beta_2\varepsilon_2 + \beta_3(\varepsilon_3+\varepsilon_4) + \beta_4\varepsilon_4 + \cdots] f(a) =$$
$$= [1 + \beta_1\varepsilon_1 + (\beta_1+\beta_2)\varepsilon_2 + \beta_3\varepsilon_3 + (\beta_3+\beta_4)\varepsilon_4 + \cdots] f(a) =$$
$$= [1 + \gamma_1\varepsilon_1 + \gamma_2\varepsilon_2 + \cdots] f(a),$$

so daß

$$\gamma_{2n-1} = \beta_{2n-1}; \quad \gamma_{2n} = \beta_{2n-1} + \beta_{2n}$$

gilt. Da aber

$$\beta_{2n-1} = \binom{s+n-1}{2n-1}; \quad \beta_{2n} = \binom{s+n-1}{2n}$$

ist, folgt

$$\gamma_{2n-1} = \binom{s+n-1}{2n-1}; \quad \gamma_{2n} = \binom{s+n}{2n},$$

also die zweite GAUSSsche Formel

(XVII; 25)

$$f(a+sh) = \left[1 + \binom{s}{1}\varepsilon_1 + \binom{s+1}{2}\varepsilon_2 + \binom{s+1}{3}\varepsilon_3 + \binom{s+2}{4}\varepsilon_4 + \cdots\right] f(a)$$

mit

$$\varepsilon_{2n-1} f(a) = f^{(2n-1)}\left(a - \frac{1}{2}\right); \quad \varepsilon_{2n} f(a) = f^{(2n)}(a).$$

Bildet man nun das arithmetische Mittel aus (XVII; 24) und (XVII; 25), so erhält man wegen $\varepsilon_{2n} = \delta_{2n}$ die STIRLINGsche Interpolationsformel zunächst in der Gestalt

$$f(a+sh) = \left[1 + \binom{s}{1}\frac{\varepsilon_1+\delta_1}{2} + \frac{1}{2}\left\{\binom{s}{2} + \binom{s+1}{2}\right\}\varepsilon_2 + \binom{s+1}{3}\frac{\varepsilon_3+\delta_3}{2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left\{\binom{s+1}{4} + \binom{s+2}{4}\right\}\varepsilon_4 + \cdots\right] f(a).$$

Da aber

$$\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\delta_1) f(a) = \frac{1}{2}\left[f^{\mathrm{I}}\left(a-\frac{1}{2}\right) + f^{\mathrm{I}}\left(a+\frac{1}{2}\right)\right] = f^{\mathrm{I}}(a) \quad \text{usw.}$$

und

$$\frac{1}{2}\left[\binom{s+n-1}{2n} + \binom{s+n}{2n}\right] = \frac{s}{2n}\binom{s+n-1}{2n-1}$$

ist, folgt

$$f(a+sh) = f(a) + \binom{s}{1} f^{\mathrm{I}}(a) + \frac{s}{2}\binom{s}{1} f^{\mathrm{II}}(a) + \binom{s+1}{3} f^{\mathrm{III}}(a) +$$
$$+ \frac{s}{4}\binom{s+1}{3} f^{\mathrm{IV}}(a) + \cdots$$

oder, in expliziter Schreibweise,

(XVII; 26)

$$f(a+sh) = f(a) + s f^{\mathrm{I}}(a) + \frac{s^2}{2!} f^{\mathrm{II}}(a) + \frac{(s+1)\,s\,(s-1)}{3!} f^{\mathrm{III}}(a) +$$
$$+ \frac{(s+1)\,s^2(s-1)}{4!} f^{\mathrm{IV}}(a) + \frac{(s+2)\,(s+1)\,s\,(s-1)\,(s-2)}{5!} f^{\mathrm{V}}(a) +$$
$$+ \frac{(s+2)\,(s+1)\,s^2(s-1)\,(s-2)}{6!} f^{\mathrm{VI}}(a) + \cdots.$$

Der Beweis dieser Formel erfordert noch die Bestätigung des Koeffizientengesetzes (XVII; 23) durch vollständige Induktion. Wegen der großen Bedeutung der STIRLINGschen Formel werde hier statt dessen ein vollständiger Beweis noch auf andere Weise geführt, nämlich durch Anwendung der Formel auf einfache analytische Funktionen. Man kann dazu wieder die Exponentialfunktion benutzen, wie wir es in Abschnitt 143 beim Beweis der NEWTONschen Formel getan haben. Statt dessen wählen wir hier die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$. Dadurch wird man am besten dem Umstand gerecht, daß die Koeffizienten gerader und ungerader Ordnung in den Formeln von GAUSS und STIRLING etwas verschiedenen Gesetzen gehorchen.

Die auf der Zeile a gelegenen Differenzen des ENCKEschen Schemas (für ungerade Ordnung das arithmetische Mittel aus den beiden Differenzen, die einen halben Schritt oberhalb bzw. unterhalb der Zeile liegen) lauten für die Funktionen cos und sin

$$\begin{aligned}
f &= \cos a; \quad f^{I} = -\sin a \sin h; \quad f^{II} = -m^2 \cos a; \\
&\quad f^{III} = m^2 \sin a \sin h; \quad f^{IV} = m^4 \cos a; \quad \ldots \\
f &= \sin a; \quad f^{I} = \cos a \sin h; \quad f^{II} = -m^2 \sin a; \\
&\quad f^{III} = -m^2 \cos a \sin h; \quad f^{IV} = m^4 \sin a; \quad \ldots,
\end{aligned}$$

wenn zur Abkürzung

$$m = 2 \sin \frac{h}{2}$$

gesetzt wird. Die nach den „zentralen Differenzen" $f^{(n)}(a)$ fortschreitenden interpolierenden Reihen lauten demnach, wenn wir die unbekannten Koeffizienten, wie in (XVII; 18), mit α_n bezeichnen,

$$\begin{aligned}
\cos(a + s\,h) &= \alpha_0 \cos a - \alpha_1 \sin a \sin h - \alpha_2 m^2 \cos a + \alpha_3 m^2 \sin a \sin h + \cdots, \\
\sin(a + s\,h) &= \alpha_0 \sin a + \alpha_1 \cos a \sin h - \alpha_2 m^2 \sin a - \alpha_3 m^2 \cos a \sin h + \cdots,
\end{aligned}$$

also speziell für $a = 0$

$$\text{(XVII; 27a)} \qquad \cos sh = \alpha_0 - \alpha_2 m^2 + \alpha_4 m^4 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_{2n} m^{2n},$$

$$\text{(XVII; 27b)} \qquad \sin sh = \sin h (\alpha_1 - \alpha_3 m^2 + \alpha_5 m^4 - \cdots) = \\ = \sin h \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_{2n+1} m^{2n}.$$

Differenziert man (XVII; 27a) nach h, wobei

$$m\,m' = m \frac{dm}{dh} = 2 \sin \frac{h}{2} \cos \frac{h}{2} = \sin h$$

zu setzen ist, so folgt

$$-s \sin s h = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2n\, \alpha_{2n} m^{2n-2} \sin h = -2 \sin h \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)\, \alpha_{2n+2} m^{2n},$$

während man aus (XVII; 27b)

$$-s\sin sh = -\sin h \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n s\,\alpha_{2n+1}\, m^{2n}$$

ableitet. Vergleicht man die Koeffizienten gleicher Potenzen von m, so erhält man die Rekursionsformel

$$\text{(XVII; 28)} \qquad \alpha_{2n+2} = \frac{s}{2n+2}\alpha_{2n+1} \quad \text{oder} \quad \alpha_{2n} = \frac{s}{2n}\alpha_{2n-1}.$$

Eine zweite Rekursion ergibt sich, wenn man (XVII; 27b) nach h differenziert:

$$s\cos sh = \cos h \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_{2n+1}\, m^{2n} + \sin^2 h \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 2n\,\alpha_{2n+1}\, m^{2n-2}.$$

Es ist aber

$$\cos h = 1 - 2\sin^2\frac{h}{2} = 1 - \frac{m^2}{2}; \quad \sin^2 h = 1 - \cos^2 h = m^2\left(1 - \frac{m^2}{4}\right)$$

und daher

$$s\cos sh = \left(1 - \frac{m^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \alpha_{2n+1}\, m^{2n} +$$

$$+ \left(1 - \frac{m^2}{4}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot 2n\,\alpha_{2n+1}\, m^{2n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (2n+1)\,\alpha_{2n+1}\, m^{2n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (n+1)\,\alpha_{2n+1}\, m^{2n+2}.$$

Vertauscht man in der zweiten Summe den Index n mit $n-1$ (was erlaubt ist, da man einen verschwindenden Summanden mit $n = -1$ hinzufügen darf), so erhält man

$$s\cos sh = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (2n+1)\,\alpha_{2n+1}\, m^{2n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n\,\alpha_{2n-1}\, m^{2n}.$$

Andererseits folgt aus (XVII; 27a)

$$s\cos sh = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n s\,\alpha_{2n}\, m^{2n}.$$

Aus diesen beiden identischen Reihen folgt durch Koeffizientenvergleich

$$s\,\alpha_{2n} = (2n+1)\,\alpha_{2n+1} + \frac{n}{2}\alpha_{2n-1}.$$

Setzt man auf der rechten Seite dieser Gleichung nach (XVII; 28)

$$\alpha_{2n+1} = \frac{2n+2}{s}\alpha_{2n+2}; \quad \alpha_{2n-1} = \frac{2n}{s}\alpha_{2n},$$

so ergibt sich schließlich

(XVII; 29)
$$\alpha_{2n+2} = \frac{s^2 - n^2}{(2n+1)(2n+2)}\alpha_{2n}.$$

Mit dem Anfangswert $\alpha_0 = 1$ lassen sich aus (XVII; 28) und (XVII; 29) sämtliche Koeffizienten α_n sukzessive berechnen. Aus (XVII; 29) erhält man unmittelbar

(XVII; 30a)
$$\alpha_{2n} = \frac{s^2(s^2-1^2)(s^2-2^2)\cdot\ldots\cdot[s^2-(n-1)^2]}{(2n)!}$$

und sodann aus (XVII; 28)

(XVII; 30b)
$$\alpha_{2n-1} = \frac{s(s^2-1^2)(s^2-2^2)\cdot\ldots\cdot[s^2-(n-1)^2]}{(2n-1)^2}.$$

Die STIRLINGsche Interpolationsformel lautet daher explizit

(XVII; 31)
$$f(a+sh) = f(a) + s\,f^{\mathrm{I}}(a) + \frac{s^2}{2!}f^{\mathrm{II}}(a) + \frac{(s+1)s(s-1)}{3!}f^{\mathrm{III}}(a) +$$
$$+ \frac{(s+1)s^2(s-1)}{4!}f^{\mathrm{IV}}(a) + \frac{(s+2)(s+1)s(s-1)(s-2)}{5!}f^{\mathrm{V}}(a) + \cdots.$$

146. *Die BESSELsche Interpolationsformel. Interpolation auf Intervallmitte. Varianten*

Eine der STIRLINGschen Interpolationsformel verwandte Reihe ist von BESSEL angegeben worden. Sie schreitet nach den auf der Zeile $a + 1/2$ liegenden oder ihr benachbarten Größen des Differenzenschemas fort, wobei nun für die Funktionen selbst und die geraden Differenzen die arithmetischen Mittel

(XVII; 32)
$$f\left(a+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}[f(a) + f(a+h)];\quad f^{\mathrm{II}}\left(a+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}[f^{\mathrm{II}}(a) + f^{\mathrm{II}}(a+1)];\ \ldots$$

benutzt werden. Die BESSELsche Formel hat dann die Gestalt

$$f\left(a+\frac{h}{2}+sh\right) = f\left(a+\frac{1}{2}\right) + \bar{\alpha}_1 f^{\mathrm{I}}\left(a+\frac{1}{2}\right) + \bar{\alpha}_2 f^{\mathrm{II}}\left(a+\frac{1}{2}\right) + \cdots.$$

Um die Koeffizienten $\bar{\alpha}_n$ zu bestimmen, ersetzt man zunächst in der ersten GAUSSschen Formel (XVII; 24) s durch $s + 1/2$ und in der zweiten GAUSS-

schen Formel (XVII; 25) s durch $s - 1/2$ und a durch $a + h$. Man erhält dann

$$f\left(a + \frac{h}{2} + s h\right) = f(a) + \binom{s + \frac{1}{2}}{1} f^{\mathrm{I}}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \binom{s + \frac{1}{2}}{2} f^{\mathrm{II}}(a) + \binom{s + \frac{3}{2}}{3} f^{\mathrm{III}}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \binom{s + \frac{3}{2}}{4} f^{\mathrm{IV}}(a) + \cdots,$$

$$f\left(a + \frac{h}{2} + s h\right) = f(a + h) + \binom{s - \frac{1}{2}}{1} f^{\mathrm{I}}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \binom{s + \frac{1}{2}}{2} f^{\mathrm{II}}(a + 1) + \binom{s + \frac{1}{2}}{3} f^{\mathrm{III}}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \binom{s + \frac{3}{2}}{4} f^{\mathrm{IV}}(a + 1) + \cdots.$$

Das arithmetische Mittel aus diesen beiden Gleichungen ergibt dann, wenn man die Größen (XVII; 32) einführt,

$$f\left(a + \frac{h}{2} + s h\right) = f\left(a + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left[\binom{s + \frac{1}{2}}{1} + \binom{s - \frac{1}{2}}{1}\right] f^{\mathrm{I}}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \binom{s + \frac{1}{2}}{2} f^{\mathrm{II}}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left[\binom{s + \frac{3}{2}}{3} + \binom{s + \frac{1}{2}}{3}\right] f^{\mathrm{III}}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \binom{s + \frac{3}{2}}{4} f^{\mathrm{IV}}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \cdots.$$

Da aber

$$\frac{1}{2}\left[\binom{s + \frac{i}{2}}{i} + \binom{s + \frac{i}{2} - 1}{i}\right] = \frac{s}{i}\binom{s + \frac{i}{2} - 1}{i - 1}$$

ist, folgt die Besselsche Interpolationsformel in der Gestalt

$$f\left(a + \frac{h}{2} + s h\right) = f\left(a + \frac{1}{2}\right) + s f^{\mathrm{I}}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \binom{s + \frac{1}{2}}{2}\left[f^{\mathrm{II}}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \frac{s}{3} f^{\mathrm{III}}\left(a + \frac{1}{2}\right)\right] + \binom{s + \frac{3}{2}}{4}\left[f^{\mathrm{IV}}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \frac{s}{5} f^{\mathrm{V}}\left(a + \frac{1}{2}\right)\right] + \cdots$$

oder explizite

(XVII; 33)
$$f\left(a+\frac{h}{2}+s\,h\right)=f\left(a+\frac{1}{2}\right)+s\,f^{\mathrm{I}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+$$
$$+\frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)\left(s-\frac{1}{2}\right)}{2!}f^{\mathrm{II}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)s\left(s-\frac{1}{2}\right)}{3!}f^{\mathrm{III}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+$$
$$+\frac{\left(s+\frac{3}{2}\right)\left(s+\frac{1}{2}\right)\left(s-\frac{1}{2}\right)\left(s-\frac{3}{2}\right)}{4!}f^{\mathrm{IV}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+$$
$$+\frac{\left(s+\frac{3}{2}\right)\left(s+\frac{1}{2}\right)s\left(s-\frac{1}{2}\right)\left(s-\frac{3}{2}\right)}{5!}f^{\mathrm{V}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\cdots.$$

Diese Formel eignet sich besonders gut zur Interpolation auf Argumente, die in der Nähe der Mitte zwischen denen der gegebenen Stützwerte liegen. Für die *Interpolation auf Intervallmitte* selbst erhält man die einfache Formel

(XVII; 34)
$$f\left(a+\frac{h}{2}\right)=f\left(a+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{8}f^{\mathrm{II}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+$$
$$+\frac{3}{128}f^{\mathrm{IV}}\left(a+\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{1024}f^{\mathrm{VI}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\cdots,$$

wenn man in (XVII; 33) $s=0$ setzt. Mit ihrer Hilfe läßt sich die Schrittweite einer durch äquidistante Stützwerte definierten Funktion auf die Hälfte verkleinern, sofern die Anzahl der gegebenen Ordinaten genügend groß war (denn mit jeder solchen „Verengung" ist an den Rändern des belegten Intervalls ein Verlust an Stützwerten verbunden, da dort die Anzahl der verfügbaren zentralen Differenzen gerader Ordnung nicht mehr ausreicht). Wollte man die Interpolation auf Mitte bis zu den Intervallrändern durchführen, so müßte man dort die NEWTONschen Interpolationsformeln zu Hilfe nehmen, die allerdings schlechter konvergieren.

Aus (XVII; 24) läßt sich eine schon von LAPLACE angegebene Interpolationsformel ableiten, auf die EVERETT wieder aufmerksam gemacht hat. Ersetzt man in (XVII; 24) die ungeraden Differenzen durch die geraden der nächstniederen Ordnung, so erhält man

$$f(a+s\,h)=f(a)+\binom{s}{1}[f(a+1)-f(a)]+\binom{s}{2}f^{\mathrm{II}}(a)+$$
$$+\binom{s+1}{3}[f^{\mathrm{II}}(a+1)-f^{\mathrm{II}}(a)]+\binom{s+1}{4}f^{\mathrm{IV}}(a)+\cdots.$$

Setzt man ferner $r = 1 - s$ und bedenkt, daß

$$\binom{s+n-1}{2n} - \binom{s+n}{2n+1} = -\binom{s+n-1}{2n+1} = \binom{r+n}{2n+1}$$

ist, so folgt schließlich

$$\text{(XVII; 35)}\quad f(a+sh) = \binom{r}{1} f(a) + \binom{r+1}{3} f^{\mathrm{II}}(a) + \binom{r+2}{5} f^{\mathrm{IV}}(a) + \cdots$$
$$+ \binom{s}{1} f(a+1) + \binom{s+1}{3} f^{\mathrm{II}}(a+1) + \binom{s+2}{5} f^{\mathrm{IV}}(a+1) + \cdots,$$

eine Formel, die nur die geraden Differenzen enthält, die zu den beiden das Intervall $[a, a+h]$ einschließenden Zeilen des Differenzenschemas gehören. Ist die Schrittweite klein genug, so genügt es, die Reihe (XVII; 35) mit den Gliedern zweiter Ordnung abzubrechen. Nötigenfalls lassen sich die zweiten Differenzen durch ein kleines Korrektionsglied so ergänzen, daß auch die vierten Differenzen zum überwiegenden Teil mit berücksichtigt werden. Schreibt man nämlich den Koeffizienten der Differenzen vierter Ordnung

$$\binom{s+2}{5} = \binom{s+1}{3} \frac{s^2-4}{20} = \binom{s+1}{3} \varphi(s),$$

so kann man den Faktor $\varphi(s)$ durch den Mittelwert

$$\int_0^1 \varphi(s)\, ds = -\frac{11}{60} = -0.1833$$

ersetzen; dieser weicht von dem wahren Wert, der für $0 \leqq s \leqq 1$ zwischen -0.20 und -0.15 liegt, nur wenig ab. Die abgekürzte EVERETTsche Formel

$$f(a+sh) = r f(a) + \frac{r(r^2-1)}{6} \hat{f}^{\mathrm{II}}(a) + s f(a+1) + \frac{s(s^2-1)}{6} \hat{f}^{\mathrm{II}}(a+1),$$
$$\left(\hat{f}^{\mathrm{II}} = f^{\mathrm{II}} - \frac{11}{60} f^{\mathrm{IV}}\right)$$

wird also für mäßige Schrittweiten genau genug sein.

Die nach zentralen Differenzen fortschreitenden Reihen, insbesondere die von STIRLING und BESSEL, zeichnen sich durch den symmetrischen Aufbau der Koeffizienten aus, leiden aber an dem Übelstand, daß die Koeffizienten der Terme gerader und ungerader Ordnung verschiedenen Bildungsgesetzen gehorchen. Es ist auch nicht möglich, wie bei den NEWTONschen Formeln, die Folge der Differenzen, nach denen sie fortschreiten, durch wiederholte Anwendung eines und desselben Operators auf die Ausgangsordinate zu gewinnen. Eine bisher wohl kaum bekannte Variante der STIRLINGschen Formel vermeidet diese Unschönheit.

Die STIRLINGsche Formel möge in der Form

$$f(a + s\,h) = [1 + \alpha_1 \mathfrak{f}_1 + \alpha_2 \mathfrak{f}_2 + \alpha_3 \mathfrak{f}_3 + \cdots]\, f(a)$$

geschrieben werden, wo die α_n die in Abschnitt 145 abgeleiteten Koeffizienten (XVII; 30) sind und die $\mathfrak{f}_n$ Operatoren bezeichnen, die, angewandt auf $f(a)$, die zentralen Differenzen

$$\mathfrak{f}_n\, f(a) = f^{(n)}(a)$$

liefern. Dabei ist für gerade Differenzen

$$f^{(2n)}(a) = \Delta^{2n} f(a - n) = \Delta^{2n} \tau^{-n} f(a); \quad \mathfrak{f}_{2n} = (\Delta \tau^{-1/2})^{2n},$$

für ungerade aber

$$f^{(2n+1)}(a) = \frac{1}{2}\left[f^{(2n+1)}\left(a + \frac{1}{2}\right) + f^{(2n+1)}\left(a - \frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,[f^{(2n)}(a + 1) - f^{(2n)}(a - 1)] = \frac{\tau - \tau^{-1}}{2} f^{(2n)}(a),$$

$$\mathfrak{f}_{2n+1} = \frac{\tau - \tau^{-1}}{2} (\Delta \tau^{-1/2})^{2n}.$$

Wir führen nun statt der $\mathfrak{f}_n$ einen neuen Operator

(XVII; 36) $$\xi = \Delta \tau^{-1/2} = (\tau - 1)\, \tau^{-1/2} = \tau^{1/2} - \tau^{-1/2}$$

ein, so daß

$$\xi^{2n} = (\Delta \tau^{-1/2})^{2n} = \mathfrak{f}_{2n},$$

$$\xi^{2n+1} = \xi\, \mathfrak{f}_{2n},$$

aber

$$\mathfrak{f}_{2n+1} = \frac{\tau - \tau^{-1}}{2} \mathfrak{f}_{2n} = \frac{\tau - \tau^{-1}}{2} \xi^{2n}$$

ist. Aus (XVII; 36) folgt

$$\tau\, \xi^2 = (\tau - 1)^2 = \tau^2 - 2\tau + 1,$$

$$\tau^{-1} \xi^2 = \tau^{-2} (\tau - 1)^2 = \tau^{-2} - 2\tau^{-1} + 1.$$

Die Operatoren τ und τ^{-1} erweisen sich also als Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 2x\left(1 + \frac{\xi^2}{2}\right) = -1,$$

so daß

$$\tau = 1 + \xi \sqrt{1 + \frac{1}{4}\xi^2} + \frac{1}{2}\xi^2; \quad \tau^{-1} = 1 - \xi \sqrt{1 + \frac{1}{4}\xi^2} + \frac{1}{2}\xi^2$$

und

$$\frac{\tau - \tau^{-1}}{2} = \xi \sqrt{1 + \frac{1}{4}\xi^2} =$$

$$= \xi \left(1 + \frac{1}{8}\xi^2 - \frac{1}{128}\xi^4 + \frac{1}{1024}\xi^6 - \frac{3}{32768}\xi^8 + \cdots\right)$$

geschrieben werden kann. Es wird dann

$$f(a + s h) = [1 + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_4 \xi^4 + \alpha_6 \xi^6 + \alpha_8 \xi^8 + \cdots$$

$$+ (\alpha_1 \xi + \alpha_3 \xi^3 + \alpha_5 \xi^5 + \cdots) \left(1 + \frac{1}{8}\xi^2 - \frac{1}{128}\xi^4 + \frac{1}{1024}\xi^6 - \cdots\right)\Big] f(a)$$

oder, wenn man ausmultipliziert und nach Potenzen von ξ ordnet,

$$f(a + s h) = \Big[1 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \left(\alpha_3 + \frac{1}{8}\alpha_1\right)\xi^3 + \alpha_4 \xi^4 + \Big(\alpha_5 +$$

$$+ \frac{1}{8}\alpha_3 - \frac{1}{128}\alpha_1\Big)\xi^5 + \alpha_6 \xi^6 + \left(\alpha_7 + \frac{1}{8}\alpha_5 - \frac{1}{128}\alpha_3 + \frac{1}{1024}\alpha_1\right)\xi^7 + \cdots\Big] f(a).$$

Es ist aber

$$\alpha_3 + \frac{1}{8}\alpha_1 = \frac{s}{3}\binom{s + \frac{1}{2}}{2},$$

$$\alpha_5 + \frac{1}{8}\alpha_3 - \frac{1}{128}\alpha_1 = \frac{s}{5}\binom{s + \frac{3}{2}}{4},$$

$$\alpha_7 + \frac{1}{8}\alpha_5 - \frac{1}{128}\alpha_3 + \frac{1}{1024}\alpha_1 = \frac{s}{7}\binom{s + \frac{5}{2}}{6}$$

usw., so daß man schließlich

$$f(a + s h) = \left[1 + s\,\xi\left\{1 + \frac{1}{2}\binom{s}{1}\xi + \frac{1}{3}\binom{s + \frac{1}{2}}{2}\xi^2 + \frac{1}{4}\binom{s + 1}{3}\xi^3 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{5}\binom{s + \frac{3}{2}}{4}\xi^4 + \cdots\right\}\right] f(a) = \left[1 + s\,\xi \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{s + \frac{\nu - 1}{2}}{\nu} \frac{\xi^\nu}{\nu + 1}\right] f(a)$$

als Interpolationsformel mit symmetrisch gebauten, nach einheitlichem Gesetz gebildeten Termen erhält, die nach Potenzen eines einzigen Operators fortschreiten.

Die Benutzung des Operators ξ erfordert, wenn eine Wertefolge mit der Schrittweite h (die der Verschiebung τ entspricht) gegeben ist, die vorherige Interpolation dieser Folge auf Intervallmitte. Man kann das aber vermeiden, wenn man der Schrittweite h die Verschiebung $\tau^{1/2}$ (bzw. der Verschiebung τ die doppelte Schrittweite $2h$) zuschreibt, also die Bildung der zentralen Differenzen aus denen der vorhergehenden Spalte mit der doppelten Schrittweite vornimmt. Man bilde also die ersten Differenzen nach der Regel

$$\xi f(a) = f(a+1) - f(a-1)$$

und die folgenden entsprechend, so daß allgemein

$$\xi^n f(a) = \xi^{n-1}[f(a+1) - f(a-1)]$$

wird. Alle Differenzen stehen dann auf den durch die ganzzahligen Argumente $a + nh$ gegebenen Horizontalen, und die obige Formel ist zu ändern, indem man $2h$ statt h und $s/2$ statt s setzt. Allerdings erfordert dieses Verfahren etwa die doppelte Zahl von Stützwerten, ein Nachteil, mit dem die vollkommene Symmetrie und Stetigkeit der Formel erkauft wird.

147. *Genauigkeit und Konvergenz der Interpolationsformeln*

Eine Eigenschaft des Differenzenschemas, die auf die Genauigkeit von Interpolationsformeln jeder Art Einfluß hat, ist die, daß Fehler oder Ungenauigkeiten der Stützwerte sich auf die Differenzen um so stärker auswirken, je höher deren Ordnung ist. Um die Wirkung eines einzelnen (isolierten) Fehlers in der Funktionsspalte auf die Differenzen zu untersuchen, bilden wir das ENCKEsche Differenzenschema einer Wertereihe, die überall Null ist und nur für das Argument a den Betrag ε hat:

Argument	f	f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}	...
$a-2$	0		0		ε	
		0		ε		
$a-1$	0		ε		-4ε	
		ε		-3ε		
a	ε		-2ε		6ε	...
		$-\varepsilon$		3ε		
$a+1$	0		ε		-4ε	
		0		$-\varepsilon$		
$a+2$	0		0		ε	

Der Fehler ε breitet sich also fächerförmig über das Schema aus und erscheint in der Spalte der r-ten Differenzen mit den Binomialkoeffizienten r-ter Ordnung und alternierenden Vorzeichen behaftet. Die Fehlereinwirkung er-

reicht also bei den zentralen Differenzen ein Maximum, verschwindet aber in den durch arithmetische Mittelung gebildeten Differenzen ungerader Ordnung $f^{\mathrm{I}}(a)$; $f^{\mathrm{III}}(a)$; $f^{\mathrm{V}}(a)$; ... Isolierte Fehler (insbesondere grobe Fehler) lassen sich auf Grund dieses Fortpflanzungsgesetzes an dem sprunghaften Verlauf der Differenzen höherer Ordnung leicht erkennen.

Wichtiger ist noch die Beurteilung des Einflusses *zufälliger Fehler*, mit denen die Funktionswerte der Tafel behaftet sind oder sein können, auf die Differenzen verschiedener Ordnung. Seien im einzelnen ε_i die zum Argument $a + i\,h$ gehörigen Fehler der Funktion, so erhält man nachstehendes Fortpflanzungsschema:

Argument	f	f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}
$a - 2h$	ε_{-2}	.	:	:	:
		$\varepsilon_{-1} - \varepsilon_{-2}$			
$a - h$	ε_{-1}		$\varepsilon_0 - 2\varepsilon_{-1} + \varepsilon_{-2}$		
		$\varepsilon_0 - \varepsilon_{-1}$		$\varepsilon_1 - 3\varepsilon_0 + 3\varepsilon_{-1} - \varepsilon_{-2}$	
a	ε_0		$\varepsilon_1 - 2\varepsilon_0 + \varepsilon_{-1}$		$\varepsilon_2 - 4\varepsilon_1 + 6\varepsilon_0 - 4\varepsilon_{-1} + \varepsilon_{-2}$
		$\varepsilon_1 - \varepsilon_0$		$\varepsilon_2 - 3\varepsilon_1 + 3\varepsilon_0 - \varepsilon_{-1}$	
$a + h$	ε_1		$\varepsilon_2 - 2\varepsilon_1 + \varepsilon_0$		
		$\varepsilon_2 - \varepsilon_1$			
$a + 2h$	ε_2	.	:	:	:

Handelt es sich um zufällige Fehler (Beobachtungsfehler) einer empirischen Funktion mit konstantem Genauigkeitsmaß und ist μ der mittlere Fehler, so ist nach einem bekannten Satz der Fehlertheorie der mittlere Fehler einer Differenz r-ter Ordnung

$$\mu_r = \mu \sqrt{\binom{r}{0}^2 + \binom{r}{1}^2 + \binom{r}{2}^2 + \cdots + \binom{r}{r}^2} = \mu \sqrt{\binom{2r}{r}}\,.$$

Für die Differenzen der ersten sechs Ordnungen erhält man abgerundet

r	1	2	3	4	5	6
$\frac{\mu_r}{\mu}$	1.4	2.4	4.5	8.4	15.8	30.4

Empirische Wertereihen, die durch zufällige Fehler mit merklicher Streuung entstellt sind, eignen sich also zur Interpolation mit Hilfe des Differenzenschemas wenig; man wird viel bessere Resultate erzielen, wenn man die „rauhe" Funktion graphisch oder nach irgendeinem numerischen Verfahren (z. B. durch Mittelbildung über zwei oder mehrere benachbarte Ordinaten) glättet. Anders ist es jedoch bei Wertereihen, die analytischen Funktionen angehören. Hier handelt es sich, wenn wir grobe Fehler ausschließen, lediglich um die unvermeidlichen Abrundungsfehler, deren Betrag zwischen Null und einer halben Ein-

heit der letzten Rechenstelle schwanken kann. Da jeder dieser möglichen Fehler mit der gleichen Wahrscheinlichkeit eintreten kann, ist das Quadrat des mittleren Abrundungsfehlers

$$\mu^2 = \int_{-1/2}^{+1/2} t^2\,dt = \frac{1}{12}; \quad \mu = \frac{1}{6}\sqrt{3} = 0.2887,$$

also nahezu gleich 0.3 Einheiten der letzten benutzten Dezimalstelle. Der mittlere Fehler der Differenzen überschreitet also infolge der Abrundungsfehler der Stützwerte schon in der dritten Ordnung die Einheit der letzten Dezimalstelle, von der siebenten Ordnung ab die Einheit der vorletzten.

Die Konvergenz der Interpolationsformeln ist wesentlich an die Voraussetzung gebunden, daß im ganzen Bereich der zur Interpolation herangezogenen Stützwerte die Ungleichung (XVII; 6) gilt, d.h. vor allem, daß überall in diesem Bereich die Ableitungen der Funktion in bestimmter Weise beschränkt sind. Insbesondere darf die Funktion selbst dort keine singulären Stellen aufweisen. Das bedeutet allerdings nicht, daß die Funktion überhaupt keine Singularitäten haben darf. Das Beispiel der Funktion $\cot x$, die für $x = 0$, $x = \pi$ usw. unendlich große Werte annimmt, mag dies zeigen. Das Differenzenschema mit der Schrittweite $2°$:

x	$\cot x$	f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}	f^{V}	f^{VI}	f^{VII}	f^{VIII}
0°	∞								
		$-\infty$							
2°	28.6363		∞						
		−14.3356		$-\infty$					
4°	14.3007		9.5493		∞				
		−4.7863		−7.1620		$-\infty$			
6°	9.5144		2.3873		5.7296		∞		
		−2.3990		−1.4324		−4.7774		$-\infty$	
8°	7.1154		0.9549		0.9549		4.0928		∞
		−1.4441		−0.4775		−0.6819		−3.5819	
10°	5.6713		0.4774		0.2730		0.5109		3.1858
		−0.9667		−0.2045		−0.1710		−0.3961	
12°	4.7046		0.2729		0.1020		0.1148		0.3142
		−0.6938		−0.1025		−0.0562		−0.0819	
14°	4.0108		0.1704		0.0458		0.0329		0.0623
		−0.5234		−0.0567		−0.0233		−0.0196	
16°	3.4874		0.1137		0.0225		0.0133		
		−0.4097		−0.0342		−0.0100			
18°	3.0777		0.0795		0.0125				
		−0.3302		−0.0217					
20°	2.7475		0.0578						
		−0.2724							
22°	2.4751								

zeigt, daß in jeder Zeile des Schemas früher oder später unendlich große Differenzen auftreten und daher alle nach Differenzen fortschreitenden Reihen divergieren. Dasselbe gilt insbesondere für die NEWTONschen Interpolationsformeln, die schräg nach oben oder unten verlaufende Differenzenfolgen benutzen; denn diese treffen ja irgendwo auf unendlich große Werte, die von den Stellen $x = 0°$ oder $x = 180°$ ausstrahlen; es gilt aber auch für die nach zentralen Differenzen fortschreitenden Formeln. Trotzdem gelingt die Interpolation, wenn die benutzten Reihen an Stellen abgebrochen werden können, bei denen die Reste der Ungleichung (XVII; 6) genügen. So führt z.B. der Versuch, den Wert $\cot 13°$ mittels der Formel (XVII; 34) durch Interpolation auf die Mitte des Intervalls $[12°, 14°]$ zu gewinnen, auf ein befriedigendes Ergebnis, wenn man die Reihe vor Erreichen der singulären Stelle, die bei den Differenzen zwölfter Ordnung liegt, abbricht. Die nach den Differenzen gerader Ordnung fortschreitende Reihe (XVII; 34) ergibt die Folge der Partialsummen

$$4.3577;\ 4.3300;\ 4.3317;\ 4.3314;\ 4.3316;\ \ldots,$$

während in Wirklichkeit $\cot 13° = 4.3315$ ist. Bricht man also die Reihe bei dem Glied sechster oder achter Ordnung ab, so erhält man den gesuchten Wert bis auf eine Einheit der vierten Dezimalstelle genau. Die nächste Partialsumme, die man durch Hinzunahme des Terms zehnter Ordnung erhielte, wäre schon erheblich schlechter, die übernächste unendlich groß. Die BESSELsche Reihe (XVII; 34) erweist sich also in diesem und in ähnlich gelegenen Fällen als semikonvergent. Wollte man in diesem sehr ungünstig gewählten Beispiel den Wert $\cot 13°$ mit Hilfe der NEWTONschen Formel (XVII; 13) durch Interpolation von $12°$ auf $13°$ mit aufsteigenden Differenzen versuchen, so gelänge das nicht, da diese Differenzenfolge schon bei der fünften Ordnung auf die Singularität stößt. Dagegen ist Formel (XVII; 10), die NEWTONsche Reihe mit absteigenden Differenzen, in diesem Fall brauchbar, da die unendliche Differenz erst bei einer sehr hohen Ordnung erreicht wird. Diese Reihe ist, ebenso wie die BESSELsche, semikonvergent; sie ist sogar genauer, da die benutzten Stützwerte in diesem Beispiel nicht so dicht an die singulären Punkte der Funktion heranreichen.

Die Genauigkeit einer Interpolationsformel läßt sich immer durch das Restglied

$$R_r = f(a + s\,h) - f_r(a + s\,h)$$

abschätzen, wo f_r die bis zum Glied r-ter Ordnung durchgeführte Interpolation nach der betreffenden Formel darstellt, also jenen Näherungswert, den man durch Interpolation von $r + 1$ aufeinanderfolgenden Stützwerten mittels einer ganzen rationalen Funktion r-ten Grades erhält. Hat die Interpolationsformel die Gestalt

$$f(a + s\,h) = f(a) + a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots,$$

wo die f_n gewisse Differenzen n-ter Ordnung und die a_n Polynome n-ten Grades von s bedeuten, so läßt sich die Restfunktion immer in der Form

$$R_r = a_{r+1} f_{r+1} + a_{r+2} f_{r+2} + \cdots = h^{r+1} a_{r+1} f^{(r+1)}(a + \xi\,h)$$

schreiben, wo $a + \xi h$ ein bestimmtes, aber im allgemeinen unbekanntes Argument im Bereich der Stützwerte bedeutet. Diese Formel, die speziell für die TAYLORsche Reihe (XVII:4) in (XVII;6) übergeht, läßt sich ähnlich wie diese beweisen. Es gilt also die Abschätzung

$$|R_r| \leqq h^{r+1} |a_{r+1}| \, |\mathrm{Max} f^{(r+1)}(a + \xi h)|.$$

Die Restglieder fallen also um so kleiner aus, je kleiner die Schrittweite ist, je rascher die Koeffizienten der Interpolationsformel und die Maximalbeträge der Ableitungen der Funktion mit wachsender Ordnung abnehmen. Die Beträge von $h^{r+1} f^{(r+1)}$ kann man, wie im nächsten Abschnitt gezeigt werden wird, bequem durch die Differenzen $(r + 1)$-ter Ordnung des ENCKEschen Schemas abschätzen.

Bei astronomischen Ephemeriden (Koordinaten der Himmelskörper, Störungen der Koordinaten oder der Bahnelemente) sind im allgemeinen Singularitäten der oben beschriebenen Art nicht zu befürchten. Dagegen verdient der in astronomischen Wertereihen häufig vorkommende Fall Beachtung, daß die für äquidistante Argumente tabulierte Funktion periodische Bestandteile (Sinuswellen verschiedener Periode, Amplitude und Phase) enthält. Hier treten Schwierigkeiten bei der Interpolation auf, wenn die Wellenlängen dieser Periodizitäten kleiner oder nur wenig größer als die Schrittweite sind. Es läßt sich nämlich zeigen, daß es zu jeder Sinusfunktion, die durch eine Anzahl

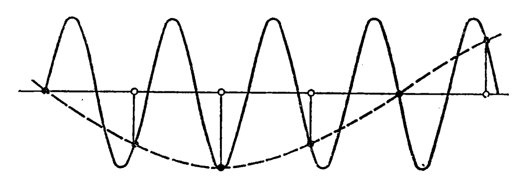


Abb. 31. Interpolation der Stützwerte einer Sinuskurve durch Sinuskurven verschiedener Wellenlänge

äquidistanter Stützwerte gegeben ist, auch andere Sinusfunktionen mit gleicher Amplitude, aber verschiedener Periode gibt, die durch die gleichen Stützwerte dargestellt werden. Ist z.B. (Abb. 31)

$$f(t) = \sin \frac{7}{4} \pi t$$

für die Argumente $t = 0, 1, 2, \ldots, 8$ aufgezeichnet, so gehören die gleichen Ordinaten auch der durch einen gestrichelten Kurvenzug dargestellten Funktion

$$g(t) = -\sin \frac{1}{4} \pi t$$

an, deren Wellenlänge siebenmal so groß ist. Allgemein haben alle Funktionen der Form

$$\sin \frac{7 \pm 8r}{4} \pi t, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots$$

die gleichen Stützwerte; unter ihnen hat $g(t)$ die längste Periode. Die Interpolationsformeln werden aber in einem solchen Fall immer auf die Sinuskurve mit der längsten Periode führen, da diese den „glattesten" Verlauf hat. Um Mehrdeutigkeiten[1]) solcher Art zu vermeiden, ist es immer ratsam, die Schrittweite so klein zu wählen, daß auf die kürzeste Periode, die in dem Material vorhanden ist oder auf deren Darstellung durch die interpolierende Funktion man Wert legt, mindestens vier Stützwerte entfallen. Dann ist eine falsche Interpretation nicht zu befürchten, da alle Pseudoperioden kleiner sind.

148. *Ableitungen einer durch äquidistante Stützwerte gegebenen Funktion*

Häufig wird es nötig sein, die Ableitungen einer als gleichabständige Ephemeride gegebenen Funktion mit Hilfe des Differenzenschemas zu berechnen. So muß man z.B. bei der Durchführung der LAPLACE-HARZERschen Methode zur Bahnbestimmung eines Himmelskörpers (Abschnitt 67) die Differentialquotienten der geozentrischen Sonnenkoordinaten nach der Zeit aus der Sonnenephemeride eines Jahrbuchs ableiten.

Als Ausgangsformeln für die Herleitung rasch konvergierender Entwicklungen der Differentialquotienten erweisen sich die nach zentralen Differenzen fortschreitenden Interpolationsformeln, insbesondere die von STIRLING (XVII; 31) und die von BESSEL (XVII; 33) angegebenen, am geeignetsten. Bezeichnet man die unabhängige Variable der Tafelfunktion mit

$$t = a + s\,h,$$

so ergibt sukzessives Differenzieren nach s

$$\frac{df(t)}{ds} = \frac{df}{dt}\,\frac{dt}{ds} = h\,\frac{df}{dt}, \quad \text{allgemein} \quad \frac{d^n f}{ds^n} = h^n f^{(n)}(t).$$

Die Anwendung dieses Verfahrens auf (XVII; 31) ergibt, wenn man die Polynome auf der rechten Seite auflöst und demgemäß

$$\begin{aligned}(\text{XVII; 37})\quad f(t) = f(a) &+ s\,f^{\text{I}}(a) + \frac{s^2}{2} f^{\text{II}}(a) + \left(\frac{s^3}{6} - \frac{s}{6}\right) f^{\text{III}}(a) + \\ &+ \left(\frac{s^4}{24} - \frac{s^2}{24}\right) f^{\text{IV}}(a) + \left(\frac{s^5}{120} - \frac{s^3}{24} + \frac{s}{30}\right) f^{\text{V}}(a) + \\ &+ \left(\frac{s^6}{720} - \frac{s^4}{144} + \frac{s^2}{180}\right) f^{\text{VI}}(a) + \\ &+ \left(\frac{s^7}{5040} - \frac{s^5}{360} + \frac{7s^3}{720} - \frac{s}{140}\right) f^{\text{VII}}(a) + \cdots\end{aligned}$$

---

[1]) Über Mehrdeutigkeiten der Interpolation von Wertereihen durch trigonometrische Funktionen siehe K. STUMPFF, Grundlagen und Methoden der Periodenforschung, S. 38–46, Berlin 1937.

schreibt, nacheinander die Ausdrücke

$$
\text{(XVII; 38)}\quad
\left\{
\begin{aligned}
h f'(a+sh) &= f^{\mathrm{I}}(a) + s f^{\mathrm{II}}(a) + \left(\frac{s^2}{2} - \frac{1}{6}\right) f^{\mathrm{III}}(a) + \\
&\quad + \left(\frac{s^3}{6} - \frac{s}{12}\right) f^{\mathrm{IV}}(a) + \left(\frac{s^4}{24} - \frac{s^2}{8} + \frac{1}{30}\right) f^{\mathrm{V}}(a) + \\
&\quad + \left(\frac{s^5}{120} - \frac{s^3}{36} + \frac{s}{90}\right) f^{\mathrm{VI}}(a) + \left(\frac{s^6}{720} - \frac{s^4}{72} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{7s^2}{240} - \frac{1}{140}\right) f^{\mathrm{VII}}(a) + \cdots, \\
h^2 f''(a+sh) &= f^{\mathrm{II}}(a) + s f^{\mathrm{III}}(a) + \left(\frac{s^2}{2} - \frac{1}{12}\right) f^{\mathrm{IV}}(a) + \\
&\quad + \left(\frac{s^3}{6} - \frac{s}{4}\right) f^{\mathrm{V}}(a) + \left(\frac{s^4}{24} - \frac{s^2}{12} + \frac{1}{90}\right) f^{\mathrm{VI}}(a) + \\
&\quad + \left(\frac{s^5}{120} - \frac{s^3}{18} + \frac{7s}{120}\right) f^{\mathrm{VII}}(a) + \cdots, \\
h^3 f'''(a+sh) &= f^{\mathrm{III}}(a) + s f^{\mathrm{IV}}(a) + \left(\frac{s^2}{2} - \frac{1}{4}\right) f^{\mathrm{V}}(a) + \\
&\quad + \left(\frac{s^3}{6} - \frac{s}{6}\right) f^{\mathrm{VI}}(a) + \left(\frac{s^4}{24} - \frac{s^2}{6} + \frac{7}{120}\right) f^{\mathrm{VII}}(a) + \cdots, \\
h^4 f^{(4)}(a+sh) &= f^{\mathrm{IV}}(a) + s f^{\mathrm{V}}(a) + \left(\frac{s^2}{2} - \frac{1}{6}\right) f^{\mathrm{VI}}(a) + \\
&\quad + \left(\frac{s^3}{6} - \frac{s}{3}\right) f^{\mathrm{VII}}(a) + \cdots, \\
h^5 f^{(5)}(a+sh) &= f^{\mathrm{V}}(a) + s f^{\mathrm{VI}}(a) + \left(\frac{s^2}{2} - \frac{1}{3}\right) f^{\mathrm{VII}}(a) + \cdots, \\
h^6 f^{(6)}(a+sh) &= f^{\mathrm{VI}}(a) + s f^{\mathrm{VII}}(a) + \cdots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Ebenso erhält man aus der BESSELschen Formel (XVII; 33),

(XVII; 39)

$$
\begin{aligned}
f\left(a + \frac{h}{2} + sh\right) &= f\left(a + \frac{1}{2}\right) + s f^{\mathrm{I}}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{s^2}{2} - \frac{1}{8}\right) f^{\mathrm{II}}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \\
&\quad + \left(\frac{s^3}{6} - \frac{s}{24}\right) f^{\mathrm{III}}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{s^4}{24} - \frac{5s^2}{48} + \frac{3}{128}\right) f^{\mathrm{IV}}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \\
&\quad + \left(\frac{s^5}{120} - \frac{s^3}{48} + \frac{3s}{640}\right) f^{\mathrm{V}}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{s^6}{720} - \frac{7s^4}{576} + \frac{259s^2}{11520} - \frac{5}{1024}\right) \times \\
&\quad \times f^{\mathrm{VI}}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{s^7}{5040} - \frac{s^5}{576} + \frac{37s^3}{11520} - \frac{5s}{7168}\right) f^{\mathrm{VII}}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \cdots,
\end{aligned}
$$

durch sukzessives Differenzieren

$$\tag{XVII; 40}\left\{\begin{aligned}
h\,f'\left(a+\frac{h}{2}+s\,h\right) &= f^{\mathrm{I}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+s\,f^{\mathrm{II}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\\
&+\left(\frac{s^2}{2}-\frac{1}{24}\right)f^{\mathrm{III}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{s^3}{6}-\frac{5s}{24}\right)f^{\mathrm{IV}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\\
&+\left(\frac{s^4}{24}-\frac{s^2}{16}+\frac{3}{640}\right)f^{\mathrm{V}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{s^5}{120}-\frac{7s^3}{144}+\right.\\
&\left.+\frac{259s}{5760}\right)f^{\mathrm{VI}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{s^6}{720}-\frac{5s^4}{576}+\frac{37s^2}{3840}-\right.\\
&\left.-\frac{5}{7168}\right)f^{\mathrm{VII}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\cdots,\\
h^2 f''\left(a+\frac{h}{2}+s\,h\right) &= f^{\mathrm{II}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+s\,f^{\mathrm{III}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\\
&+\left(\frac{s^2}{2}-\frac{5}{24}\right)f^{\mathrm{IV}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{s^3}{6}-\frac{s}{8}\right)f^{\mathrm{V}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\\
&+\left(\frac{s^4}{24}-\frac{7s^2}{48}+\frac{259}{5760}\right)f^{\mathrm{VI}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\\
&+\left(\frac{s^5}{120}-\frac{5s^3}{144}+\frac{37s}{1920}\right)f^{\mathrm{VII}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\cdots,\\
h^3 f'''\left(a+\frac{h}{2}+s\,h\right) &= f^{\mathrm{III}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+s\,f^{\mathrm{IV}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\\
&+\left(\frac{s^2}{2}-\frac{1}{8}\right)f^{\mathrm{V}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{s^3}{6}-\frac{7s}{24}\right)f^{\mathrm{VI}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\\
&+\left(\frac{s^4}{24}-\frac{5s^2}{48}+\frac{37}{1920}\right)f^{\mathrm{VII}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\cdots,\\
h^4 f^{(4)}\left(a+\frac{h}{2}+s\,h\right) &= f^{\mathrm{IV}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+s\,f^{\mathrm{V}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{s^2}{2}-\right.\\
&\left.-\frac{7}{24}\right)f^{\mathrm{VI}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{s^3}{6}-\frac{5s}{24}\right)f^{\mathrm{VII}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\cdots,\\
h^5 f^{(5)}\left(a+\frac{h}{2}+s\,h\right) &= f^{\mathrm{V}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+s\,f^{\mathrm{VI}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\\
&+\left(\frac{s^2}{2}-\frac{5}{24}\right)f^{\mathrm{VII}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\cdots,\\
h^6 f^{(6)}\left(a+\frac{h}{2}+s\,h\right) &= f^{\mathrm{VI}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+s\,f^{\mathrm{VII}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right.$$

Setzt man in diesen Formeln $s = 0$, so ergibt sich für die Argumente der Stützwerte selbst aus (XVII; 38)

$$\text{(XVII; 41)} \quad \begin{cases} h\,f'(a) = f^{\mathrm{I}}(a) - \dfrac{1}{6} f^{\mathrm{III}}(a) + \dfrac{1}{30} f^{\mathrm{V}}(a) - \dfrac{1}{140} f^{\mathrm{VII}}(a) + \cdots, \\ h^2 f''(a) = f^{\mathrm{II}}(a) - \dfrac{1}{12} f^{\mathrm{IV}}(a) + \dfrac{1}{90} f^{\mathrm{VI}}(a) - \cdots, \\ h^3 f'''(a) = f^{\mathrm{III}}(a) - \dfrac{1}{4} f^{\mathrm{V}}(a) + \dfrac{7}{120} f^{\mathrm{VII}}(a) - \cdots, \\ h^4 f^{(4)}(a) = f^{\mathrm{IV}}(a) - \dfrac{1}{6} f^{\mathrm{VI}}(a) + \cdots, \\ h^5 f^{(5)}(a) = f^{\mathrm{V}}(a) - \dfrac{1}{3} f^{\mathrm{VII}}(a) + \cdots, \\ h^6 f^{(6)}(a) = f^{\mathrm{VI}}(a) - \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

und aus (XVII; 40) für die Intervallmitten

$$\text{(XVII; 42)} \quad \begin{cases} h\,f'\left(a + \dfrac{h}{2}\right) = f^{\mathrm{I}}\left(a + \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{24} f^{\mathrm{III}}\left(a + \dfrac{1}{2}\right) + \\ \qquad + \dfrac{3}{640} f^{\mathrm{V}}\left(a + \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{5}{7168} f^{\mathrm{VII}}\left(a + \dfrac{1}{2}\right) + \cdots, \\ h^2 f''\left(a + \dfrac{h}{2}\right) = f^{\mathrm{II}}\left(a + \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{5}{24} f^{\mathrm{IV}}\left(a + \dfrac{1}{2}\right) + \\ \qquad + \dfrac{259}{5760} f^{\mathrm{VI}}\left(a + \dfrac{1}{2}\right) - \cdots, \\ h^3 f'''\left(a + \dfrac{h}{2}\right) = f^{\mathrm{III}}\left(a + \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{8} f^{\mathrm{V}}\left(a + \dfrac{1}{2}\right) + \\ \qquad + \dfrac{37}{1920} f^{\mathrm{VII}}\left(a + \dfrac{1}{2}\right) - \cdots, \\ h^4 f^{(4)}\left(a + \dfrac{h}{2}\right) = f^{\mathrm{IV}}\left(a + \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{7}{24} f^{\mathrm{VI}}\left(a + \dfrac{1}{2}\right) + \cdots, \\ h^5 f^{(5)}\left(a + \dfrac{h}{2}\right) = f^{\mathrm{V}}\left(a + \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{5}{24} f^{\mathrm{VII}}\left(a + \dfrac{1}{2}\right) + \cdots, \\ h^6 f^{(6)}\left(a + \dfrac{h}{2}\right) = f^{\mathrm{VI}}\left(a + \dfrac{1}{2}\right) - \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Vergleicht man die Formelsysteme (XVII; 41) und (XVII; 42) miteinander, so erkennt man, daß die Abnahme der Koeffizienten für die geraden Ableitungen in (XVII; 41), für die ungeraden in (XVII; 42) rascher erfolgt. Man tut also gut daran, immer diejenigen Formeln zu benutzen, in welchen die im ENCKEschen Schema unmittelbar vorkommenden Differenzen erschei-

nen, nicht aber diejenigen, die sich auf die durch arithmetische Mittelbildung gewonnenen Zwischenwerte stützen.

Die Formelsysteme (XVII; 41) und (XVII; 42) lassen sich leicht umkehren. Man erhält dann die Differenzen als Funktionen der Differentialquotienten. So folgt aus (XVII; 41) nach kurzer Rechnung

$$
\text{(XVII; 43)}\quad \left\{\begin{aligned}
f^{\mathrm{I}}(a) &= h f'(a) + \frac{1}{6} h^3 f'''(a) + \frac{1}{120} h^5 f^{(5)}(a) + \\
&\quad + \frac{1}{5040} h^7 f^{(7)}(a) + \cdots, \\
f^{\mathrm{II}}(a) &= h^2 f''(a) + \frac{1}{12} h^4 f^{(4)}(a) + \frac{1}{360} h^6 f^{(6)}(a) + \cdots, \\
f^{\mathrm{III}}(a) &= h^3 f'''(a) + \frac{1}{4} h^5 f^{(5)}(a) + \frac{1}{40} h^7 f^{(7)}(a) + \cdots, \\
f^{\mathrm{IV}}(a) &= h^4 f^{(4)}(a) + \frac{1}{6} h^6 f^{(6)}(a) + \cdots, \\
f^{\mathrm{V}}(a) &= h^5 f^{(5)}(a) + \frac{1}{3} h^7 f^{(7)}(a) + \cdots, \\
f^{\mathrm{VI}}(a) &= h^6 f^{(6)}(a) + \cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}\right.
$$

ebenso aus (XVII; 42)

$$
\text{(XVII; 44)}\quad \left\{\begin{aligned}
f^{\mathrm{I}}\left(a + \frac{1}{2}\right) &= h f'\left(a + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{24} h^3 f'''\left(a + \frac{1}{2}\right) + \\
&\quad + \frac{1}{1920} h^5 f^{(5)}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{46080} h^7 f^{(7)}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \cdots, \\
f^{\mathrm{II}}\left(a + \frac{1}{2}\right) &= h^2 f''\left(a + \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{24} h^4 f^{(4)}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \\
&\quad + \frac{91}{5760} h^6 f^{(6)}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \cdots, \\
f^{\mathrm{III}}\left(a + \frac{1}{2}\right) &= h^3 f'''\left(a + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8} h^5 f^{(5)}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \\
&\quad + \frac{13}{1920} h^7 f^{(7)}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \cdots, \\
f^{\mathrm{IV}}\left(a + \frac{1}{2}\right) &= h^4 f^{(4)}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \frac{7}{24} h^6 f^{(6)}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \cdots, \\
f^{\mathrm{V}}\left(a + \frac{1}{2}\right) &= h^5 f^{(5)}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{24} h^7 f^{(7)}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \cdots, \\
f^{\mathrm{VI}}\left(a + \frac{1}{2}\right) &= h^6 f^{(6)}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right.
$$

Die Berechnung der Differentialquotienten aus dem Differenzenschema wird mit wachsender Ordnung immer ungenauer, einmal, weil der Differentialquotient r-ter Ordnung aus den Differenzen r-ter und höherer Ordnung gewonnen wird, die wegen der mit wachsender Ordnung immer mehr an Einfluß gewinnenden Abrundungsfehler ungenauer werden, sodann aber auch wegen des Faktors h^{-r}, der um so größer ausfällt, je kleiner die Schrittweite gewählt wird. Man wird also bei der interpolatorischen Bestimmung von Differentialquotienten die Schrittweite so groß wie möglich wählen. Diesem Vorgehen sind allerdings Grenzen gesetzt: Die Reihen konvergieren bei großer Schrittweite schlechter; außerdem sind die Bemerkungen zu beachten, die im vorigen Abschnitt über kurzperiodische Bestandteile der Funktion gemacht worden sind. Aus allen diesen Gründen wird man es nach Möglichkeit überhaupt vermeiden, Differentialquotienten durch Interpolation von Stützwerten zu berechnen. Dagegen ist es umgekehrt vorteilhaft, Differenzen aus Differentialquotienten zu ermitteln, sofern hierzu eine Möglichkeit besteht. Wir werden in den nächsten Abschnitten hiervon mehrfach Gebrauch machen. Auch wird sich zeigen, daß alle Umstände, durch die numerische Differentiationen erschwert werden, sich bei der numerischen Integration günstig auswirken.

Die nach zentralen Differenzen fortschreitenden Formeln für die Ableitungen erhält man am bequemsten, wenn man das oben beschriebene primitive Verfahren benutzt. Will man entsprechende Reihenentwicklungen aus den Interpolationsformeln (XVII; 10) oder (XVII; 13) herleiten, so benutzt man besser den Differentialoperator D, der, angewandt auf eine Funktion $f(t) = f(a + s\,h)$,

$$D f = \frac{df}{dt} = h^{-1} \frac{df}{ds}$$

liefert, so daß

$$h D f(t) = \frac{df}{ds}$$

ist. Aus der NEWTONschen Interpolationsformel

$$f(t) = \tau^s f(a) = (1 + \Delta)^s f(a)$$

für absteigende und

$$f(t) = (1 - \nabla)^{-s} f(a)$$

für aufsteigende Differenzen erhält man dann

$$\text{(XVII; 45)} \quad \left\{ \begin{aligned} h D f(t) &= \frac{d}{ds} (1 + \Delta)^s f(a) = \\ &= (1 + \Delta)^s \lg (1 + \Delta)\, f(a) = \lg (1 + \Delta)\, f(t) \quad \text{bzw.} \\ h D f(t) &= \frac{d}{ds} (1 - \nabla)^{-s} f(a) = \\ &= -(1 - \nabla)^{-s} \lg (1 - \nabla)\, f(a) = -\lg (1 - \nabla)\, f(t), \end{aligned} \right.$$

wobei

$$\lg(1+\Delta) = \Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \frac{1}{4}\Delta^4 + \cdots,$$

$$-\lg(1-\nabla) = \nabla + \frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3 + \frac{1}{4}\nabla^4 + \cdots$$

zu setzen ist. Für die Argumente der Stützwerte selbst, also für $s = 0$, wird dann einfach

$$hDf(a) = \lg(1+\Delta)\, f(a) = -\lg(1-\nabla)\, f(a).$$

Für n-fache Ableitung ergibt sich entsprechend

$$h^n D^n f(t) = \frac{d^n}{ds^n}(1+\Delta)^s f(a) = (1+\Delta)^s [\ln(1+\Delta)]^n f(a) =$$
$$= (1-\nabla)^{-s}[-\lg(1-\nabla)]^n f(a),$$

also für $s = 0$

$$\text{(XVII; 46)} \quad h^n D^n f(a) = \left(\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \frac{1}{4}\Delta^4 + \cdots\right)^n f(a) =$$
$$= \left(\nabla + \frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3 + \frac{1}{4}\nabla^4 + \cdots\right)^n f(a).$$

149. *Mechanische Quadratur. Einfache Integrale*

Die Entwicklungen (XVII; 45) und (XVII; 46) sind trotz ihrer eleganten Form für die praktische Berechnung von Differentialquotienten ephemeridenmäßig gegebener Funktionen noch weniger geeignet als die nach zentralen Differenzen fortschreitenden Reihen (XVII; 41) und (XVII; 42); denn sie bestimmen ja in jenen Fällen, in denen man auf sie angewiesen ist, die Ableitungen an den *Rändern* des durch Stützwerte belegten Intervalls. Dort werden aber die Ableitungen der Funktion durch die interpolierende ganze rationale Funktion noch schlechter dargestellt als die Funktion selbst (falls diese nicht selbst ganz und rational vom gleichen Grade ist).

Bei der Lösung der inversen Aufgabe, der *Integration* einer durch äquidistante Stützwerte gegebenen Funktion, wirken sich hingegen, wie schon im vorigen Abschnitt angedeutet wurde, alle Umstände günstig aus, die bei der Differentiation die Rechengenauigkeit herabsetzen.

Aus (XVII; 45),

$$\frac{df}{dt} = Df(t) = h^{-1}\lg(1+\Delta)\, f(t) = -h^{-1}\lg(1-\nabla)\, f(t),$$

oder

$$f(t) = \frac{hD}{\lg(1+\Delta)} f(t) = -\frac{hD}{\lg(1-\nabla)} f(t)$$

erhält man durch unbestimmte Integration, mit C als Integrationskonstante,

$$\int^{t=a+sh} f(t)\, dt = D^{-1} f(t) + C = \frac{h}{\lg(1+\Delta)} f(t) + C = -\frac{h}{\lg(1-\nabla)} f(t) + C.$$

Es ist ja umgekehrt

$$D[D^{-1}f(t) + C] = h^{-1}\lg(1+\Delta)\left[\frac{h}{\lg(1+\Delta)}f(t)\right] + DC = f(t);$$

denn es ist

$$DC = h^{-1}\lg(1+\Delta)\,C = h^{-1}\left(\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \cdots\right)C = 0,$$

da die Differenzen einer konstanten Funktion sämtlich verschwinden.

Für bestimmte Integrale über eine Schrittweite erhält man die zur extrapolatorischen bzw. interpolatorischen Integration geeigneten Formeln

$$\text{(XVII; 47)}\quad \begin{cases} \displaystyle\int\limits_a^{a+h} f(t)\,dt = D^{-1}[f(a+h) - f(a)] = h\frac{\Delta}{\lg(1+\Delta)}f(a), \\ \displaystyle\int\limits_{a-h}^{a} f(t)\,dt = D^{-1}[f(a) - f(a-h)] = h\frac{\Delta\tau^{-1}}{\lg(1+\Delta)}f(a) = \\ \displaystyle\qquad = h\frac{\Delta(1+\Delta)^{-1}}{\lg(1+\Delta)}f(a) \end{cases}$$

oder, wenn man den Operator ∇ verwendet,

$$\text{(XVII; 48)}\quad \begin{cases} \displaystyle\int\limits_a^{a+h} f(t)\,dt = -h\frac{\nabla\tau}{\lg(1-\nabla)}f(a) = -h\frac{\nabla(1-\nabla)^{-1}}{\lg(1-\nabla)}f(a), \\ \displaystyle\int\limits_{a-h}^{a} f(t)\,dt = -h\frac{\nabla}{\lg(1-\nabla)}f(a). \end{cases}$$

Für die Zwecke der numerischen Integration von Differentialgleichungen erster Ordnung sind die Formeln (XVII; 48) besonders wichtig. Wie schon in Abschnitt 142 bemerkt wurde, handelt es sich stets darum, eine Wertereihe $y(a+nh)$, die bis zur Abszisse a, also für ganze $n \leqq 0$, bereits vorliegt, durch Integration der Differentialgleichung $\dot{y} = f(t)$ für die folgenden Abszissen $a+h,\ a+2h, \ldots$ fortzusetzen. Da im Differenzenschema die von $f(a)$ schräg aufsteigenden Differenzen $\nabla f(a), \nabla^2 f(a), \ldots$ bis zu einer gewissen Ordnung bekannt sind, steht der Anwendung dieser Formeln zur näherungsweisen Berechnung der Integrale nichts im Wege. Der Ansatz

$$\frac{1}{h}\int\limits_{a-h}^{a} f(t)\,dt = -\frac{\nabla}{\lg(1-\nabla)}f(a) = (1 + a_1\nabla + a_2\nabla^2 + \cdots)\,f(a)$$

führt auf die Identität

$$(1 + a_1\nabla + a_2\nabla^2 + \cdots)\left(1 + \frac{1}{2}\nabla + \frac{1}{3}\nabla^2 + \cdots\right) = 1,$$

der Ansatz

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(t)\,dt = -\frac{\nabla(1-\nabla)^{-1}}{\lg(1-\nabla)} f(a) = (1 + b_1\nabla + b_2\nabla^2 + \cdots) f(a)$$

auf

$$(1 + b_1\nabla + b_2\nabla^2 + \cdots)(1-\nabla)\left(1 + \frac{1}{2}\nabla + \frac{1}{3}\nabla^2 + \cdots\right) =$$

$$= 1 = (1 + a_1\nabla + a_2\nabla^2 + \cdots)\left(1 + \frac{1}{2}\nabla + \frac{1}{3}\nabla^2 + \cdots\right)$$

oder

$$(1 + b_1\nabla + b_2\nabla^2 + \cdots)(1-\nabla) = 1 + a_1\nabla + a_2\nabla^2 + \cdots.$$

Durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich erhält man leicht die *Adamssche Interpolations- und Extrapolationsformel*

$$\text{(XVII; 49)}\quad \begin{cases} \text{a)} \displaystyle\int_{a-h}^{a} f(t)\,dt = h\left[1 - \frac{1}{2}\nabla - \frac{1}{12}\nabla^2 - \frac{1}{24}\nabla^3 - \frac{19}{720}\nabla^4 - \right. \\ \qquad\qquad \left. - \frac{3}{160}\nabla^5 - \frac{863}{60480}\nabla^6 - \cdots\right] f(a), \\ \text{b)} \displaystyle\int_{a}^{a+h} f(t)\,dt = h\left[1 + \frac{1}{2}\nabla + \frac{5}{12}\nabla^2 + \frac{3}{8}\nabla^3 + \frac{251}{720}\nabla^4 + \right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{95}{288}\nabla^5 + \frac{19087}{60480}\nabla^6 + \cdots\right] f(a) \end{cases}$$

sowie die Summe dieser beiden Integrale

$$\text{(XVII; 50)}\quad \int_{a-h}^{a+h} f(t)\,dt = 2h\left[1 + \frac{1}{6}\nabla^2 + \frac{1}{6}\nabla^3 + \frac{29}{180}\nabla^4 + \right.$$
$$\left. + \frac{7}{45}\nabla^5 + \frac{1139}{7560}\nabla^6 + \cdots\right] f(a).$$

Bei der schrittweisen Integration von Differentialgleichungen, wie sie in der speziellen Störungsrechnung auszuführen ist, werden die über einzelne Schrittweiten erstreckten Integrale fortlaufend aufsummiert. Das Integral

$$y(t) = \int_a^{t=a+nh} f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{a+(i-1)h}^{a+ih} f(t)\,dt$$

wird von einer unteren Grenze a aus schrittweise aufgebaut, wobei die Summanden etwa durch Differenzenreihen von der Form (XVII; 49b)

$$\int\limits_{a+(i-1)h}^{a+ih} f(t)\,dt = h\left[1 + \frac{1}{2}\nabla + \frac{5}{12}\nabla^2 + \frac{3}{8}\nabla^3 + \cdots\right] f[a + (i-1)\,h]$$

ausgedrückt werden. Es ist dann

$$\text{(XVII; 51)}\qquad y(t) = h\left[1 + \frac{1}{2}\nabla + \frac{5}{12}\nabla^2 + \frac{3}{8}\nabla^3 + \cdots\right] \sum_{i=1}^{n} f[a + (i-1)\,h].$$

Formeln dieser Art kann man durch einfachere ersetzen, wenn man das Schema der Differenzen nach links über die Funktionsspalte hinaus erweitert, wie es nachstehend angedeutet wird:

	2. Summe	1. Summe	Funktion	1. Differenz	2. Differenz
.			$f(a-2h)$		$\nabla^2 f(a-1)$
.		$\nabla^{-1} f(a-2)$		$\nabla f(a-1)$	
	$\nabla^{-2} f(a-2)$		$f(a-h)$		$\nabla^2 f(a)$
		$\nabla^{-1} f(a-1)$		$\nabla f(a)$	
	$\nabla^{-2} f(a-1)$		$f(a)$		$\nabla^2 f(a+1)$
		$\nabla^{-1} f(a)$		$\nabla f(a+1)$	
	$\nabla^{-2} f(a)$		$f(a+h)$		$\nabla^2 f(a+2)$
.		$\nabla^{-1} f(a+1)$		$\nabla f(a+2)$	
.	$\nabla^{-2} f(a+1)$		$f(a+2h)$		

In jeder schräg aufwärts führenden Reihe stehen dann alle positiven und negativen Potenzen des Operators ∇, die auf einen Funktionswert mit gleichem Argument anzuwenden sind, und es ist dann auch, den Regeln der Algebra entsprechend,

$$\nabla^0 = 1; \quad \nabla^0 f(a) = f(a).$$

Die Elemente jeder Spalte dieses Schemas sind dann als erste Differenzen der Elemente der links benachbarten Spalte definiert; es ist also allgemein

$$\nabla^n f(a) = \nabla^{n-1} f(a) - \nabla^{n-1} f(a-1) = \nabla^{n-1}(1-\tau^{-1})\, f(a) = \nabla^{n-1}\nabla f(a)$$

für beliebiges ganzes n, die Null eingeschlossen.

Da nun die Folge der Funktionen $f(a + n\,h)$ selbst durch die Anfangsbedingungen des Problems eindeutig festgelegt sind, so gilt dasselbe auch für die Differenzen $\nabla^n f$ $(n > 0)$, aber nicht für die sich links der Funktionsspalte anschließenden „Summen" $\nabla^{-n} f$; denn es gilt ja z.B. für die Summen erster Ordnung

$$\nabla^{-1} f(a) - \nabla^{-1} f(a-h) = f(a),$$

so daß man zu jedem Element der ∇^{-1}-Spalte eine willkürliche Konstante C_1 hinzufügen kann, ohne daß sich die f-Werte ändern. Ebenso kann man der ∇^{-2}-Spalte eine weitere willkürliche Konstante C_2 hinzufügen, ohne daß dies

Einfluß auf die durch Wahl von C_1 „geeichten" ersten Summen hätte. Die Elemente der zweiten Summenspalte enthalten also zwei willkürliche Konstante; in derselben Weise erfordern die Summen n-ter Ordnung n Konstante $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Sie verhalten sich also wie n-fache Integrale, die erst nach Festsetzung von n Integrationskonstanten bestimmte Werte annehmen.

Nach Definition ist nun

$$\begin{aligned} f(a) + f(a+h) + \cdots + f[a+(n-1)h] = \\ = \{\nabla^{-1} f(a) - \nabla^{-1} f(a-h)\} + \{\nabla^{-1} f(a+h) - \nabla^{-1} f(a)\} + \cdots \\ + \{\nabla^{-1} f[a+(n-1)h] - \nabla^{-1} f[a+(n-2)h]\} = \\ = \nabla^{-1} f[a+(n-1)h] - \nabla^{-1} f(a-h), \end{aligned}$$

also kann man (XVII; 51) auch in der Form

$$\begin{aligned} F(a+nh) - F(a) = \frac{1}{h}\int_a^{a+nh} f(t)\,dt = \left\{1 + \frac{1}{2}\nabla + \frac{5}{12}\nabla^2 + \frac{3}{8}\nabla^3 + \cdots\right\} \times \\ \times \{\nabla^{-1} f[a+(n-1)h] - \nabla^{-1} f(a-h)\} = \\ = \left\{\nabla^{-1} + \frac{1}{2} + \frac{5}{12}\nabla + \frac{3}{8}\nabla^2 + \cdots\right\}\{f[a+(n-1)h] - f(a-h)\} \end{aligned}$$

schreiben. Dieser Ausdruck wird aber einfacher, wenn man die Konstante C_1 so festlegt, daß

$$\left[\nabla^{-1} + \frac{1}{2} + \frac{5}{12}\nabla + \frac{3}{8}\nabla^2 + \cdots\right] f(a-h) = C_1 = F(a)$$

ist, wobei $F(a)$ entweder willkürlich vorgegeben oder durch die Theorie vorgeschrieben, in besonderen Fällen[1]) auch gleich Null gesetzt werden kann.

Dieses Integral ist also bestimmbar, wenn die Funktionsfolge bis zum Argument $a + (n-1)h$ bekannt ist, da dann auch sämtliche Differenzen und die Summe $\nabla^{-1} f$ mit den gleichen Argumenten bekannt sind. Mit dem Integral $F(a+nh)$ ist aber aus der Differentialgleichung

$$\frac{dF}{dt} = f(F, t)$$

auch $f(a+nh)$ bekannt, und man kann mit dem nächsten Integrationsschritt beginnen.

Die Reihen (XVII; 49b) und (XVII; 50) sind verhältnismäßig schwach konvergent (falls sie überhaupt konvergieren, was hier vorausgesetzt werden soll). Da sie aber den Faktor h enthalten, liefern sie stets gute Näherungswerte für die Integrale, wenn nur die Schrittweite genügend klein gewählt wird und genügend viele Stützwerte, also auch Differenzen genügend hoher

[1]) Zum Beispiel, wenn $F(t)$ eine „Störung" ist und $t = a$ die Oskulationsepoche bedeutet, für die die Störung verschwindet.

Ordnung, schon bekannt sind. Viel besser konvergieren natürlich Entwicklungen der Integrale, die nach *zentralen* Differenzen fortschreiten; sie erfordern aber die Kenntnis von Funktionswerten, deren Argumente weit über die Grenzen des zu bestimmenden Integrals übergreifen, also auch von solchen, die noch unbekannt sind. Sind etwa die Funktionswerte bis zum Argument a gegeben, so ist die strenge Berechnung der zentralen Differenzen bis zur Ordnung $2n$, also bis

$$f^{(2n)}(a) = \nabla^{2n} f(a + n\,h)$$

einschließlich, nur möglich, wenn auch die Funktionen bis $f(a + n\,h)$ vorliegen. Trotzdem finden die Integralformeln mit zentralen Differenzen vielfach Verwendung, vor allem natürlich als gute und bequem anwendbare Kontrollen. Es lassen sich aber mit ihrer Hilfe auch rasch konvergente iterative Methoden zur numerischen Integration von Differentialgleichungen aufbauen. Man kann die Differenzen niederer Ordnung oft durch die aus der Theorie bekannten Differentialquotienten genähert ausdrücken [vgl. (XVII; 43) und (XVII; 44)], während die höheren Differenzen wegen der kleinen Koeffizienten, mit denen sie behaftet sind, meist genau genug durch Extrapolation abgeschätzt werden. In den klassischen Methoden der speziellen Störungsrechnung werden Integralentwicklungen nach zentralen Differenzen gern benutzt, da sie für Handrechnung überaus bequem sind. Dagegen werden die oben abgeleiteten ∇-Formeln bei maschineller, insbesondere elektronischer, Rechnung bevorzugt, da sie weniger Zwischenüberlegungen erfordern, also die Programmierung erleichtern, und da die Berechnung vieler Summanden für schnelle Rechenanlagen keinen wesentlichen Zeitaufwand bedeutet.

Eine der nützlichsten Integraldarstellungen durch zentrale Differenzen hat die Form

$$\frac{1}{2h}\int\limits_{a-h}^{a+h} f(t)\,dt = f(a) + k_2 f^{\mathrm{II}}(a) + k_4 f^{\mathrm{IV}}(a) + k_6 f^{\mathrm{VI}}(a) + \cdots.$$

Diese Reihe enthält nur Differenzen gerader Ordnung mit rasch abnehmenden Koeffizienten. Führt man die Operatoren (XVII; 21) ein, die für gerade Differenzen δ, δ^2, δ^3, ... sind, wobei

$$\delta = \Delta\nabla; \quad \delta f(a) = f^{\mathrm{II}}(a); \quad \delta^2 f(a) = f^{\mathrm{IV}}(a); \quad \ldots; \quad \delta^n f(a) = f^{(2n)}(a)$$

gesetzt ist, so kann man diese Reihe leicht aus den oben angegebenen Δ- und ∇-Reihen ableiten. Man stelle der Reihe (XVII; 49a)

$$\text{(XVII; 52)} \qquad \frac{1}{h}\int\limits_{a-h}^{a} f(t)\,dt =$$

$$= \left[1 - \frac{1}{2}\nabla - \frac{1}{12}\nabla^2 - \frac{1}{24}\nabla^3 - \frac{19}{720}\nabla^4 - \frac{3}{160}\nabla^5 - \frac{863}{60480}\nabla^6 - \cdots\right] f(a)$$

die Δ-Formel

(XVII; 53)
$$\frac{1}{h}\int\limits_a^{a+h} f(t)\,dt =$$
$$= \left[1 + \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{12}\Delta^2 + \frac{1}{24}\Delta^3 - \frac{19}{720}\Delta^4 + \frac{3}{160}\Delta^5 - \frac{863}{60480}\Delta^6 + \cdots\right] f(a)$$

gegenüber, die man erhält, wenn man bedenkt, daß

$$\frac{1}{h}\int\limits_{a-h}^{a} f(t)\,dt = -\frac{\nabla}{\lg(1-\nabla)} f(a); \quad \frac{1}{h}\int\limits_a^{a+h} f(t)\,dt = \frac{\Delta}{\lg(1+\Delta)} f(a)$$

geschrieben werden kann. Es geht also (XVII; 53) aus (XVII; 52) hervor, indem man $-\nabla$ mit Δ vertauscht. Bildet man aus beiden Ausdrücken das arithmetische Mittel, so ergibt sich zunächst

$$\frac{1}{2h}\int\limits_{a-h}^{a+h} f(t)\,dt =$$
$$= \left[1 + \frac{1}{4}(\Delta - \nabla) - \frac{1}{24}(\Delta^2 + \nabla^2) + \frac{1}{48}(\Delta^3 - \nabla^3) - \frac{19}{1440}(\Delta^4 + \nabla^4) + \cdots\right] f(a).$$

Nun ist aber $\delta = \Delta - \nabla = \Delta\nabla$, also

$$\Delta^2 + \nabla^2 = \delta^2 + 2\Delta\nabla = \delta^2 + 2\delta,$$
$$\Delta^3 - \nabla^3 = \delta(\Delta^2 + \Delta\nabla + \nabla^2) = \delta(\delta^2 + 3\delta) = \delta^3 + 3\delta^2,$$
$$\Delta^4 + \nabla^4 = (\delta^2 + 2\delta)^2 - 2\Delta^2\nabla^2 = \delta^4 + 4\delta^3 + 2\delta^2,$$
$$\Delta^5 - \nabla^5 = \delta(\Delta^4 + \Delta^3\nabla + \Delta^2\nabla^2 + \Delta\nabla^3 + \nabla^4) = \delta^5 + 5\delta^4 + 5\delta^3,$$
$$\Delta^6 + \nabla^6 = (\delta^3 + 3\delta^2)^2 + 2\Delta^3\nabla^3 = \delta^6 + 6\delta^5 + 9\delta^4 + 2\delta^3,$$

Setzt man dies ein und ordnet nach Potenzen von δ, so erhält man

(XVII; 54)
$$\int\limits_{a-h}^{a+h} f(t)\,dt = 2h\left[1 + \frac{1}{6}\delta - \frac{1}{180}\delta^2 + \frac{1}{1512}\delta^3 - \cdots\right] f(a) =$$
$$= 2h\left[f(a) + \frac{1}{6}f^{\mathrm{II}}(a) - \frac{1}{180}f^{\mathrm{IV}}(a) + \frac{1}{1512}f^{\mathrm{VI}}(a) - \cdots\right]$$

mit einem Restglied $<\beta\, h^9\, |d^8 f(\xi)/dt^8|$ mit sehr kleinem Koeffizienten β, das man in allen praktischen Fällen vernachlässigen darf.

In ähnlicher Weise lassen sich alle in den klassischen Methoden der speziellen Störungsrechnung verwendeten, nach zentralen Differenzen fortschreitenden Integralformeln mit mehr oder weniger Mühe aus den oben entwickelten Δ- und ∇-Reihen ableiten. Bequemer gewinnt man sie aber auf elementare Art aus den Interpolationsformeln von STIRLING und BESSEL. Wir benutzen dazu wieder die ENCKEschen Symbole

$$f^{\mathrm{I}}\left(a-\frac{1}{2}\right)=\nabla f(a);\quad f^{\mathrm{II}}(a-1)=\nabla^2 f(a);\quad f^{\mathrm{III}}\left(a-\frac{3}{2}\right)=\nabla^3 f(a);\quad \ldots$$

und die arithmetischen Mittel

$$f^{\mathrm{I}}(a)=\frac{1}{2}\left[f^{\mathrm{I}}\left(a-\frac{1}{2}\right)+f^{\mathrm{I}}\left(a+\frac{1}{2}\right)\right];$$

$$f^{\mathrm{III}}(a)=\frac{1}{2}\left[f^{\mathrm{III}}\left(a-\frac{1}{2}\right)+f^{\mathrm{III}}\left(a+\frac{1}{2}\right)\right];$$

bzw.

$$f\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[f(a)+f(a+1)\right];$$

$$f^{\mathrm{II}}\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[f^{\mathrm{II}}(a)+f^{\mathrm{II}}(a+1)\right];\quad \ldots$$

Ferner definieren wir die Summen erster, zweiter und höherer Ordnung durch

$${}^{\mathrm{I}}f\left(a+\frac{1}{2}\right)=\nabla^{-1}f(a);\quad {}^{\mathrm{II}}f(a+1)=\nabla^{-2}f(a);\quad \ldots,$$

Größen, die durch zweckmäßige Wahl von additiven Konstanten $C_1, C_2, \ldots$ geeicht werden müssen. Schließlich wird man auch die Elemente der Summenspalten nötigenfalls durch arithmetische Mittel aufeinanderfolgender Summenwerte,

$${}^{\mathrm{I}}f(a)=\frac{1}{2}\left[{}^{\mathrm{I}}f\left(a-\frac{1}{2}\right)+{}^{\mathrm{I}}f\left(a+\frac{1}{2}\right)\right];\quad \ldots,$$

$${}^{\mathrm{II}}f\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[{}^{\mathrm{II}}f(a)+{}^{\mathrm{II}}f(a+1)\right];\quad \ldots$$

usw. ergänzen. Alle einfachen Integrale der Funktion über ganze und halbe Schrittweiten lassen sich dann auf Elementarintegrale zurückführen, die man durch Integration aus den Interpolationsformeln von STIRLING (XVII; 37) und BESSEL (XVII; 39) erhält. Allgemein sei

$$F(a+s\,h)=\frac{1}{h}\int^{a+sh} f(t)\,dt=\int^{s} f(a+s\,h)\,ds,$$

also, wenn $f(a + s\,h)$ nach (XVII; 37) bzw. $f(a - h/2 + s\,h)$ nach (XVII; 39) entwickelt wird,

$$\text{(XVII; 55)}\quad F(a + s\,h) = C_1 + s\,f(a) + \frac{s^2}{2} f^{\mathrm{I}}(a) + \frac{s^3}{6} f^{\mathrm{II}}(a) +$$

$$+ \left(\frac{s^4}{24} - \frac{s^2}{12}\right) f^{\mathrm{III}}(a) + \left(\frac{s^5}{120} - \frac{s^3}{72}\right) f^{\mathrm{IV}}(a) + \left(\frac{s^6}{720} - \frac{s^4}{96} + \frac{s^2}{60}\right) f^{\mathrm{V}}(a) +$$

$$+ \left(\frac{s^7}{5040} - \frac{s^5}{720} + \frac{s^3}{540}\right) f^{\mathrm{VI}}(a) + \cdots,$$

$$\text{(XVII; 56)}\quad F\left(a - \frac{h}{2} + s\,h\right) = C_1' + s\,f\left(a - \frac{1}{2}\right) + \frac{s^2}{2} f^{\mathrm{I}}\left(a - \frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \left(\frac{s^3}{6} - \frac{s}{8}\right) f^{\mathrm{II}}\left(a - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{s^4}{24} - \frac{s^2}{48}\right) f^{\mathrm{III}}\left(a - \frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \left(\frac{s^5}{120} - \frac{5s^3}{144} + \frac{3s}{128}\right) f^{\mathrm{IV}}\left(a - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{s^6}{720} - \frac{s^4}{192} + \frac{3s^2}{1280}\right) f^{\mathrm{V}}\left(a - \frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \left(\frac{s^7}{5040} - \frac{7s^5}{2880} + \frac{259s^3}{34560} - \frac{5s}{1024}\right) f^{\mathrm{VI}}\left(a - \frac{1}{2}\right) + \cdots.$$

Hierbei bedeuten C_1 und C_1' Integrationskonstanten, die bei der Bildung bestimmter Integrale herausfallen. Schreiben wir abgekürzt

$$F(a + s\,h) = F(s); \quad F\left(a - \frac{h}{2} + s\,h\right) = F\left(s - \frac{1}{2}\right),$$

so ist

$$C_1 = F(0) = \int^{0} f(s)\,ds; \quad C_1' = F\left(-\frac{1}{2}\right) = \int^{-1/2} f(s)\,ds.$$

Zwischen C_1 und C_1' besteht also die Beziehung

$$C_1 - C_1' = F(0) - F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{h} \int_{a - 1/2\,h}^{a} f(t)\,dt = \int_{-1/2}^{0} f(s)\,ds$$

oder, wenn wir dieses Integral aus (XVII; 55) oder (XVII; 56) berechnen,

$$C_1 - C_1' = \frac{1}{2} f(a) - \frac{1}{8} f^{\mathrm{I}}(a) + \frac{1}{48} f^{\mathrm{II}}(a) + \frac{7}{384} f^{\mathrm{III}}(a) -$$

$$- \frac{17}{11520} f^{\mathrm{IV}}(a) - \frac{163}{46080} f^{\mathrm{V}}(a) + \cdots$$

bzw.

$$C_1 - C_1' = \frac{1}{2} f\left(a - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8} f^{\mathrm{I}}\left(a - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{24} f^{\mathrm{II}}\left(a - \frac{1}{2}\right) -$$
$$- \frac{1}{384} f^{\mathrm{III}}\left(a - \frac{1}{2}\right) + \frac{11}{1440} f^{\mathrm{IV}}\left(a - \frac{1}{2}\right) + \frac{13}{46080} f^{\mathrm{V}}\left(a - \frac{1}{2}\right) - \cdots.$$

Diese beiden Reihen sind identisch, wie man nachweist, indem man in der ersten

$$f^{\mathrm{I}}(a) = f^{\mathrm{I}}\left(a - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} f^{\mathrm{II}}(a); \quad f^{\mathrm{III}}(a) = f^{\mathrm{III}}\left(a - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} f^{\mathrm{IV}}(a);$$

und in der zweiten

$$f\left(a - \frac{1}{2}\right) = f(a) - \frac{1}{2} f^{\mathrm{I}}\left(a - \frac{1}{2}\right);$$
$$f^{\mathrm{II}}\left(a - \frac{1}{2}\right) = f^{\mathrm{II}}(a) - \frac{1}{2} f^{\mathrm{III}}\left(a - \frac{1}{2}\right); \quad \ldots$$

definitionsgemäß einsetzt. Beide Male ergibt sich übereinstimmend

$$\text{(XVII; 57)} \quad C_1 - C_1' = F(0) - F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} f(a) - \frac{1}{8} f^{\mathrm{I}}\left(a - \frac{1}{2}\right) -$$
$$- \frac{1}{24} f^{\mathrm{II}}(a) + \frac{7}{384} f^{\mathrm{III}}\left(a - \frac{1}{2}\right) + \frac{11}{1440} f^{\mathrm{IV}}(a) - \frac{163}{46080} f^{\mathrm{V}}\left(a - \frac{1}{2}\right) - \cdots.$$

Für die über eine Schrittlänge erstreckten Elementarintegrale erhält man aus der STIRLINGschen Formel (XVII; 55)

$$\text{(XVII; 58)} \quad \frac{1}{h} \int_{a-h}^{a} f(t)\, dt = \int_{-1}^{0} f(s)\, ds = F(0) - F(-1) = f(a) - \frac{1}{2} f^{\mathrm{I}}(a) +$$
$$+ \frac{1}{6} f^{\mathrm{II}}(a) + \frac{1}{24} f^{\mathrm{III}}(a) - \frac{1}{180} f^{\mathrm{IV}}(a) - \frac{11}{1440} f^{\mathrm{V}}(a) + \frac{1}{1512} f^{\mathrm{VI}}(a) + \cdots$$

und

$$\text{(XVII; 59)} \quad \frac{1}{h} \int_{a}^{a+h} f(t)\, dt = \int_{0}^{1} f(s)\, ds = F(1) - F(0) = f(a) + \frac{1}{2} f^{\mathrm{I}}(a) +$$
$$+ \frac{1}{6} f^{\mathrm{II}}(a) - \frac{1}{24} f^{\mathrm{III}}(a) - \frac{1}{180} f^{\mathrm{IV}}(a) + \frac{11}{1440} f^{\mathrm{V}}(a) + \frac{1}{1512} f^{\mathrm{VI}}(a) - \cdots.$$

Bildet man aus (XVII; 58) und (XVII; 59) das arithmetische Mittel, so folgt die schon weiter oben auf andere Weise abgeleitete Formel (XVII; 54):

(XVII; 60)

$$\frac{1}{2h} \int_{a-h}^{a+h} f(t)\, dt = \int_{-1}^{1} f(s)\, ds = f(a) + \frac{1}{6} f^{\mathrm{II}}(a) - \frac{1}{180} f^{\mathrm{IV}}(a) + \frac{1}{1512} f^{\mathrm{VI}}(a) - \cdots,$$

die nur gerade Differenzen enthält und sich durch rasche Konvergenz und einfache Koeffizienten auszeichnet.[1]) Ebenfalls aus (XVII; 55) wird die häufig benutzte Reihe

$$\text{(XVII; 61)}\quad \frac{1}{h}\int\limits_{a-h/2}^{a+h/2} f(t)\,dt = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) = f(a) + \frac{1}{24} f^{\mathrm{II}}(a) - \frac{17}{5760} f^{\mathrm{IV}}(a) + \frac{367}{967680} f^{\mathrm{VI}}(a) - \cdots$$

gewonnen. Mit Hilfe der BESSELschen Formel (XVII; 56) findet man, mit $a + h$ statt a, die Entwicklung

$$\text{(XVII; 62)}\quad \frac{1}{h}\int\limits_{a}^{a+h} f(t)\,dt = F(1) - F(0) = f\left(a+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{12} f^{\mathrm{II}}\left(a+\frac{1}{2}\right) + \frac{11}{720} f^{\mathrm{IV}}\left(a+\frac{1}{2}\right) - \frac{191}{60480} f^{\mathrm{VI}}\left(a+\frac{1}{2}\right) + \cdots$$

für das zwischen den Grenzen a und $a + h$ erstreckte Elementarintegral.

Aus den Elementarintegralen lassen sich dann Integrale über beliebig viele aufeinanderfolgende Intervalle durch Aufsummieren bilden. So folgt aus (XVII; 61)

$$\text{(XVII; 63)}\quad \frac{1}{h}\int\limits_{a-{}^1/_2 h}^{a+(k+{}^1/_2)h} f(t)\,dt = F\left(k+\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) = \sum_{i=0}^{k}\left\{f(a+i) + \frac{1}{24} f^{\mathrm{II}}(a+i) - \frac{17}{5760} f^{\mathrm{IV}}(a+i) + \frac{367}{967680} f^{\mathrm{VI}}(a+i) - \cdots\right\}.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k} f^{\mathrm{II}}(a+i) &= f^{\mathrm{II}}(a) + f^{\mathrm{II}}(a+1) + \cdots + f^{\mathrm{II}}(a+k) = \\ &= \left[f^{\mathrm{I}}\left(a+\frac{1}{2}\right) - f^{\mathrm{I}}\left(a-\frac{1}{2}\right)\right] + \left[f^{\mathrm{I}}\left(a+\frac{3}{2}\right) - f^{\mathrm{I}}\left(a+\frac{1}{2}\right)\right] + \\ &\quad \cdots + \left[f^{\mathrm{I}}\left(a+k+\frac{1}{2}\right) - f^{\mathrm{I}}\left(a+k-\frac{1}{2}\right)\right] = \\ &= f^{\mathrm{I}}\left(a+k+\frac{1}{2}\right) - f^{\mathrm{I}}\left(a-\frac{1}{2}\right),\end{aligned}$$

---

[1]) Bricht man diese Reihe bei dem Glied 2. Ordnung ab, so erhält man die SIMPSON*sche Formel*

$$\frac{1}{2h}\int\limits_{a-h}^{a+h} f(t)\,dt = \frac{1}{6}\left[f(a-h) + 4f(a) + f(a+h)\right].$$

und entsprechende Beziehungen gelten für die Summen über alle höheren geraden Differenzen. Für die Funktionswerte selbst kann man setzen:

$$\text{(XVII; 64)} \quad \sum_{i=0}^{k} f(a+i) = f(a) + f(a+h) + \cdots + f(a+kh) = \\ = {}^{\mathrm{I}}f\left(a+k+\frac{1}{2}\right) - {}^{\mathrm{I}}f\left(a-\frac{1}{2}\right).$$

Die Beziehung (XVII; 64) bleibt bestehen, wenn man zu den Elementen der ersten Summenspalte eine beliebige Konstante addiert oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn man irgendeinen Wert dieser Spalte, etwa ${}^{\mathrm{I}}f(a - {}^1/_2)$, beliebig vorgibt. Aus (XVII; 63) erhält man dann

$$\frac{1}{h}\int\limits_{a-{}^1/_2 h}^{a+(k+{}^1/_2)h} f(t)\,dt = F\left(k+\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) = {}^{\mathrm{I}}f\left(a+k+\frac{1}{2}\right) + \\ + \frac{1}{24} f^{\mathrm{I}}\left(a+k+\frac{1}{2}\right) - \frac{17}{5760} f^{\mathrm{III}}\left(a+k+\frac{1}{2}\right) + \cdots - \\ - \left\{{}^{\mathrm{I}}f\left(a-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{24} f^{\mathrm{I}}\left(a-\frac{1}{2}\right) - \frac{17}{5760} f^{\mathrm{III}}\left(a-\frac{1}{2}\right) + \cdots\right\}.$$

Ist der spezielle Wert $F(-{}^1/_2)$ des unbestimmten Integrals durch Festsetzung der Integrationskonstanten vorgegeben, so ist damit auch der Anfangswert

$$\text{(XVII; 65)} \quad {}^{\mathrm{I}}f\left(a-\frac{1}{2}\right) = F\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{24} f^{\mathrm{I}}\left(a-\frac{1}{2}\right) + \frac{17}{5760} f^{\mathrm{III}}\left(a-\frac{1}{2}\right) - \\ - \frac{367}{967680} f^{\mathrm{V}}\left(a-\frac{1}{2}\right) + \cdots$$

der Summenspalte bestimmt. Durch (XVII; 65) läßt sich also die Folge der ersten Summen „eichen". Bedeutet $F(t)$ eine „Störung" und ist $t = a - {}^1/_2 h$ die Oskulationsepoche, für die $F(t) = 0$ ist, so kann man in der Eichungsformel (XVII; 65) $F(-{}^1/_2) = 0$ setzen. Nach vollzogener Eichung ist für beliebiges ganzes k

$$\text{(XVII; 66)} \quad \frac{1}{h}\int\limits_{a-{}^1/_2 h}^{a+(k+{}^1/_2)h} f(t)\,dt = {}^{\mathrm{I}}f\left(a+k+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{24} f^{\mathrm{I}}\left(a+k+\frac{1}{2}\right) - \\ - \frac{17}{5760} f^{\mathrm{III}}\left(a+k+\frac{1}{2}\right) + \frac{367}{967680} f^{\mathrm{V}}\left(a+k+\frac{1}{2}\right) - \cdots.$$

Aus (XVII; 62) folgt durch Aufsummieren eine Formel für Integrale, deren Grenzen mit den äquidistanten Argumenten der Stützwerte der zu integrierenden Funktion übereinstimmen:

$$\text{(XVII; 67)}\quad \frac{1}{h}\int\limits_a^{a+kh} f(t)\,dt = F(k) - F(0) = \sum_{i=1}^{k}\left\{f\left(a+i-\frac{1}{2}\right) - \right.$$

$$-\frac{1}{12}f^{\mathrm{II}}\left(a+i-\frac{1}{2}\right) - \frac{11}{720}f^{\mathrm{IV}}\left(a+i-\frac{1}{2}\right) -$$

$$\left. - \frac{191}{60480}f^{\mathrm{VI}}\left(a+i-\frac{1}{2}\right) + \cdots\right\}.$$

Nun ist aber den oben gegebenen Definitionen zufolge

$$\sum_{i=1}^{k} f^{(2n)}\left(a+i-\frac{1}{2}\right) = f^{(2n-1)}(a+k) - f^{(2n-1)}(a)$$

und daher nach (XVII; 67)

$$\frac{1}{h}\int\limits_a^{a+kh} f(t)\,dt = F(k) - F(0) =$$

$$= {}^{\mathrm{I}}f(a+k) - \frac{1}{12}f^{\mathrm{I}}(a+k) + \frac{11}{720}f^{\mathrm{III}}(a+k) -$$

$$- \frac{191}{60480}f^{\mathrm{V}}(a+k) + \cdots$$

$$- \left\{{}^{\mathrm{I}}f(a) - \frac{1}{12}f^{\mathrm{I}}(a) + \frac{11}{720}f^{\mathrm{III}}(a) - \frac{191}{60480}f^{\mathrm{V}}(a) + \cdots\right\}.$$

Man setze also zur Eichung der ersten Summenspalte

$$\text{(XVII; 68)}\quad {}^{\mathrm{I}}f(a) = F(0) + \frac{1}{12}f^{\mathrm{I}}(a) - \frac{11}{720}f^{\mathrm{III}}(a) + \frac{191}{60480}f^{\mathrm{V}}(a) - \cdots,$$

wobei $F(0)$ durch die Theorie vorgeschrieben ist, z. B. (bei Störungsproblemen) durch die Festsetzung $F(0) = 0$, wenn $t = a$ die Epoche der Oskulation ist. Für beliebiges ganzes k wird dann

$$\text{(XVII; 69)}\quad \frac{1}{h}\int\limits_a^{a+kh} f(t)\,dt = {}^{\mathrm{I}}f(a+k) - \frac{1}{12}f^{\mathrm{I}}(a+k) + \frac{11}{720}f^{\mathrm{III}}(a+k) -$$

$$- \frac{191}{60480}f^{\mathrm{V}}(a+k) + \cdots.$$

Die Formeln (XVII; 65) und (XVII; 68) zur Eichung der Summenspalte gehen ineinander über, wenn man (XVII; 57) berücksichtigt. Subtrahiert man

nämlich (XVII; 65) von (XVII; 68), so folgt

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{I}}f(a) - {}^{\mathrm{I}}f\left(a - \frac{1}{2}\right) &= F(0) - F\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{12} f^{\mathrm{I}}(a) - \frac{11}{720} f^{\mathrm{III}}(a) + \\
&+ \frac{191}{60480} f^{\mathrm{V}}(a) - \cdots + \frac{1}{24} f^{\mathrm{I}}\left(a - \frac{1}{2}\right) - \frac{17}{5760} f^{\mathrm{III}}\left(a - \frac{1}{2}\right) + \\
&+ \frac{367}{967680} f^{\mathrm{V}}\left(a - \frac{1}{2}\right) - \cdots.
\end{aligned}
$$

Nun ist aber nach Definition

$$
{}^{\mathrm{I}}f(a) = {}^{\mathrm{I}}f\left(a - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} f(a); \quad f^{\mathrm{I}}(a) = f^{\mathrm{I}}\left(a - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} f^{\mathrm{II}}(a); \quad \ldots
$$

Setzt man dies ein, so ergibt sich nach kurzer Rechnung (XVII; 57).

150. *Mechanische Quadratur. Doppelintegrale*

Im vorigen Abschnitt haben wir folgendes Verfahren zur numerischen Integration von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$
\frac{dy}{dt} = f(y, t) = f[y(t), t] = f(t)
$$

vorgeschlagen: Es seien $f(t)$ und $y(t)$ für äquidistante Argumente $t = a + n h$ bis zum Argument a einschließlich bekannt. Dann gelten die Formeln (XVII; 48) und (XVII; 49):

$$
\text{(XVII; 70)} \quad
\left\{
\begin{aligned}
\Delta y(a - h) &= y(a) - y(a - h) = \int_{a-h}^{a} f(t)\, dt = \\
&= -\frac{h\nabla}{\lg(1 - \nabla)} f(a) = h \sum_{i=0}^{n} a_i \nabla^i f(a) + R_{n+1}, \\
\Delta y(a) &= y(a + h) - y(a) = \int_{a}^{a+h} f(t)\, dt = \\
&= -\frac{h\nabla(1 - \nabla)^{-1}}{\lg(1 - \nabla)} f(a) = h \sum_{i=0}^{n} b_i \nabla^i f(a) + S_{n+1}
\end{aligned}
\right.
$$

mit den Koeffizienten a_i, b_i ($a_0 = b_0 = 1$) und gewissen Restgliedern R, S, die vernachlässigt werden dürfen, wenn die Differenzen $\nabla^i f(a)$ bis zu einer genügend hohen Ordnung n berücksichtigt worden sind. Die zweite dieser Adamsschen *Formeln* dient der extrapolatorischen Berechnung von $f(a + h) = f[y(a + h), t]$, während die erste als Interpolationsformel zur iterativen Verbesserung bzw. Kontrolle der Ordinaten $f(a)$ bzw. $y(a)$ geeignet ist.

Ähnlich verfährt man bei der numerischen Lösung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung von der Form

$$
\frac{d^2y}{dt^2} = f(y, t),
$$

indem man

$$\Delta^2 y(a-2h) = \Delta y(a-h) - \Delta y(a-2h) = y(a) - 2y(a-h) + y(a-2h),$$
$$\Delta^2 y(a-h) = \Delta y(a) - \Delta y(a-h) = y(a+h) - 2y(a) + y(a-h)$$

als Interpolations- bzw. Extrapolationsformel benutzt. Hierbei ist nun wegen $D = -h^{-1}\lg(1-\nabla)$

$$y(t) = D^{-2} f(t) = \iint^{t=a+sh} f(t)\,dt + C_1 t + C_2 = \frac{h^2}{[\lg(1-\nabla)^2]} f(t) + C_1 t + C_2$$

mit C_1 und C_2 als Integrationskonstanten, also

$$\Delta y(a) = \frac{h^2}{[\lg(1-\nabla)]^2}\Delta f(a) + C_1 h = \frac{h^2\nabla(1-\nabla)^{-1}}{[\lg(1-\nabla)]^2} f(a) + C_1 h,$$
$$\Delta y(a-h) = \frac{h^2\nabla(1-\nabla)^{-1}}{[\lg(1-\nabla)]^2} f(a-h) + C_1 h$$

wegen $\Delta = \nabla(1-\nabla)^{-1}$, und daher

$$\text{(XVII; 71)}\quad \begin{cases} \Delta^2 y(a-h) = \dfrac{h^2\nabla(1-\nabla)^{-1}}{[\lg(1-\nabla)]^2}\{f(a) - f(a-h)\} = \\ \quad = \dfrac{h^2\nabla^2(1-\nabla)^{-1}}{[\lg(1-\nabla)]^2} f(a) = h^2\sum\limits_{i=0}^{n} d_i\nabla^i f(a) + S'_{n+1}, \\ \Delta^2 y(a-2h) = \dfrac{h^2\nabla^2(1-\nabla)^{-1}}{[\lg(1-\nabla)]^2} f(a-h) = \dfrac{h^2\nabla^2}{[\lg(1-\nabla)]^2} f(a) = \\ \quad = h^2\sum\limits_{i=0}^{n} c_i\nabla^i f(a) + R'_{n+1}, \end{cases}$$

da $f(a) = \tau f(a-h) = (1-\nabla)^{-1} f(a-h)$ ist. Aus

$$\sum a_i\nabla^i = -\frac{\nabla}{\lg(1-\nabla)}; \quad \sum c_i\nabla^i = \frac{\nabla^2}{[\lg(1-\nabla)]^2} = \left(\sum a_i\nabla^i\right)^2,$$

wo a_i die Koeffizienten der Entwicklung (XVII; 49a) bedeuten, erhält man durch Koeffizientenvergleich die c_i und damit die *Störmersche Interpolationsformel*

$$\text{(XVII; 72)}\quad \Delta^2 y(a-2h) = y(a) - 2y(a-h) + y(a-2h) = h^2\sum c_i\nabla^i f(a) =$$
$$= h^2\left\{1 - \nabla + \frac{1}{12}\nabla^2 - \frac{1}{240}\nabla^4 + \frac{1}{240}\nabla^5 - \right.$$
$$\left. - \frac{221}{60480}\nabla^6 + \cdots\right\} f(a).$$

Aus

$$\sum d_i\nabla^i = \frac{\nabla^2(1-\nabla)^{-1}}{[\lg(1-\nabla)]^2} = (1-\nabla)^{-1}\sum c_i\nabla^i$$

oder
$$(1 + d_1 \nabla + d_2 \nabla^2 + \cdots)(1 - \nabla) = 1 + c_1 \nabla + c_2 \nabla^2 + \cdots$$
ergibt sich die *Störmersche Extrapolationsformel*

$$\text{(XVII; 73)} \quad \Delta^2 y(a-h) = y(a+h) - 2y(a) + y(a-h) = h^2 \sum d_i \nabla^i f(a) =$$
$$= h^2 \left\{ 1 + \frac{1}{12}\nabla^2 + \frac{1}{12}\nabla^3 + \frac{19}{240}\nabla^4 + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{40}\nabla^5 + \frac{863}{12096}\nabla^6 + \cdots \right\} f(a),$$

deren Koeffizienten d_i mit den c_i durch die Rekursionen
$$d_i - d_{i-1} = c_i$$
zusammenhängen. Noch einfacher erweisen sich die Beziehungen zwischen den d_i und den a_i, denn der Vergleich der numerischen Werte dieser Koeffizienten zeigt, daß $d_i = -(i-1)\, a_i$ ist. Der Beweis für diese Beziehung läßt sich sehr elegant auf folgende Weise erbringen[1]: Es ist offensichtlich
$$\sum d_i \nabla^i = (1 + a_1 \nabla + a_2 \nabla^2 + \cdots)^2 (1-\nabla)^{-1} = \frac{\nabla^2}{[\lg(1-\nabla)]^2}(1-\nabla)^{-1}.$$
Da aber
$$\frac{d}{d\nabla}\left[\frac{1}{\lg(1-\nabla)}\right] = \frac{(1-\nabla)^{-1}}{[\lg(1-\nabla)]^2}$$
gilt, ist
$$\sum d_i \nabla^i = \nabla^2 \frac{d}{d\nabla}\left[\frac{1}{\lg(1-\nabla)}\right] = -\nabla^2 \frac{d}{d\nabla}\left[\frac{1 + a_1\nabla + a_2\nabla^2 + \cdots}{\nabla}\right] =$$
$$= 1 - (a_2 \nabla^2 + 2a_3 \nabla^3 + 3a_4 \nabla^4 + \cdots),$$
woraus die Behauptung folgt.

Die Entwicklung der Doppelintegrale nach zentralen Differenzen leitet man am bequemsten durch nochmalige unbestimmte Integration von
$$F(a+sh) = \frac{1}{h}\int^{t=a+sh} f(t)\,dt = \int^{s} f(a+sh)\,ds$$
ab. Wendet man diese Operation auf die Reihen (XVII; 55) und (XVII; 56) an, so erhält man nach Stirling

$$\text{(XVII; 74)} \qquad G(a+sh) = G(s) = \frac{1}{h^2}\iint^{t=a+sh} f(t)\,dt^2 = \iint^{s} f(a+sh)\,ds^2 =$$
$$= C_2 + s\,C_1 + \frac{s^2}{2} f(a) + \frac{s^3}{6} f^{\mathrm{I}}(a) + \frac{s^4}{24} f^{\mathrm{II}}(a) +$$
$$+ \left(\frac{s^5}{120} - \frac{s^3}{36}\right) f^{\mathrm{III}}(a) + \left(\frac{s^6}{720} - \frac{s^4}{288}\right) f^{\mathrm{IV}}(a) +$$
$$+ \left(\frac{s^7}{5040} - \frac{s^5}{480} + \frac{s^3}{180}\right) f^{\mathrm{V}}(a) + \left(\frac{s^8}{40320} - \frac{s^6}{4320} + \frac{s^4}{2160}\right) f^{\mathrm{VI}}(a) + \cdots$$

[1]) Diesen Beweis verdanke ich Herrn J. Schubart.

und nach BESSEL

$$\text{(XVII; 75)}\quad G\left(s-\frac{1}{2}\right)=C_2'+s\,C_1'+\frac{s^2}{2}f\left(a-\frac{1}{2}\right)+\frac{s^3}{6}f^{\mathrm{I}}\left(a-\frac{1}{2}\right)+$$
$$+\left(\frac{s^4}{24}-\frac{s^2}{16}\right)f^{\mathrm{II}}\left(a-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{s^5}{120}-\frac{s^3}{144}\right)f^{\mathrm{III}}\left(a-\frac{1}{2}\right)+$$
$$+\left(\frac{s^6}{720}-\frac{5s^4}{576}+\frac{3s^2}{256}\right)f^{\mathrm{IV}}\left(a-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{s^7}{5040}-\frac{s^5}{960}+\frac{s^3}{1280}\right)f^{\mathrm{V}}\left(a-\frac{1}{2}\right)+$$
$$+\left(\frac{s^8}{40320}-\frac{7s^6}{17280}+\frac{259s^4}{138240}-\frac{5s^2}{2048}\right)f^{\mathrm{VI}}\left(a-\frac{1}{2}\right)+\cdots,$$

wobei C_2 und C_2' zwei neue Integrationskonstanten bedeuten. Aus (XVII; 74) folgt das elementare Doppelintegral

$$\frac{1}{h^2}\iint\limits_{a-h/2}^{a+h/2} f(t)\,dt=G\left(\frac{1}{2}\right)-G\left(-\frac{1}{2}\right)=$$
$$=C_1+\frac{1}{24}f^{\mathrm{I}}(a)-\frac{37}{5760}f^{\mathrm{III}}(a)+\frac{407}{322560}f^{\mathrm{V}}(a)-\cdots.$$

Setzt man hierin nach (XVII; 68) für die Integrationskonstante

$$C_1=F(0)={}^{\mathrm{I}}f(a)-\frac{1}{12}f^{\mathrm{I}}(a)+\frac{11}{720}f^{\mathrm{III}}(a)-\frac{191}{60480}f^{\mathrm{V}}(a)+\cdots,$$

so ergibt sich schließlich

(XVII; 76)
$$\frac{1}{h^2}\iint\limits_{a-h/2}^{a+h/2} f(t)\,dt={}^{\mathrm{I}}f(a)-\frac{1}{24}f^{\mathrm{I}}(a)+\frac{17}{1920}f^{\mathrm{III}}(a)-\frac{367}{193536}f^{\mathrm{V}}(a)+\cdots,$$

wobei die Elemente der ersten Summenspalte durch (XVII; 68) zu eichen sind.

Durch Aufsummieren der Ausdrücke (XVII; 76) über eine beliebig lange Reihe aufeinanderfolgender Elementarintegrale erhält man dann

$$\text{(XVII; 77)}\quad \frac{1}{h^2}\iint\limits_{a-h/2}^{a+(k+1/2)h} f(t)\,dt=\sum_{i=0}^{k}\left\{{}^{\mathrm{I}}f(a+i)-\frac{1}{24}f^{\mathrm{I}}(a+i)+\right.$$
$$\left.+\frac{17}{1920}f^{\mathrm{III}}(a+i)-\frac{367}{193536}f^{\mathrm{V}}(a+i)+\cdots\right\}.$$

Nun gilt aber für alle Differenzen und Summen ungerader Ordnung

$$\sum_{i=0}^{k}f^{(2n+1)}(a+i)=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k}\left\{f^{(2n+1)}\left(a+i+\frac{1}{2}\right)+f^{(2n+1)}\left(a+i-\frac{1}{2}\right)\right\}=$$
$$=\frac{1}{2}\left\{f^{(2n)}(a+i+1)-f^{(2n)}(a)+f^{(2n)}(a+i)-f^{(2n)}(a-1)\right\}=$$
$$=f^{(2n)}\left(a+i+\frac{1}{2}\right)-f^{(2n)}\left(a-\frac{1}{2}\right).$$

Man kann also das Integral (XVII; 77) auch in der Form

$$\frac{1}{h^2}\iint\limits_{a-h/2}^{a+(k+1/2)h} f(t)\,dt^2 = G\left(k+\frac{1}{2}\right) - G\left(-\frac{1}{2}\right) = {}^{II}f\left(a+k+\frac{1}{2}\right) -$$

$$-\frac{1}{24}f\left(a+k+\frac{1}{2}\right) + \frac{17}{1920}f^{II}\left(a+k+\frac{1}{2}\right) - \frac{367}{193536}f^{IV}\left(a+k+\frac{1}{2}\right) + \cdots$$

$$-\left\{{}^{II}f\left(a-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{24}f\left(a-\frac{1}{2}\right) + \frac{17}{1920}f^{II}\left(a-\frac{1}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{367}{193536}f^{IV}\left(a-\frac{1}{2}\right) + \cdots\right\}$$

schreiben, d.h., es ist

$$\text{(XVII; 78)}\quad \frac{1}{h^2}\iint\limits_{a-h/2}^{a+(k+1/2)h} f(t)\,dt^2 = {}^{II}f\left(a+k+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{24}f\left(a+k+\frac{1}{2}\right) +$$

$$+\frac{17}{1920}f^{II}\left(a+k+\frac{1}{2}\right) - \frac{367}{193536}f^{IV}\left(a+k+\frac{1}{2}\right) + \cdots,$$

wenn man die Elemente der zweiten Summenspalte durch die Festsetzung

$$\text{(XVII; 79)}\quad {}^{II}f\left(a-\frac{1}{2}\right) = G\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{24}f\left(a-\frac{1}{2}\right) - \frac{17}{1920}f^{II}\left(a-\frac{1}{2}\right) +$$

$$+\frac{367}{193536}f^{IV}\left(a-\frac{1}{2}\right) - \cdots$$

auf die Integrationskonstante $G(-^1/_2)$ zurückführt. Da diese Formel aber nur die arithmetischen Mittel aufeinanderfolgender Größen des ENCKEschen Schemas enthält, ist es zweckmäßiger,

$${}^{II}f\left(a-\frac{1}{2}\right) = {}^{II}f(a) - \frac{1}{2}\,{}^{I}f\left(a-\frac{1}{2}\right),$$

$$f\left(a-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[f(a) + f(a-1)\right],$$

$$f^{II}\left(a-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[f^{II}(a) + f^{II}(a-1)\right] \quad \text{usw.}$$

zu setzen. Man erhält dann zunächst

$$\text{(XVII; 80)}\quad {}^{II}f(a) = G\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\,{}^{I}f\left(a-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{48}\left[f(a) + f(a-1)\right] -$$

$$-\frac{17}{3840}\left[f^{II}(a) + f^{II}(a-1)\right] +$$

$$+\frac{367}{387072}\left[f^{IV}(a) + f^{IV}(a-1)\right] - \cdots.$$

Ersetzt man hierin ${}^{\mathrm{I}}f(a-{}^1/_2)$ durch (XVII; 65) und benutzt die Identitäten

$$f^{\mathrm{I}}\left(a-\frac{1}{2}\right)=f(a)-f(a-1)\quad \text{usw.},$$

so erhält man für die Eichung der zweiten Summenspalte die Formel

$$\text{(XVII; 81)}\quad {}^{\mathrm{II}}f(a)=G\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}F\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{24}f(a-1)-$$
$$-\frac{17}{5760}\left[f^{\mathrm{II}}(a)+2f^{\mathrm{II}}(a-1)\right]+$$
$$+\frac{367}{967680}\left[2f^{\mathrm{IV}}(a)+3f^{\mathrm{IV}}(a-1)\right]-\cdots,$$

in der man gegebenenfalls (z.B. wenn es sich um Störungen handelt, die für die Oskulationsepoche $t=a-{}^1/_2h$ verschwinden) $F(-{}^1/_2)=G(-{}^1/_2)=0$ setzen kann.

Aus der BESSELschen Formel (XVII; 75) entsteht das Elementarintegral

$$\frac{1}{h^2}\iint\limits_{a-h}^{a}f(t)\,dt^2=C_1'+\frac{1}{24}f^{\mathrm{I}}\left(a-\frac{1}{2}\right)-\frac{7}{5760}f^{\mathrm{III}}\left(a-\frac{1}{2}\right)+$$
$$+\frac{43}{322560}f^{\mathrm{V}}\left(a-\frac{1}{2}\right)-\cdots.$$

Die Konstante $C_1'=F(-{}^1/_2)$ eliminiert man wieder nach (XVII; 65). Dann ergibt sich

$$\text{(XVII; 82)}\quad \frac{1}{h^2}\iint\limits_{a-h}^{a}f(t)\,dt^2={}^{\mathrm{I}}f\left(a-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{12}f^{\mathrm{I}}\left(a-\frac{1}{2}\right)-$$
$$-\frac{1}{240}f^{\mathrm{III}}\left(a-\frac{1}{2}\right)+\frac{31}{60480}f^{\mathrm{V}}\left(a-\frac{1}{2}\right)-\cdots.$$

Durch Summierung entsteht hieraus

$$\frac{1}{h^2}\iint\limits_{a}^{a+kh}f(t)\,dt=\frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{k}\iint\limits_{i-1}^{i}f(t)\,dt=$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\left\{{}^{\mathrm{I}}f\left(a+i-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{12}f^{\mathrm{I}}\left(a+i-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{240}f^{\mathrm{III}}\left(a+i-\frac{1}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{31}{60480}f^{\mathrm{V}}\left(a+i-\frac{1}{2}\right)-\cdots\right\}$$

oder, wenn man

$$\sum_{i=1}^{k}f^{(2n-1)}\left(a+i-\frac{1}{2}\right)=f^{(2n)}(a+i)-f^{(2n)}(a)$$

setzt,

(XVII; 83) $$\frac{1}{h^2}\int\limits_a^{a+kh}\!\!\int f(t)\,dt^2 = G(k) - G(0) =$$

$$= {}^{II}f(a+k) + \frac{1}{12}f(a+k) - \frac{1}{240}f^{II}(a+k) + \frac{31}{60480}f^{IV}(a+k) - \cdots$$

$$- \left\{{}^{II}f(a) + \frac{1}{12}f(a) - \frac{1}{240}f^{II}(a) + \frac{31}{60480}f^{IV}(a) - \cdots\right\}.$$

Eicht man also die zweite Summenspalte durch die Festsetzung

(XVII; 84) $${}^{II}f(a) = G(0) - \frac{1}{12}f(a) + \frac{1}{240}f^{II}(a) - \frac{31}{60480}f^{IV}(a) + \cdots,$$

so ist für beliebige ganzzahlige k

(XVII; 85) $$\frac{1}{h^2}\int\limits_a^{a+kh}\!\!\int f(t)\,dt^2 = {}^{II}f(a+k) + \frac{1}{12}f(a+k) - \frac{1}{240}f^{II}(a+k) + \frac{31}{60480}f^{IV}(a+k) - \cdots.$$

Die Eichungsformel (XVII; 84) ist übrigens mit (XVII; 79) und daher auch mit (XVII; 80) und (XVII; 81) identisch. Der Nachweis, der in ähnlicher Weise erfolgt wie der Beweis der Identität von (XVII; 65) und (XVII; 68), darf dem Leser überlassen werden.

151. *Anlaufs- und Fortführungsrechnung bei Differentialgleichungen erster Ordnung*

Wir werden in Kap. XVIII bei der Anwendung numerischer Methoden auf die Berechnung spezieller Störungen verschiedene Arten der Berechnung einer Folge von Anlaufswerten beschreiben, die dem jeweiligen Integrationsverfahren angepaßt sind. Man kann aber auch Verfahren entwickeln, die allgemein verwendbar sind und sich daher ausgezeichnet für die Programmierung der Rechenschemata für elektronische Integration von Differentialgleichungen eignen.

Es sei eine Differentialgleichung erster Ordnung

(XVII; 86) $$\frac{dy}{dt} = f[y(t), t]$$

vorgelegt, und es werde diejenige Lösung gesucht, die von der Anfangsordinate $y(0) = y_0$ ausgeht. Angenommen, es seien $2m + 1$ äquidistante Ordinaten der Lösung $y(t)$, nämlich

(XVII; 87) $$y_{-m};\ y_{-m+1};\ \ldots;\ y_{-1};\ y_0;\ y_1;\ \ldots;\ y_{m-1};\ y_m,$$

und mittels (XVII; 86) die zugehörigen Ordinaten von $f(t)$,

(XVII; 88) $$f_{-m};\ f_{-m+1};\ \ldots;\ f_{-1};\ f_0;\ f_1;\ \ldots;\ f_{m-1};\ f_m,$$

schon bekannt. Dann sind im Differenzenschema (XVII; 89) die innerhalb der keilförmigen Umrandung liegenden Differenzen verfügbar:

(XVII; 89)

Argument	$f(t)$	1. Differenz	2. Differenz		$(2m-1)$. Differenz	$2m$. Differenz	$y=\int f(t)\,dt$
$-m$	f_{-m}						
		∇f_{-m+1}					
$-m+1$	f_{-m+1}		$\nabla^2 f_{-m+2}$				
		∇f_{-m+2}					
.	.	.	.				
.	.	.	.		$\nabla^{2m-1} f_{m-1}$		
0	f_0	.	.			$\underline{\nabla^{2m} f_m}$	
.	.	.	.		$\underline{\nabla^{2m-1} f_m}$		
.	.	.	.				
		∇f_{m-1}					
$m-1$	f_{m-1}		$\underline{\nabla^2 f_m}$				
		$\underline{\nabla f_m}$					
m	$\underline{f_m}$						

Die Spitze des Keils liegt bei $\nabla^{2m} f_m$, der einzigen Differenz der Ordnung $2m$, die durch die gegebenen Ordinaten mitbestimmt wird.

Die ADAMSsche Extrapolationsformel (XVII; 70) und (XVII; 49b),

(XVII; 90) $$\left\{\begin{aligned} y_{m+1} &= y_m + h\sum_{i=0}^{2m} b_i\,\nabla^i f_m + S,\\ \sum b_i\,\nabla^i &= 1 + \frac{1}{2}\nabla + \frac{5}{12}\nabla^2 + \frac{3}{8}\nabla^3 + \frac{251}{720}\nabla^4 + \\ &\quad + \frac{95}{288}\nabla^5 + \frac{19087}{60480}\nabla^6 + \cdots, \end{aligned}\right.$$

gestattet dann die Berechnung von y_{m+1} und $f(y_{m+1}, t)$ und somit die sukzessive Ermittlung weiterer Ordinaten, sofern die Restfunktion S vernachlässigt werden darf. Die Anfangsfolgen (XVII; 87) und (XVII; 88) wird man sich zunächst mehr oder weniger roh genähert zu verschaffen suchen; die Mittel und Wege dazu sind vielgestaltig. Weiter unten sollen die gebräuchlichsten beschrieben werden. Diese genäherten Folgen müssen dann durch einen Iterationsprozeß verbessert und gesichert werden. Nun sind aber die Ordinaten (XVII; 87) durch die Differenzen des Schemas (XVII; 89) mit Hilfe von interpolatorischen Integrationsformeln reproduzierbar. Wenn man mit einer Hypothese (XVII; 87), also mit genäherten y_i, in den Iterationsprozeß eingeht, d.h. aus ihnen die f_i und die Differenzen (XVII; 89) berechnet, so erhält man durch numerische Integration verbesserte y_i, und dieses Verfahren ist so lange fortzusetzen, bis das Ergebnis sich nicht mehr ändert.

Die Grundlage für die Fortsetzung der Ordinatenfolge durch die Extrapolation (XVII; 90) bilden die Differenzen $\nabla^i f_m$, die im Schema (XVII; 89) unterstrichen sind. Mit

$$f_m;\ \nabla f_m;\ \nabla^2 f_m;\ \ldots;\ \nabla^{2m} f_m$$

sind auch alle übrigen Größen des Schemas gegeben. Insbesondere lassen sich auch die Integrale (XVII; 87) durch den Anfangswert y_0 und diese unteren Randwerte des Schemas ausdrücken. Für gegebene Schrittweite h und gegebenes m wäre dann

$$\text{(XVII; 91)} \qquad y_j = y_0 + h \sum_{i=0}^{2m} a_{ji}^{(m)} \nabla^i f_m$$

bis auf Restglieder, die vernachlässigt werden dürfen, wenn h klein und m groß genug gewählt war, und die wir der Kürze halber von hier ab nicht mehr hinschreiben.[1])

Die Koeffizienten $a_{ji}^{(m)}$ bestimmt man durch Integration der NEWTONschen Interpolationsformel (XVII; 15):

$$f(a + s h) = (1 - \nabla)^{-s} f(a) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{s+i-1}{i} \nabla^i f(a).$$

Es ist nämlich

$$y(t) = C_1 + \int^t f(a + s h)\, dt = C_1 + h \int^s f(a + s h)\, ds,$$

also für $j = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm m;\ f(a) = f_m;\ s = j - m$

$$y_j - y_0 = h \int_{-m}^{-m+j} f(a + s h)\, ds = h \sum_{i=0}^{\infty} \int_{-m}^{-m+j} \binom{s+i-1}{i} \nabla^i f_m\, ds,$$

und da der Integrand von

$$a_{ji}^{(m)} = \int_{-m}^{-m+j} \binom{s+i-1}{i} ds = \int_{-m}^{-m+j} \frac{s(s+1)(s+2)\cdot\ldots\cdot(s+i-1)}{i!} ds$$

eine ganze rationale Funktion von s ist, lassen sich die $a_{ji}^{(m)}$ leicht ermitteln. Die Summe ist bis $i = 2m$ zu erstrecken, da die Differenzen höherer Ordnung nicht zur Verfügung stehen und nach Voraussetzung auch keine merklichen Beiträge zu den Summen liefern.

Bei hinreichend kleiner Schrittweite wird es immer genügen, ein Anlaufstück mit $m = 2$, also mit fünf Ordinaten (XVII; 87), zu berechnen. In diesem Falle erhält man aus

$$f(a + s h) = \left[1 + s\nabla + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 + \frac{s(s+1)(s+2)}{3!}\nabla^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{s(s+1)(s+2)(s+3)}{4!}\nabla^4 + \cdots\right] f_m$$

---

[1]) Bei den in diesem und dem nächsten Abschnitt behandelten numerischen Integrationsverfahren mit Hilfe der Operatorenrechnung schließen wir uns im allgemeinen der Darstellung an, die K. JÖRGENS diesen Methoden 1962 in einem Vortrag im Astronomischen Recheninstitut Heidelberg gegeben hat.

durch unbestimmte Integration

$$\text{(XVII; 92)}\quad J_1(s) = \left[s + \frac{s^2}{2}\nabla + \left(\frac{s^3}{6} + \frac{s^2}{4}\right)\nabla^2 + \left(\frac{s^4}{24} + \frac{s^3}{6} + \frac{s^2}{6}\right)\nabla^3 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{s^5}{120} + \frac{s^4}{16} + \frac{11 s^3}{72} + \frac{s^2}{8}\right)\nabla^4 + \cdots\right] f_m,$$

also für $m = 2$, $s = j - 2 = -4, -3, -2, -1, 0$

$$\text{(XVII; 93)}\quad \begin{cases} J_1(-4) = -4\left[1 - 2\nabla + \frac{5}{3}\nabla^2 - \frac{2}{3}\nabla^3 + \frac{7}{90}\nabla^4 - \cdots\right] f_m, \\ J_1(-3) = -3\left[1 - \frac{3}{2}\nabla + \frac{3}{4}\nabla^2 - \frac{1}{8}\nabla^3 - \frac{1}{80}\nabla^4 + \cdots\right] f_m, \\ J_1(-2) = -2\left[1 - \nabla + \frac{1}{6}\nabla^2 \qquad - \frac{1}{180}\nabla^4 + \cdots\right] f_m, \\ J_1(-1) = -\left[1 - \frac{1}{2}\nabla - \frac{1}{12}\nabla^2 - \frac{1}{24}\nabla^3 - \frac{19}{720}\nabla^4 - \cdots\right] f_m, \\ J_1(0) = 0. \end{cases}$$

Für die beiderseits y_0 liegenden Ordinaten der Lösungsfunktion gilt also

$$\text{(XVII; 94)}\quad \begin{cases} y_{-2} - y_0 = h[J_1(-4) - J_1(-2)] = -2h\left[1 - 3\nabla + \frac{19}{6}\nabla^2 - \right. \\ \qquad \left. - \frac{4}{3}\nabla^3 + \frac{29}{180}\nabla^4 - \cdots\right] f_m, \\ y_{-1} - y_0 = h[J_1(-3) - J_1(-2)] = -h\left[1 - \frac{5}{2}\nabla + \frac{23}{12}\nabla^2 - \right. \\ \qquad \left. - \frac{3}{8}\nabla^3 - \frac{19}{720}\nabla^4 + \cdots\right] f_m, \\ y_1 - y_0 = h[J_1(-1) - J_1(-2)] = h\left[1 - \frac{3}{2}\nabla + \frac{5}{12}\nabla^2 + \right. \\ \qquad \left. + \frac{1}{24}\nabla^3 + \frac{11}{720}\nabla^4 + \cdots\right] f_m, \\ y_2 - y_0 = h[J_1(0) - J_1(-2)] = 2h\left[1 - \nabla + \frac{1}{6}\nabla^2 - \right. \\ \qquad \left. - \frac{1}{180}\nabla^4 + \cdots\right] f_m. \end{cases}$$

Um zu einer Ausgangshypothese

$$y_i^{(0)};\; f_i^{(0)} = f[y_i^{(0)}, i\,h]$$

zu gelangen, mit der man den Iterationsprozeß (XVII; 94) beginnen kann, sind unter anderem folgende Wege möglich:

1. Man berechne die ersten Glieder einer TAYLORschen Entwicklung der Integralfunktion

$$y(t) = y_0 + \dot{y}_0 t + \frac{1}{2} \ddot{y}_0 t^2 + \cdots$$

für $t = \pm h$ und $t = \pm 2h$, wobei y_0 und $\dot{y}_0 = f(y_0, 0)$ durch die Differentialgleichung (XVII; 86) und die Anfangsbedingung gegeben sind und $\ddot{y}_0$, eventuell auch noch höhere Ableitungen für $t = 0$, durch Weiterdifferenzieren von (XVII; 86) gewonnen werden. Dieses Verfahren ist immer vorzuziehen, wenn die Form der Differentialgleichung einfach ist, so daß mehrmaliges Differenzieren wenig Mühe macht. Unter Umständen gelingt es schon auf Anhieb, ein System (XVII; 94) oder ein solches für $m > 2$ herzustellen, das bereits in sich geschlossen ist und nicht weiter iteriert zu werden braucht und das daher als Ausgangsfolge für die fortschreitende Integration geeignet ist. Die Störungsfunktionen der Himmelsmechanik sind allerdings ziemlich verwickelt aufgebaut, so daß der Rechner lieber die nachfolgenden Methoden benutzen wird.

2. Man geht mit Hilfe der vorgegebenen Zahlenwerte y_0, $\dot{y}_0$ schrittweise vor. Provisorisch wird zunächst $\Delta y_0 = \nabla y_0 = h \dot{y}_0 = h f_0$ gesetzt. Damit erhält man als erste Hypothese das System

1. Hypothese	$f^{(1)} = f(y^{(1)}, t)$	2. Hypothese
$y_{-1}^{(1)} = y_0 - h f_0$	$f_{-1}^{(1)}$	$y_{-1}^{(2)} = y_0 - h \left[1 + \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{12}\Delta^2\right] f_{-1}^{(1)}$
$y_0 = y_0$	f_0 $\quad \Delta f_{-1}$, ∇f_1 $\quad \Delta^2 f_{-1} = \nabla^2 f_1$	$y_0 = y_0$
$y_1^{(1)} = y_0 + h f_0$	$f_1^{(1)}$	$y_1^{(2)} = y_0 + h \left[1 - \frac{1}{2}\nabla - \frac{1}{12}\nabla^2\right] f_1^{(1)}$

und hieraus mit Hilfe der ADAMSschen Formeln (XVII; 53) bzw. (XVII; 52) die Größen $y_i^{(2)}$ (letzte Spalte) einer zweiten Hypothese, die man dann mit Hilfe der ADAMSschen Extrapolationsformel (in der beim Rückwärtsextrapolieren ∇ durch $-\Delta$ zu ersetzen ist) durch

$$y_{-2}^{(2)} = y_{-1}^{(2)} - h \left[1 - \frac{1}{2}\Delta + \frac{5}{12}\Delta^2\right] f_{-1}^{(1)}; \quad f_{-2}^{(2)} = f[y_{-2}^{(2)}, -2h],$$

$$y_2^{(2)} = y_1^{(2)} + h \left[1 + \frac{1}{2}\nabla + \frac{5}{12}\nabla^2\right] f_1^{(1)}; \quad f_2^{(2)} = f[y_2^{(2)}, 2h]$$

ergänzt.

3. Nur erwähnt werden soll hier das Verfahren von RUNGE und KUTTA, über das man in zahlreichen Lehrbüchern nachlesen kann, auf dessen Wiedergabe aber hier aus Raumgründen verzichtet werden muß. Diese Methode der numerischen Integration von Differentialgleichungen verschieden hoher Ordnung hat den Differenzenmethoden gegenüber einige bemerkenswerte Vorteile, vor allem den, daß ein Übergang auf andere (insbesondere kleinere) Schrittweiten während des Integrationsprozesses ohne Komplikationen gelingt, während dies bei den Differenzenverfahren immer umständlich und lästig ist.

Dagegen besteht der Nachteil, daß der Ablauf des RUNGE-KUTTAschen Verfahrens undurchsichtig bleibt und daß die Rechnung der vielfachen Kontrollmöglichkeiten ermangelt, die das Differenzenverfahren auszeichnet. Schließlich ist bei RUNGE-KUTTA auch die Genauigkeit der Resultate bei gleichem Aufwand merklich geringer, wenn auch Varianten dieser Methode (z. B. RUNGE-KUTTA-FEHLBERG) diesem Übelstand abzuhelfen bemüht sind.

Um die oben skizzierten Methoden 1 und 2 durch ein Beispiel zu belegen, wählen wir die sehr einfache Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dt} = y + t$$

mit den Anfangsbedingungen $y_0 = 0, f_0 = 0$ und der Schrittweite $h = 0.1$. Diese Gleichung besitzt das Integral

$$y = e^t - (1 + t) = \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots.$$

Man könnte nach Verfahren 1 mit

$$\dot{y}_0 = (e^t - 1)_0 = 0, \quad \ddot{y}_0 = (e^t)_0 = 1; \quad y \approx \frac{t^2}{2}$$

als Ausgangshypothese die Näherungswerte

$$y_0 = 0, \quad y_1^{(0)} = y_{-1}^{(0)} = \frac{h^2}{2} = 0.005; \quad y_2^{(0)} = y_{-2}^{(0)} = 2h^2 = 0.020$$

berechnen, aus denen man das provisorische Differenzenschema

(XVII; 95)

$f_{-2}^{(0)} = y_{-2}^{(0)} - 2h = -0.180$					$y_{-2}^{(1)} = 0.018667$
	+.085				
$f_{-1}^{(0)} = y_{-1}^{(0)} - h = -0.095$		+.01			$y_{-1}^{(1)} = 0.004833$
	+.095		0		
$f_0 = y_0 = 0.000$		+.01		0	$y_0 = 0.000000$
	+.105		0		
$f_1^{(0)} = y_1^{(0)} + h = +0.105$		+.01			$y_1^{(1)} = 0.005167$
	+.115				
$f_2^{(0)} = y_2^{(0)} + 2h = +0.220$					$y_2^{(1)} = 0.021333$

bildet und nach (XVII; 94) die in der letzten Spalte stehenden iterierten Werte $y_i^{(1)}$ findet. Mit diesen erhält man das verbesserte Schema

(XVII; 96)

$f_{-2}^{(1)} = -0.181333$					$y_{-2}^{(2)} = 0.018733$
	+0.086166				
$f_{-1}^{(1)} = -0.095167$		+0.009			$y_{-1}^{(2)} = 0.004838$
	+0.095167		+0.001		
$f_0 = 0.000000$		+0.010		0	$y_0 = 0.000000$
	+0.105167		+0.001		
$f_1^{(1)} = +0.105167$		+0.011			$y_1^{(2)} = 0.005171$
	+0.116166				
$f_2^{(1)} = +0.221333$					$y_2^{(2)} = 0.021400$

aus dem die Werte $y_i^{(2)}$ der zweifach iterierten Integralfunktion folgen. Diese stimmen mit den strengen Werten

$$\text{(XVII; 97)} \quad \begin{cases} y_i = \quad 0.018731; \quad 0.004838; \; 0; \; 0.005171; \; 0.021403, \\ f_i = -0.181269; \; -0.095162; \; 0; \; 0.105171; \; 0.221403, \end{cases}$$

abgesehen von kleinen Abweichungen in der 6. Dezimale bei den beiden äußeren Ordinaten, genau überein. Eine dritte Iteration würde auch diese Differenzen beseitigen.

Nach der zweiten der oben vorgeschlagenen Methoden zur Ermittlung einer ersten Hypothese für das Anlaufstück erhielte man zunächst, ausgehend von $y_0 = 0$, $f_0 = 0$,

$y_{-1}^{(0)} = 0$	$f_{-1}^{(1)} = -0.1$			$y_{-1}^{(2)} = 0.005$	$f_{-1}^{(2)} = -0.095$		
		$+0.1$				$+0.095$	
$y_0 = 0$	$f_0 = 0$		0	$y_0 = 0$	$f_0 = 0$		$+0.01$
		$+0.1$				$+0.105$	
$y_1^{(0)} = 0$	$f_1^{(1)} = +0.1$			$y_1^{(2)} = 0.005$	$f_1^{(2)} = 0.105$		

Die so erhaltenen $y_i^{(2)}$, $f_i^{(2)}$ können dann extrapolatorisch durch

$$y_{-2}^{(2)} = y_{-1}^{(2)} - h\left[1 - \frac{1}{2}\Delta + \frac{5}{12}\Delta^2\right] f_{-1}^{(2)} = 0.01883; \quad f_{-2}^{(2)} = -0.18117,$$

$$y_2^{(2)} = y_1^{(2)} + h\left[1 + \frac{1}{2}\nabla + \frac{5}{12}\nabla^2\right] f_1^{(2)} = 0.02117; \quad f_2^{(2)} = +0.22117$$

ergänzt werden. Die Anlaufsfolge $f_i^{(2)}$ stellt dann eine noch bessere Annäherung an die strengen Werte f_i aus (XVII; 97) dar als die Folge (XVII; 95), mit der wir weiter oben die Iteration eingeleitet hatten.

Ist die iterative Berechnung des Anlaufstücks abgeschlossen, so läßt sich die y-Folge mit Hilfe der ADAMSschen Extrapolationsformel nach vor- oder rückwärts sukzessive fortsetzen. Da aber diese Formel ziemlich schlecht konvergiert, summieren sich die Abrundungsfehler der höheren Differenzen, die mit verhältnismäßig großen Koeffizienten eingehen, rasch zu merklichen Beträgen auf. Es ist daher immer ratsam, die extrapolatorisch berechneten Ordinaten durch die rasch konvergierenden, nach zentralen Differenzen fortschreitenden Integrationsformeln nachzurechnen und, wenn nötig, zu verbessern. Um auch dies an Hand des obigen Beispiels zu zeigen, benutzen wir die Anlaufswerte y_i aus (XVII; 96), die zu dem Schema

$f_{-2} = -0.181267$					
	$+0.086105$				
$f_{-1} = -0.095162$		$+0.009057$			
	$+0.095162$		$+0.000952$		
$f_0 = 0$		$+0.010009$		$+0.000097$	
	$+0.105171$		$+0.001049$		$+0.000022$
$f_1 = 0.105171$		$+0.011058$		$+0.000119$	
	$+0.116229$		$+0.001168$		
$f_2 = 0.221400$		$+0.012226$			
	$+0.128455$				
$f_3 = 0.349855$					

führen, um die f-Folge mittels der ADAMSschen Formel um die Ordinate f_3 zu ergänzen. Es ist dann

$$y_3 = y_2 + h\left[1 + \frac{1}{2}\nabla + \frac{5}{12}\nabla^2 + \frac{3}{8}\nabla^3 + \frac{251}{720}\nabla^4\right]f_2 = 0.049855,$$

$$f_3 = y_3 + 3h = 0.349855,$$

und es werden dann auch die neuen, unterhalb der stufenförmig ansteigenden Linie stehenden Differenzen bekannt. Mit deren Hilfe ist es nun möglich, den Wert y_2 durch die Integralformel (XVII; 54)

$$y_2 - y_0 = y_2 = 2h\left[1 + \frac{1}{6}\delta - \frac{1}{180}\delta^2\right]f_1 =$$

$$= 0.2\left[0.105171 + \frac{0.011058}{6} - \frac{0.000119}{180}\right] \approx 0.021403$$

zu kontrollieren. Dieser Wert ist genau, da die mit einem eventuellen Extrapolationsfehler behaftete Differenz $\delta^2 f_1$ hier mit dem Faktor $h/90$ erscheint. In der Tat stimmt er mit dem strengen Wert (XVII; 97) bis zur 6. Dezimale genau überein.

Die Differentialgleichungen der Himmelsmechanik, die meistens von der zweiten Ordnung sind, lassen sich fast immer auf ein System von simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen, z. B. auf kanonische Systeme. So erfordert das „problème restreint" die Lösung von vier Differentialgleichungen erster Ordnung, das reduzierte Dreikörperproblem (s. Abschnitt 109) die Lösung neun solcher Gleichungen. Alle diese Systeme lassen sich mittels der oben beschriebenen Methode numerisch integrieren; es ist dann für jede Differentialgleichung ein besonderes Differenzenschema anzulegen, und jede der für einen Integrationsschritt erforderlichen Rechenoperationen ist erst auf alle Schemata anzuwenden, bevor der nächste Schritt in Angriff genommen wird.

Für programmgesteuerte Integration ist es zweckmäßig, von einem umfangreicheren Anfangsstück (etwa $m = 3$ oder 4) auszugehen – die dazu nötigen Iterationsformeln lassen sich mit den Koeffizienten (XVII; 92) leicht bilden. Man kann dann von vornherein mit einer größeren Stellenzahl rechnen, als für das Endergebnis erforderlich wäre, und die sich aufsummierenden Abrundungsfehler werden sich erst nach einer sehr großen Anzahl von Schritten schädlich auswirken. Nach Beendigung der Anfangsiteration wird für die Fortführung der Rechnung jeweils nur die ∇^i-Folge der letzten gesicherten f-Ordinate gebraucht, während alle übrigen Differenzen gelöscht werden können, da sie nötigenfalls (für gelegentliche Kontrollen mit zentralen Differenzen) immer aus den bereits gefundenen Werten der y- bzw. f-Folge reproduzierbar sind.

152. *Anlaufs- und Fortführungsrechnung bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung*

Die im vorigen Abschnitt entwickelte iterative Methode der Berechnung einer genauen, zur extrapolatorischen Fortführung der Integration geeigneten Anlaufsfolge von Ordinaten der Lösungsfunktion läßt sich ohne besondere

Schwierigkeit auch auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\ddot{y} = f(y, t) \tag{XVII; 98}$$

bzw. auf Systeme solcher Gleichungen ausdehnen. Obwohl sich in der Praxis, wie in den nächsten Abschnitten gezeigt werden wird, spezielle, den jeweilig zu lösenden Problemen der Himmelsmechanik angepaßte Verfahren eingebürgert haben, wird es nützlich sein, diese allgemein anwendbare und für elektronische Integration besonders geeignete Methode kurz darzustellen.

Wir haben bei Differentialgleichungen von der Form (XVII; 98), je nach Art der Anfangsbedingungen, zwei Fälle zu unterscheiden: 1. Es sind die Werte $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0$ vorgegeben, also Ort und Geschwindigkeit zur Epoche $t = 0$ (Anfangswertproblem) oder 2. die Werte y_0 und $y_{-1} = y(-h)$, also die Werte der Lösungsfunktion an den Enden eines Intervalls $[-h; 0]$ (Randwertproblem).

Im ersten Fall berechnen wir wieder Näherungen für die Ausgangsfolge $y_{-m}, \ldots, y_m$. Das ist hier weniger umständlich als bei Differentialgleichungen erster Ordnung; denn man hat ja zur genäherten Berechnung der Anlaufsfolge bereits die Größen

$$y_0, \dot{y}_0 \quad \text{und} \quad \ddot{y}_0 = f(y_0, 0)$$

zur Verfügung, die schon ausreichen, um aus den ersten Gliedern der TAYLORschen Reihe Näherungswerte

$$y_{\pm i} = y_0 \pm i\,h\,\dot{y}_0 + \frac{1}{2}(i\,h)^2\,\ddot{y}_0, \qquad (i = 0, 1, \ldots, m) \tag{XVII; 99}$$

zu berechnen, die bei genügend kleiner Schrittweite als Ausgangshypothese für eine iterative Verbesserung brauchbar sind.

Noch günstiger ist es unter Umständen, nach (XVII; 43) genähert

$$\nabla^2 y_1 = h^2\,\ddot{y}_0 = h^2 f_0$$

zu setzen, während man ∇y_0 und ∇y_1 genähert aus

$$\frac{1}{2}(\nabla y_0 + \nabla y_1) = h\,\dot{y}_0; \quad \nabla y_1 - \nabla y_0 = \nabla^2 y_1 = h^2 f_0$$

ermittelt, also

$$\nabla y_0 = h\,\dot{y}_0 - \frac{1}{2}h^2 f_0,$$

$$\nabla y_1 = h\,\dot{y}_0 + \frac{1}{2}h^2 f_0$$

setzt. Mit diesen Differenzen findet man zunächst die Näherungswerte

$$y_1 = y_0 + \nabla y_1; \quad y_{-1} = y_0 - \nabla y_0$$

und mit ihnen, wiederum genähert,

$$y_0 - 2y_{-1} + y_{-2} = \nabla^2 y_0 \approx h^2 f_{-1},$$

$$y_2 - 2y_1 + y_0 = \nabla^2 y_2 \approx h^2 f_1,$$

woraus auch y_{-2}, y_2 folgen. Dieses Verfahren läßt sich nach Belieben fortsetzen: Man erhält bei jedem Schritt weitere Randwerte der genäherten y-Folge, die allerdings fortlaufend ungenauer werden.

Es seien auf diese Weise Näherungswerte $y_{-m}, \ldots, y_m$ der Lösungsfunktion bekannt geworden. Dann läßt sich wiederum ein Iterationsverfahren einleiten, mit dessen Hilfe diese Zahlenwerte so lange verbessert werden, bis sie die Differentialgleichung im Rahmen der angestrebten Genauigkeit befriedigen. Sind als Anfangswerte des Problems y_0 und $\dot{y}_0$ vorgegeben, so werden die zu iterierenden Gleichungen die Form

$$\text{(XVII; 100)} \qquad y_j = y_0 + j\,h\,\dot{y}_0 + h^2 \sum_{i=0}^{2m} c_{ji}^{(m)}\, \nabla^i f_m + R$$

haben, wo R ein zu vernachlässigender Rest ist, falls m groß und h klein genug gewählt worden sind und der Index j die Werte $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm m$ annehmen kann.

Zum Beweis von (XVII; 100) und zur Bestimmung der Koeffizienten $c_{ji}^{(m)}$ schreiben wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (XVII; 98)

$$y(t) = y(a + s\,h) = C_2 + s\,h\,C_1 + h^2 \iint^{s} f(a + s\,h)\,ds^2$$

und deren erste Ableitung

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{h}\,\frac{dy}{ds} = C_1 + h \int^{s} f(a + s\,h)\,ds.$$

Setzen wir wieder $s = j - m$, $f(a) = f_m$, also

$$y_0 = y(a - m\,h); \quad y_j = y[a - (m - j)\,h]; \quad y_m = y(a),$$

so ist

$$\text{(XVII; 101)} \quad \begin{cases} y_j - y_0 = j\,h\,C_1 + h^2 \displaystyle\iint_{-m}^{-m+j} f(a + s\,h)\,ds^2, \\ \dot{y}_0 = C_1 + h \displaystyle\int^{-m} f(a + s\,h)\,ds. \end{cases}$$

Aus diesen beiden Gleichungen läßt sich C_1 eliminieren; es gilt also

$$y_j = y_0 + j\,h\,\dot{y}_0 + h^2 \left[\iint_{-m}^{-m+j} f(a + s\,h)\,ds^2 - j \int^{-m} f(a + s\,h)\,ds\right].$$

Bezeichnet man wieder mit $J_1(s)$ die Reihe (XVII; 92), so folgt durch nochmalige unbestimmte Integration

$$\text{(XVII; 102)} \quad J_2(s) = \iint^{s} f\,ds^2 = \int^{s} J_1(s)\,ds =$$

$$= \left[\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6}\nabla + \left(\frac{s^4}{24} + \frac{s^3}{12}\right)\nabla^2 + \left(\frac{s^5}{120} + \frac{s^4}{24} + \frac{s^3}{18}\right)\nabla^3 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{s^6}{720} + \frac{s^5}{80} + \frac{11\,s^4}{288} + \frac{s^3}{24}\right)\nabla^4 + \cdots\right] f_m,$$

und man erhält schließlich

$$y_j = y_0 + j\,h\,\dot{y}_0 + h^2[J_2(j-m) - J_2(-m) - j\,J_1(-m)],$$
$$(j = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm m).$$

Für $m = 2$ ergibt sich aus

$$(\text{XVII; 103}) \quad \begin{cases} J_2(-4) = 8\left[1 - \frac{4}{3}\nabla + \frac{2}{3}\nabla^2 - \frac{8}{45}\nabla^3 + \cdots\right] f_m, \\ J_2(-3) = \frac{9}{2}\left[1 - \nabla + \frac{1}{4}\nabla^2 - \frac{1}{30}\nabla^3 - \frac{1}{80}\nabla^4 - \cdots\right] f_m, \\ J_2(-2) = 2\left[1 - \frac{2}{3}\nabla \qquad - \frac{1}{45}\nabla^3 - \frac{1}{60}\nabla^4 - \cdots\right] f_m, \\ J_2(-1) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{3}\nabla - \frac{1}{12}\nabla^2 - \frac{2}{45}\nabla^3 - \frac{7}{240}\nabla^4 - \cdots\right] f_m, \\ J_2(0) = 0 \end{cases}$$

und

$$J_1(-2) = -2\left[1 - \nabla + \frac{1}{6}\nabla^2 \qquad - \frac{1}{180}\nabla^4 + \cdots\right] f_m$$

das System der Iterationsgleichungen

$$(\text{XVII; 104}) \quad \begin{cases} y_{-2} = y_0 - 2h\,\dot{y}_0 + 2h^2\left[1 - \frac{8}{3}\nabla + \frac{7}{3}\nabla^2 - \right. \\ \qquad \left. - \frac{31}{45}\nabla^3 + \frac{1}{36}\nabla^4 - \cdots\right] f_m, \\ y_{-1} = y_0 - h\,\dot{y}_0 + \frac{1}{2}h^2\left[1 - \frac{7}{3}\nabla + \frac{19}{12}\nabla^2 - \frac{19}{90}\nabla^3 - \right. \\ \qquad \left. - \frac{17}{720}\nabla^4 - \cdots\right] f_m, \\ y_1 = y_0 + h\,\dot{y}_0 + \frac{1}{2}h^2\left[1 - \frac{5}{3}\nabla + \frac{7}{12}\nabla^2 + \frac{2}{45}\nabla^3 + \right. \\ \qquad \left. + \frac{11}{720}\nabla^4 + \cdots\right] f_m, \\ y_2 = y_0 + 2h\,\dot{y}_0 + 2h^2\left[1 - \frac{4}{3}\nabla + \frac{1}{3}\nabla^2 + \frac{1}{45}\nabla^3 + \right. \\ \qquad \left. + \frac{1}{180}\nabla^4 + \cdots\right] f_m. \end{cases}$$

Liegt eine Randwertaufgabe vor, so ist es zweckmäßig, statt der Anfangsfolge (XVII; 87) die Folge der $m + 2$ Ordinaten

$$y_{-1};\ y_0;\ y_1;\ y_2;\ \ldots;\ y_m$$

iterativ zu berechnen, die mit den beiden vorgegebenen Größen y_{-1} und y_0 beginnt. Zur näherungsweisen Berechnung der folgenden Ordinaten benutzt man die genähert gültigen Beziehungen

$$\begin{aligned} \nabla^2 y_1 &\approx h^2 \ddot{y}_0 = h^2 f(y_0, 0); \quad y_1 = 2y_0 - y_{-1} + \nabla^2 y_1, \\ \nabla^2 y_2 &\approx h^2 \ddot{y}_1 = h^2 f(y_1, h); \quad y_2 = 2y_1 - y_0 \ + \nabla^2 y_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

fortlaufend, bis man die Endordinate y_m erreicht hat. Natürlich werden diese extrapolierten Ordinaten von Schritt zu Schritt ungenauer. Wenn man sich aber auf kleines m (etwa $m = 3$) beschränkt und die Schrittweite h klein genug wählt, so wird man die iterative Verbesserung der m genäherten Ordinaten immer schon nach wenigen Schritten abschließen können.

Mit dem Ansatz $y_{-1}, \ldots, y_m$ erhält man die Funktionen $f_{-1}, \ldots, f_m$ aus (XVII; 98) sowie das zugehörige Differenzenschema, das am unteren Rande mit der Folge $f_m, \nabla f_m, \nabla^2 f_m, \ldots, \nabla^{2m-2} f_m$ abschließt. Es ist dann nach (XVII; 101) und (XVII; 102)

$$\begin{aligned} y_j &= y_0 + j\,h\,C_1 + h^2[J_2(j-m) - J_2(-m)], \\ y_{-1} &= y_0 - h\,C_1 \ \ + h^2[J_2(-1-m) - J_2(-m)]. \end{aligned}$$

Eliminiert man aus diesen beiden Gleichungen die willkürliche Konstante C_1 und setzt $\nabla y_0 = y_0 - y_{-1}$ für die Differenz der beiden vorgegebenen Ordinaten, so folgt

$$\text{(XVII; 105)} \quad \begin{aligned} y_j = y_0 + j\,\nabla y_0 + h^2[J_2(j-m) + j\,J_2(-1-m) - \\ - (j+1)\,J_2(-m)], \end{aligned}$$

also für $m = 3;\ j = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \ \ \nabla y_0 + h^2[J_2(-2) + \ \ J_2(-4) - 2J_2(-3)], \\ y_2 &= y_0 + 2\,\nabla y_0 + h^2[J_2(-1) + 2J_2(-4) - 3J_2(-3)], \\ y_3 &= y_0 + 3\,\nabla y_0 + h^2[J_2(0) \quad + 3J_2(-4) - 4J_2(-3)] \end{aligned}$$

oder, wenn man die Entwicklungen (XVII; 103) einsetzt,

$$\text{(XVII; 106)} \quad \left\{ \begin{aligned} y_1 &= y_0 + \nabla y_0 + h^2 \Big[1 - 3\nabla + \frac{37}{12}\nabla^2 - \\ &\qquad - \frac{7}{6}\nabla^3 + \frac{19}{240}\nabla^4 - \cdots\Big] f_m, \\ y_2 &= y_0 + 2\,\nabla y_0 + 3h^2 \Big[1 - \frac{8}{3}\nabla + \frac{29}{12}\nabla^2 - \\ &\qquad - \frac{29}{36}\nabla^3 + \frac{37}{720}\nabla^4 - \cdots\Big] f_m, \\ y_3 &= y_0 + 3\,\nabla y_0 + 6h^2 \Big[1 - \frac{7}{3}\nabla + \frac{23}{12}\nabla^2 - \\ &\qquad - \frac{11}{18}\nabla^3 + \frac{3}{80}\nabla^4 - \cdots\Big] f_m. \end{aligned} \right.$$

Ist die Iteration abgeschlossen, so kann man die nunmehr gesicherten Ordinaten y_2 und y_3 als neue Randwerte eines Ausgangsintervalls ansehen und das gleiche Verfahren zur Ermittlung von drei weiteren Ordinaten y_4, y_5, y_6 benutzen und so fort. Noch sicherer ist es, folgendermaßen vorzugehen: Nach dem Abschluß der ersten Iteration, die zu den beiden Anfangsordinaten (y_{-1} und y_0) m anschließende $(y_1, \ldots, y_m)$ geliefert hat, bildet man nur eine weitere Ordinate, y_{m+1}, durch Extrapolation mittels der STÖRMERschen Formel (XVII; 73). Es steht dann eine neue $\nabla^i f_{m+1}$-Folge zur Verfügung, mit der man die Ordinaten y_2 bis y_{m+1} nach den Formeln (XVII; 106), die nun, statt auf $y_{-1}, y_0, \ldots, y_m$, mutatis mutandis auf die Folge $y_0, y_1, \ldots, y_{m+1}$ anzuwenden sind, erneut berechnet. Dabei werden die Ordinaten am linken (zeitlich früheren) Ende dieser Folge, die bereits gut gesichert waren, wiedererhalten, während sich am rechten Ende bessere Werte ergeben. Man wird so, bei jedem weiteren Schritt die Folge um eine Schrittweite verschiebend, fast immer mit einer einzigen Durchrechnung der Formeln (XVII; 106) auskommen.

Dieses Integrationsprogramm ist für elektronische Rechnung so gut geeignet, weil es (nach abgeschlossener Anfangsiteration) lediglich die Speicherung der fortlaufend berechneten y- und f-Ordinaten verlangt, während die zahlreichen Elemente des Differenzenschemas gar nicht in Erscheinung zu treten brauchen; denn die zur Extrapolation und Integration benötigten ∇^i der letzten f-Ordinate sind ja einfache Funktionen der letzten $m+2$ f-Ordinaten selbst und jederzeit leicht reproduzierbar.

Für den Handrechner, dem das machtvolle Hilfsmittel programmgesteuerter Rechenanlagen nicht zur Verfügung steht, wäre dieses Verfahren hingegen viel zu umständlich. Er wird immer jene Methoden vorziehen, bei denen das ganze Differenzenschema sichtbar zur Hand ist. Dann können immer die rascher konvergierenden und daher weniger Arbeitsaufwand erfordernden Integrationsformeln benutzt werden, die nach zentralen Differenzen fortschreiten. Die extrapolatorische Bestimmung genäherter Werte weiterer y-Ordinaten kann bequem durch Extrapolation der Differenzen höchster Ordnung eingeleitet werden, wobei die Anschaulichkeit des Differenzentableaus ebenso nützlich ist wie das Einfühlungsvermögen des erfahrenen Rechners. Alles dies sind Hilfen, die einer selbsttätig nach vorgeschriebenem Programm arbeitenden Maschine nur schwer gestellt werden können, da sie ihrem Wesen nicht gemäß sind.

KAPITEL XVIII

SPEZIELLE STÖRUNGEN

153. *Numerische Integration der Differentialgleichungen für ungestörte und gestörte rechtwinklige Koordinaten*

Die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung eines Planetoiden oder Kometen um die Sonne mit Hilfe der im vorigen Kapitel beschriebenen numerischen Methoden läßt sich am einfachsten durchführen, wenn man sich die Örter der beteiligten Himmelskörper durch ihre rechtwinkligen heliozentrischen Koordinaten ausgedrückt denkt; denn nur diese gewähren vollkommene Symmetrie der Formeln. Für die Darstellung der hierbei einzuschlagenden Methoden ist es, solange man nicht auf Einzelheiten des Rechnungsgangs eingehen will, gleichgültig, ob Störungen durch einen oder mehrere Planeten berücksichtigt oder ob Störungen überhaupt vernachlässigt werden sollen. Nach (XI; 14) lauten die Bewegungsgleichungen des gestörten Körpers

$$\text{(XVIII; 1)} \qquad \ddot{\mathfrak{q}} = -k^2 \frac{\mathfrak{q}}{r^3} + k^2 \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\mathfrak{q}_i - \mathfrak{q}}{\varrho_i^3} - \frac{\mathfrak{q}_i}{r_i^3} \right).$$

Hierbei ist durch $\mathfrak{q}(x, y, z)$ der heliozentrische Ortsvektor des Planetoiden oder Kometen bezeichnet, während $\mathfrak{q}_i(x_i, y_i, z_i)$ die Ortsvektoren der störenden Planeten sind, und es ist $m = 0$ die verschwindend kleine Masse des gestörten Körpers, während $m_1, m_2, \ldots, m_n$ die in Einheiten der Sonnenmasse ausgedrückten Massen der n Störplaneten sind. Ferner bedeuten $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ den heliozentrischen Abstand des gestörten Körpers, $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$ den heliozentrischen Abstand des Störplaneten mit der Masse m_i und schließlich $\varrho_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2}$ den Abstand zwischen m und m_i.

In jedem Falle ist also

$$\ddot{\mathfrak{q}} = \varphi(\mathfrak{q}; \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_n),$$

wobei die Koordinaten der Ortsvektoren der störenden Körper als bekannte Funktionen der Zeit angesehen werden dürfen, die aus den Ephemeriden der astronomischen Jahrbücher entnommen werden können und die im Falle der ungestörten (KEPLERschen) Bewegung nicht in Erscheinung treten. In jedem Falle haben also die Differentialgleichungen der Bewegung die Form

$$\text{(XVIII; 2)} \qquad \ddot{x} = f(x, y, z); \quad \ddot{y} = g(x, y, z); \quad \ddot{z} = h(x, y, z).$$

Handelt es sich um die ungestörte Bewegung, so nehmen die Funktionen f, g, h die sehr einfache Form

$$f = -k^2 \frac{x}{r^3}; \quad g = -k^2 \frac{y}{r^3}; \quad h = -k^2 \frac{z}{r^3}$$

an, während bei gestörter Bewegung jede dieser Funktionen für jeden störenden Körper ein von x, y, z und bekannten Funktionen der Zeit abhängiges Zusatzglied erhält, das der störenden Masse proportional und daher im allgemeinen sehr klein ist. Nur wenn eine nahe Begegnung zwischen dem gestörten und einem der störenden Körper stattfindet (was bei Kometen gelegentlich vorkommt), kann der Faktor ϱ_i^{-3} sehr groß werden und die verkleinernde Wirkung des Faktors m_i aufheben. Wir werden im folgenden immer nur einen einzigen Störplaneten ($i = 1$) berücksichtigen, da sich die Störbeschleunigungen durch mehrere Planeten in den Koordinaten einfach addieren. Bei der Berechnung von speziellen Störungen der Kleinen Planeten beschränkt man sich auch meistens auf die von Jupiter herrührenden Einflüsse, da die Störungen durch Saturn und die übrigen Riesenplaneten wegen der großen Entfernung und die durch den benachbarten Mars wegen dessen geringer Masse so klein sind, daß sich ihre Berechnung für viele praktische Zwecke (z.B. für eine Verbesserung der ersten Bahnbestimmung auf Grund der Beobachtungen während einer Opposition) nicht lohnt.

Die numerische Integration der Differentialgleichungen (XVIII; 2) kann auf verschiedene Weise erfolgen, z.B. nach der in Abschnitt 152 beschriebenen Methode. In den klassischen Lehrbüchern findet man das für Handrechnung geeignetere Verfahren nach Abschnitt 150 dargestellt:

Es seien die Koordinaten x, y, z und damit auch die Funktionen f, g, h für vier Argumente

$$a - 2h;\; a - h;\; a;\; a + h$$

durch eine Anlaufsrechnung bekannt geworden. Aus ihnen läßt sich für jede der drei erforderlichen Integrationen ein ENCKEsches Schema konstruieren; das nachstehende Schema für die Integration von $\ddot{x} = f$ möge hier als Muster für alle drei gelten:

Argument	2. Summe	1. Summe	$\ddot{x} = f(t)$	1. Differenz	2. Differenz	3. Differenz
$a - 2h$			$f(a-2)$			
		${}^{I}f\left(a-\frac{3}{2}\right)$		$f^{I}\left(a-\frac{3}{2}\right)$		
$a - h$	${}^{II}f(a-1)$		$f(a-1)$		$f^{II}(a-1)$	
		${}^{I}f\left(a-\frac{1}{2}\right)$		$f^{I}\left(a-\frac{1}{2}\right)$		$f^{III}\left(a-\frac{1}{2}\right)$
a	${}^{II}f(a)$		$f(a)$		$f^{II}(a)$	
		${}^{I}f\left(a+\frac{1}{2}\right)$		$f^{I}\left(a+\frac{1}{2}\right)$		$f^{III}\left(a+\frac{1}{2}\right)$
$a + h$	${}^{II}f(a+1)$		$f(a+1)$		$f^{II}(a+1)$	
		${}^{I}f\left(a+\frac{3}{2}\right)$		$f^{I}\left(a+\frac{3}{2}\right)$		
$a + 2h$	${}^{II}f(a+2)$		$f(a+2)$		$f^{II}(a+2)$	

Alle Elemente des Schemas, die oberhalb des nach rechts stufenartig ansteigenden Linienzuges stehen, sind mit den vier Stützwerten zugleich gegeben. Die

Summenspalten sind durch die Vorschriften (XVII; 84)

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{II}}f(a-1) &= \frac{1}{h^2}\,x(a-h) - \frac{1}{12}\,f(a-1) + \frac{1}{240}\,f^{\mathrm{II}}(a-1) - \\
&\quad - \frac{31}{60240}\,f^{\mathrm{IV}}(a-1) + \cdots, \\
{}^{\mathrm{II}}f(a) &= \frac{1}{h^2}\,x(a) - \frac{1}{12}\,f(a) + \frac{1}{240}\,f^{\mathrm{II}}(a) - \frac{31}{60240}\,f^{\mathrm{IV}}(a) + \cdots, \\
{}^{\mathrm{I}}f\left(a-\frac{1}{2}\right) &= {}^{\mathrm{II}}f(a) - {}^{\mathrm{II}}f(a-1)
\end{aligned}
$$

geeicht, wobei vorausgesetzt werden darf, daß die vierten Differenzen, die ja noch mit dem sehr kleinen Faktor $\approx 1/1951$ behaftet sind, keinen merklichen Einfluß auf das Ergebnis mehr haben.

Zur Fortsetzung der Anlaufsfolge dienen dann die Integrationsformeln (XVII; 85)

$$
\text{(XVIII; 3)} \quad x(a+kh) = h^2\left[{}^{\mathrm{II}}f(a+k) + \frac{1}{12}\,f(a+k) - \frac{1}{240}\,f^{\mathrm{II}}(a+k) + \right.
\left. + \frac{31}{60480}\,f^{\mathrm{IV}}(a+k) - \cdots\right],
$$

die man zunächst, mit roh extrapoliertem $f^{\mathrm{II}}(a+1)$, zur Kontrolle auf den bereits bekannten Stützwert $x(a+h)$ anwenden kann. Zweckmäßigerweise wird man die Extrapolation von f^{II}, solange noch kein anderer Weg vorgezeichnet ist, so vornehmen, daß man die dritten Differenzen als konstant ansieht. Das entspricht einer Extrapolation der vier gegebenen Stützwerte durch eine ganze rationale Funktion dritten Grades. Man wird also die zweiten Differenzen linear extrapolieren, und man kann dann das Schema durch Aufsummieren um alle Werte ergänzen, die unmittelbar unterhalb der „Treppe" liegen. Setzt man die lineare Extrapolation der zweiten Differenzen bis $f^{\mathrm{II}}(a+2)$ fort, so kann man die neuen Werte x (und ebenso y und z) für das Argument $a+2h$ nach (XVIII; 3) ermitteln. In dieser Formel ist dann ${}^{\mathrm{II}}f(a+2)$ streng, während $f(a+2)$ und $f^{\mathrm{II}}(a+2)$ noch provisorisch sind. Ein Extrapolationsfehler wird sich aber wegen der Faktoren $h^2/12$ bzw. $-h^2/240$ mit entsprechend geringem Gewicht auswirken, so daß man die neu erhaltenen Koordinaten bereits als recht genau ansehen darf. Nun ist aber mit $x+2h$ auch $f(a+2)$ genauer bekannt; damit lassen sich aber auch sämtliche Differenzen und Summen unter dem Treppenzug verbessern. Insbesondere wird man für $f(a+2)$ und $f^{\mathrm{II}}(a+1)$ bessere Werte erhalten und hat damit die Möglichkeit, $f^{\mathrm{II}}(a+2)$ genauer zu extrapolieren, etwa indem man für die dritten Differenzen einen linearen Verlauf statt eines konstanten annimmt. Mit dem neu berechneten $f(a+2)$ und dem neu extrapolierten $f^{\mathrm{II}}(a+2)$ läßt sich dann die Koordinate $x(a+2h)$ nach (XVIII; 3) erneut ermitteln und dieses Iterationsverfahren so lange fortsetzen, bis sich nichts mehr ändert.

Damit ist das Verfahren genügend gekennzeichnet, und es ist nur noch nötig zu bemerken, daß das Extrapolationsverfahren um so sicherer gehandhabt werden kann, je weiter die Rechnung fortgeschritten ist.

154. *Das* Cowell*sche Integrationsverfahren*

P. H. Cowell[1]) hat ein von dem klassischen abweichendes Verfahren der numerischen Integration von Differentialgleichungen zweiter Ordnung zuerst auf die Berechnung der gestörten Bahn des Halleyschen Kometen angewandt, um eine Ephemeride dieses in einer sehr langgestreckten Bahn um die Sonne laufenden Himmelskörpers für die Zeit seiner Erd- und Sonnennähe im Frühjahr 1910 vorauszuberechnen. Diese Methode verzichtet (wie die im Abschnitt 152 beschriebenen) auf die Benutzung der Summenspalten des Enckeschen Schemas. Der ganze Rechenvorgang wird dadurch nicht unwesentlich vereinfacht. Die Cowellsche Methode ist wegen ihrer einfachen Programmierbarkeit für elektronische Rechnung viel geeigneter als die klassische, ein Umstand, der natürlich von ihrem Urheber nicht vorausgesehen werden konnte. Sie ist aber auch für Handrechnung sehr bequem, da sie Integralentwicklungen nach zentralen Differenzen benutzt.

Es seien wieder $x(t), y(t), z(t)$ die zu bestimmenden Funktionen, die den Differentialgleichungen (XVIII; 1) bzw. (XVIII; 2) genügen. Wir beschränken uns wiederum darauf, die Integrationsmethode für $x(t)$ darzustellen, da die Rechnung für y und z gleichzeitig und in gleicher Weise vor sich geht. Wir werden die Differentialquotienten der Funktionen durch Punkte und, von der vierten Ordnung ab, durch hochgestellte und eingeklammerte Ziffern (z. B. $x^{(4)} = d^4x/dt^4$) bezeichnen; die Differenzen gerader Ordnung, auf die wir uns hier beschränken dürfen, kennzeichnen wir durch die Operatoren

$$\delta^i x(a) = \nabla^{2i} x(a+i) = \delta^{i-1}[x(a+1) - 2x(a) + x(a-1)].$$

Aus der Anlaufsrechnung benötigen wir nur zwei Stützwerte der Lösungsfunktionen, etwa die für die Argumente $a - h$ und a. Diese lassen sich, sofern sie nicht von vornherein gegeben sind, bequem aus den Anfangswerten $x(a - h/2)$ und $\dot{x}(a - h/2)$ durch die Taylorsche Entwicklung

$$x\left(a - \frac{h}{2} \pm \frac{h}{2}\right) = x\left(a - \frac{h}{2}\right) \pm \frac{h}{2}\dot{x}\left(a - \frac{h}{2}\right) + \frac{h^2}{8}\ddot{x}\left(a - \frac{h}{2}\right) \pm$$
$$\pm \frac{h^3}{48}\dddot{x}\left(a - \frac{h}{2}\right) + \cdots$$

berechnen, da $\ddot{x} = f(x, y, z)$ usw. durch die Bewegungsgleichungen für das Argument $a - h/2$ gegeben sind und diese Reihe, wenn h klein genug gewählt wird, nach dem Glied zweiter Ordnung abgebrochen werden kann.

---

[1]) P. H. Cowell und A. C. D. Crommelin, Essay on the return of Halley's comet. Publikationen der Astronomischen Gesellschaft Nr. 23, 1910.

Mit den beiden Stützwerten $x(a-h)$ und $x(a)$ steht das Integrationstableau (XVIII; 4) bis zu den oberhalb der Stufenlinie stehenden Werten zur Verfügung:

(XVIII; 4)

Argument	x	1. Differenz	2. Differenz
$a-h$	$x(a-1)$		$\nabla^2 x(a) = \delta x(a-1)$
		$\nabla x(a)$	
a	$x(a)$		$\nabla^2 x(a+1) = \delta x(a)$
		$\nabla x(a+1)$	
$a+h$	$x(a+1)$		

Nun gilt aber für die zweiten Ableitungen der Funktion x nach (XVII; 41), wenn abgekürzt $x(a+i\,h) = x(a+i)$ gesetzt wird,

$$h^2 \ddot{x}(a-1) = \left[\delta - \frac{1}{12}\delta^2 + \frac{1}{90}\delta^3 - \cdots\right] x(a-1),$$

$$h^2 \ddot{x}(a) = \left[\delta - \frac{1}{12}\delta^2 + \frac{1}{90}\delta^3 - \cdots\right] x(a),$$

so daß man also für die beiden zweiten Differenzen, die im Schema (XVIII; 4) eingetragen sind,

$$\delta x(a-1) = h^2 \ddot{x}(a-1) + \varphi(a-1),$$

$$\delta x(a) = h^2 \ddot{x}(a) + \varphi(a)$$

schreiben kann. Der erste Term rechts ist dann durch die Differentialgleichung bekannt, während

$$\varphi(a-1) = \left[\frac{1}{12}\delta^2 - \frac{1}{90}\delta^3 + \cdots\right] x(a-1),$$

$$\varphi(a) = \left[\frac{1}{12}\delta^2 - \frac{1}{90}\delta^3 + \cdots\right] x(a)$$

Reste von der Ordnung der vierten Differenzen sind, die bei genügend kleiner Schrittweite unmerklich bleiben. Nun ist aber

$$\delta x(a) = x(a+1) - 2x(a) + x(a-1) = h^2 \ddot{x}(a) + \varphi(a)$$

und daher

$$x(a+1) = 2x(a) - x(a-1) + h^2 \ddot{x}(a) + \varphi(a).$$

Für den Fall, daß die kleinen Korrektionen φ dauernd unter die Schwelle der Rechengenauigkeit fallen, kann demnach das Integrationsverfahren mittels der Rekursionsformel

$$\text{(XVIII; 5)} \qquad x(a+k) = 2x(a+k-1) - x(a+k-2) + h^2 \ddot{x}(a+k-1)$$

ad libitum fortgesetzt werden. Allerdings werden die kleinen Fehler, die man mit der Unterdrückung von φ begeht, sich allmählich aufsummieren, so daß sie das Ergebnis schließlich doch beeinflussen, auch wenn dies zu Beginn der Rechnung noch nicht der Fall gewesen ist. Man wird daher, sobald die pro-

visorische Integration durch (XVIII; 5) weit genug fortgeschritten ist, die vernachlässigten Terme zu berechnen suchen und mit ihnen die Resultate der Rechnung verbessern.

Man setze zur Abkürzung

$$h^2 \ddot{x}(a) = F(a).$$

Dann ist nach (XVII; 43)

$$F(a) = \delta x(a) - \frac{1}{12} h^4 x^{(4)}(a) - \frac{1}{360} h^6 x^{(6)}(a) - \cdots,$$

also

$$\text{(XVIII; 6)} \quad \delta x(a) = F(a) + \frac{1}{12} h^2 \ddot{F}(a) + \frac{1}{360} h^4 F^{(4)}(a) + \frac{1}{20160} h^6 F^{(6)}(a) + \cdots.$$

Andererseits ist nach (XVII; 41)

$$h^2 \ddot{F}(a) = \left[\delta - \frac{1}{12}\delta^2 + \frac{1}{90}\delta^3 - \cdots\right] F(a),$$

$$h^4 F^{(4)}(a) = \left[\delta^2 - \frac{1}{6}\delta^3 + \cdots\right] F(a),$$

$$h^6 F^{(6)}(a) = [\delta^3 - \cdots] F(a).$$

Setzt man dies in (XVIII; 6) ein, so folgt

$$\text{(XVIII; 7)} \quad \delta x(a) = \left[1 + \frac{1}{12}\delta - \frac{1}{240}\delta^2 + \frac{31}{60480}\delta^3 - \cdots\right] F(a).$$

Da aber auch $\delta x(a) = F(a) + \varphi(a)$ ist, erhält man für die Korrektion φ den Ausdruck

$$\text{(XVIII; 8)} \quad \varphi(a) = \left[\frac{1}{12}\delta - \frac{1}{240}\delta^2 + \frac{31}{60480}\delta^3 - \cdots\right] F(a).$$

Hat man also die provisorische Funktionenfolge so weit gerechnet, daß man zweite (oder, wenn diese nicht ausreichen sollten, auch höhere gerade) Differenzen von F zur Verfügung hat, so läßt sich die Korrektion φ leicht ermitteln. Meist wird man es so einrichten können, daß schon das sehr kleine Glied $-{}^1/_{240}\, \delta^2 F(a)$ praktisch verschwindet.

Ein einfaches Beispiel möge das Verfahren illustrieren: Gegeben sei die Differentialgleichung $\ddot{x} = -x$; als Anfangsbedingungen seien für das Argument a die speziellen Werte $x(a) = 0$, $\dot{x}(a) = 1$ festgesetzt worden. Das Integrationsintervall sei $h = 0.1$; als Anlaufswerte erhält man dann

$$x(a-1) = -0.099833; \quad F(a-1) = h^2\ddot{x}(a-1) = -h^2 x(a-1) = 0.000998,$$

$$x(a) = 0; \quad F(a) = 0.$$

Die Ergebnisse der Integration sind in nachstehender Tabelle zusammengestellt:

Argument	x (prov.)	$F = -h^2 x$	$10^6\,\delta F$	x (verb.)	F	$\frac{10^6}{12}\delta F$
$a - h$	−0.099833	+0.000998				
a	0.000000	0.000000	0			
$a + h$	+0.099833	−0.000998	+ 9	+0.099833	−0.000998	+1
$a + 2h$	+0.198668	−0.001987	+21	+0.198669	−0.001987	+2
$a + 3h$	+0.295516	−0.002955	+29	+0.295520	−0.002955	+2
$a + 4h$	+0.389409	−0.003894	+39	+0.389418	−0.003894	+3
$a + 5h$	+0.479408	−0.004794	+48	+0.479425	−0.004794	+4
$a + 6h$	+0.564613	−0.005646	+54	+0.564642	−0.005646	+5
$a + 7h$	+0.644172	−0.006442	+67	+0.644218	−0.006442	+5
$a + 8h$	+0.717289	−0.007173	+72	+0.717357	−0.007174	+6
$a + 9h$	+0.783233	−0.007832	+78	+0.783328	−0.007833	+6
$a + 10h$	+0.841345	−0.008413		+0.841472	−0.008415	

Die Spalte x(prov.) enthält die Ergebnisse der Rekursion (XVIII; 5) unter Verwendung der danebenstehenden Werte $F = h^2 \ddot{x}$. Die folgende Spalte gibt die zweiten Differenzen der F in Einheiten der sechsten Dezimale,

$$\delta F(a) = F(a + 1) - 2F(a) + F(a - 1).$$

Die Iteration nach der verbesserten Rekursionsformel

$$x(a + k) = 2x(a + k - 1) - x(a + k - 2) + \left[1 + \frac{1}{12}\delta + \cdots\right] F(a + k - 1)$$

liefert dann sukzessive die in den letzten Spalten zusammengestellten Zahlen. Da die Lösung der Differentialgleichung bekannt ist – sie lautet unter den gegebenen Anfangsbedingungen $x = \sin t = \sin(a + k\,h)$ –, zeigt ein Vergleich mit dem strengen Endwert

$$x(a + 10h) = \sin 1 = \sin 57^\circ\!.29578 = 0.841471,$$

daß die Rechnung bis auf eine Einheit der letzten Dezimalstelle stimmt. Diese geringe Abweichung beruht auf den unvermeidlichen Abrundungsfehlern, die bei Mitnahme einer zusätzlichen Rechenstelle hätten vermieden werden können. Die hier überall vernachlässigten vierten Differenzen von F betragen höchstens wenige Einheiten der letzten Stelle, so daß sie wegen des Faktors $^1/_{240}$ keinen Einfluß auf die Rechnung haben.

Dieses einfache Beispiel unterscheidet sich von den komplizierteren Aufgaben der Himmelsmechanik nicht grundsätzlich, sondern nur dadurch, daß dort die Form der Funktionen $F = h^2 \ddot{x}$ verwickelter ist und daß drei Koordinaten gleichzeitig berechnet werden müssen, also drei Integrationen obiger Art Schritt für Schritt nebeneinander auszuführen sind.

Das COWELLsche Verfahren erweist sich als besonders praktisch, wenn es gilt, aus den Randwerten (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) eines Intervalls $(t_1 \to t_2)$ die Ephemeride der ungestörten Bahn eines Himmelskörpers zu berechnen.

Dieses Verfahren ist dem recht komplizierten, das in Band I, Abschnitt 54, entwickelt worden ist, bedeutend überlegen. Das gilt vor allem, weil es ohne Einführung neuer Gesichtspunkte auch zur Berechnung gestörter Ephemeriden verwendet werden kann. R. T. A. INNES und H. E. WOOD haben gezeigt,[1]) daß man die COWELLsche Methode zur schrittweisen Berechnung der Ephemeriden der Planeten des Sonnensystems unter Berücksichtigung aller wechselseitigen Störungen mit Erfolg benutzen kann, also zur Lösung der $3n-3$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung des relativen n-Körperproblems. Auch die Aufgabe, die sehr komplizierte Ephemeride des Mondes zu berechnen, läßt sich mit dieser Methode mit einem Arbeitsaufwand lösen, der in Anbetracht der außerordentlich großen theoretischen Schwierigkeiten dieses Problems verhältnismäßig gering ist.

155. *Das NUMEROVsche Integrationsverfahren*

Auf die von B. NUMEROV[2]) entwickelte Methode der speziellen Störungsrechnung ist schon in Abschnitt 87 hingewiesen worden. Sie ist eigentlich nur eine Variante des Verfahrens von COWELL und beruht darauf, daß statt der rechtwinkligen heliozentrischen Koordinaten x, y, z des gestörten Himmelskörpers selbst sogenannte „Spezialkoordinaten" $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ eingeführt werden, die sich infolge ihrer besonderen Beschaffenheit leichter durch numerische Integration gewinnen lassen.

Es sei h die Schrittweite der beabsichtigten Integration, und es seien, wenn wieder $x(t)$ für irgendeine der drei Koordinaten steht,

$$\ddot{x} = -k^2 \frac{x}{r^3} + \frac{1}{h^2} R_x, \ldots \tag{XVIII; 9}$$

die Differentialgleichungen, denen sie genügen. Dabei ist

$$R_x = h^2 k^2 m_1 \left(\frac{x_1 - x}{\varrho_1^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right)$$

der x-Koordinate der Beschleunigung durch den Störplaneten proportional. Als „Spezialkoordinaten" führe man nun

$$\bar{x} = x - \frac{1}{12} h^2 \ddot{x} + \frac{1}{12} R_x \tag{XVIII; 10}$$

ein, so daß, wenn man $\ddot{x}$ durch (XVIII; 9) eliminiert,

$$\bar{x} = x \left(1 + \frac{1}{12} \frac{k^2 h^2}{r^3} \right) \tag{XVIII; 11}$$

---

[1]) R. T. A. INNES, On COWELL's method of applying the NEWTONian law. A.N. *228*, 265 (1926).

[2]) B. NUMEROV, Publications de l'Observatoire Astrophysique de Russie Nr. 2, 1923.

geschrieben werden kann. Ebenso ist natürlich

$$\bar{y} = y\left(1 + \frac{1}{12}\frac{k^2 h^2}{r^3}\right); \quad \bar{z} = z\left(1 + \frac{1}{12}\frac{k^2 h^2}{r^3}\right)$$

und, wenn auch

$$\bar{r} = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}$$

als „Spezialdistanz" eingeführt wird,

$$\text{(XVIII; 12)} \qquad \bar{r} = r\left(1 + \frac{1}{12}\frac{k^2 h^2}{r^3}\right).$$

Es sei nun mit Hilfe des weiter unten zu beschreibenden Verfahrens gelungen, durch numerische Integration eine gleichabständige Ephemeride der Spezialkoordinaten zu erhalten. Um aus ihr die ursprünglichen Koordinaten x, y, z zurückzugewinnen, bedient man sich folgender Methode: Man setze

$$\text{(XVIII; 13)} \quad \sigma(\bar{r}) = \frac{k^2 h^2 \bar{r}^{-3}}{1 + \frac{1}{12} k^2 h^2 \bar{r}^{-3}} \quad \text{oder} \quad \frac{k^2 h^2}{\bar{r}^3} = \frac{\sigma}{1 - \frac{1}{12}\sigma}.$$

Dann folgt aus (XVIII; 12)

$$\text{(XVIII; 14)} \qquad r = \frac{\bar{r}}{1 + \frac{\sigma}{12 - \sigma}} = \bar{r}\left(1 - \frac{1}{12}\sigma\right)$$

und daher auch $x = \bar{x}(1 - {}^1/_{12}\sigma)$ usw.

Setzt man nun (XVIII; 14) in (XVIII; 13) ein, so findet man

$$\text{(XVIII; 15)} \qquad \sigma\left(1 - \frac{1}{12}\sigma\right)^2 = \frac{k^2 h^2}{\bar{r}^3} = \bar{\mu},$$

eine Gleichung dritten Grades, durch die σ als Funktion von $\bar{r}$ bzw. $\bar{\mu}$ gegeben ist. Sind also die Spezialkoordinaten bekannt, so lassen sich die gewöhnlichen mit Hilfe von $\sigma(\bar{\mu})$ nach (XVIII; 14) leicht wiedergewinnen. Die Funktion σ kann man aus einer Tafel mit dem Argument $\bar{\mu}$ entnehmen oder mit Hilfe der Reihe

$$\sigma = \bar{\mu}\left(1 + \frac{1}{6}\bar{\mu} + \frac{7}{144}\bar{\mu}^2 + \frac{5}{288}\bar{\mu}^3 + \frac{143}{20736}\bar{\mu}^4 + \frac{91}{31104}\bar{\mu}^5 + \cdots\right)$$

berechnen, die rasch konvergiert, wenn man die Schrittweite h den vorliegenden Verhältnissen entsprechend klein genug wählt.

Nun seien für zwei aufeinanderfolgende Argumente, etwa $a - h$ und a, die Koordinaten und damit auch die Spezialkoordinaten $\bar{x}(a - h)$ und $\bar{x}(a)$ bekannt. Dann ist wie bei der COWELLschen Methode

$$\text{(XVIII; 16)} \qquad \bar{x}(a + h) = 2\bar{x}(a) - \bar{x}(a - h) + \delta\bar{x}(a),$$

wenn wir wieder die zentralen Differenzen zweiter Ordnung mit dem Operator δ bilden. Nach (XVIII; 10) ist aber

$$\delta \bar{x}(a) = \delta \left[x(a) - \frac{1}{12} h^2 \ddot{x}(a) + \frac{1}{12} R_x(a) \right].$$

Setzen wir nun, wie in Abschnitt 155,

$$h^2 \ddot{x}(a) = F(a),$$

so wird

$$\delta \bar{x} = \delta \left[x - \frac{1}{12} F + \frac{1}{12} R_x \right].$$

Andererseits ist aber nach (XVIII; 7)

$$\delta x = \left[1 + \frac{1}{12} \delta - \frac{1}{240} \delta^2 + \frac{31}{60480} \delta^3 - \cdots \right] F = F + \frac{1}{12} \delta F + \psi,$$

wenn mit

$$\psi(a) = \left[- \frac{1}{240} \delta^2 + \frac{31}{60480} \delta^3 - \cdots \right] F(a)$$

eine stets sehr kleine Korrektion bezeichnet wird. Dann wird aber

$$\delta \bar{x} = F + \psi + \frac{1}{12} \delta R_x,$$

also nach (XVIII; 16)

$$\bar{x}(a+h) = 2\bar{x}(a) - \bar{x}(a-h) + F(a) + \psi(a) + \frac{1}{12} \delta R_x(a).$$

In dieser Rekursionsformel sind aber die beiden Korrektionsglieder ψ und δR_x auch bei mäßig kleiner Schrittweite so unbedeutend, daß man sie über eine sehr große Anzahl von Schritten hinweg unbedenklich vernachlässigen kann; denn ψ ist ja von der Ordnung der vierten Differenzen von F und überdies mit dem kleinen Faktor $^1/_{240}$ behaftet, während δR_x wegen der kleinen und meist nur sehr langsam veränderlichen Störungsbeschleunigung nur selten merkliche Werte annimmt. Die NUMEROVsche Methode zeichnet sich also vor der COWELLschen dadurch aus, daß man mit Hilfe einer einfachen Rekursionsgleichung schon sehr genaue Funktionsfolgen erhält, in denen das Hauptglied der Korrektion (XVIII; 8) bereits enthalten ist. Dafür muß allerdings der Umweg über die Spezialkoordinaten beschritten werden, was aber – insbesondere für programmgesteuerte Rechnung – kaum eine wesentliche Erschwerung bedeutet.

156. *Spezielle Störungen der rechtwinkligen Koordinaten. Methode von* ENCKE

Da die störenden Kräfte, die auf die Kegelschnittbahn eines Planetoiden oder Kometen verzerrend einwirken, im allgemeinen klein und nur langsam veränderlich sind, ergeben sich für die Ausführung einer speziellen Störungsrechnung günstige Vorbedingungen, aus denen der Rechner Nutzen ziehen wird. Zunächst kann man bei Anwendung einer der in den vorhergehenden

Abschnitten beschriebenen Methoden der Berechnung gestörter Ephemeriden der rechtwinkligen Koordinaten diesen günstigen Umstand bei der Anlaufsrechnung verwenden. Sind etwa für irgendeine Epoche die oskulierenden Elemente der Bahn gegeben, z.B. in Gestalt der Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten des Himmelskörpers an diesem Zeitpunkt, so lassen sich mit Hilfe der in Band I beschriebenen Methoden der Ephemeridenrechnung für eine beliebig lange Reihe von Zeitpunkten vor oder nach der Oskulationsepoche ungestörte Örter berechnen, die von den gestörten nur wenig abweichen. Man hat also schon sehr genaue Näherungswerte für die gestörten Koordinaten zur Verfügung, die als Ausgangsmaterial für die iterative Berechnung einer Anlaufsfolge sehr brauchbar sind.

Noch zweckmäßiger ist es, die oskulierende Bahn, zu deren vollständiger Berechnung aus den Anfangswerten eines speziellen Problems ja alle Mittel zur Verfügung stehen, ebenso wie die Bahnen der störenden Körper, überhaupt als gegeben vorauszusetzen und nur die Störungen selbst, d.h. also die verhältnismäßig geringfügigen Verbesserungen, die an den ungestörten Koordinaten der oskulierenden Bahn anzubringen sind, durch numerische Integration der Differentialgleichungen zu bestimmen, denen sie genügen. Man hat dann den Vorteil, diese kleinen Störungsbeträge, ohne die Anzahl der zählenden Rechenstellen vermehren zu müssen, auf eine größere Zahl von Dezimalstellen genau berechnen zu können und damit die bei den Methoden der numerischen Integration immer gegebene Gefahr der Aufsummierung von Abrundungsfehlern wirksam zu verringern.

Ist $\mathfrak{q}$ der Ortsvektor in der gestörten und $\mathfrak{q}_0$ der Ortsvektor in der oskulierenden Bahn (so daß also für die Oskulationsepoche $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0$ und $\dot{\mathfrak{q}} = \dot{\mathfrak{q}}_0$ ist), so werden die Störungen

$$\text{(XVIII; 17)} \qquad \mathfrak{s} = \mathfrak{q} - \mathfrak{q}_0$$

der Koordinaten eines Planetoiden oder Kometen mit verschwindend kleiner Masse den Differentialgleichungen

$$\text{(XVIII; 18)} \quad \ddot{\mathfrak{s}} = \ddot{\mathfrak{q}} - \ddot{\mathfrak{q}}_0 = -\frac{k^2\,\mathfrak{q}}{r^3} + k^2 m_1 \left(\frac{\mathfrak{q}_1 - \mathfrak{q}}{\varrho_1^3} - \frac{\mathfrak{q}_1}{r_1^3}\right) + k^2 \frac{\mathfrak{q}_0}{r_0^3} = \\ = k^2 m_1 \left(\frac{\mathfrak{q}_1 - \mathfrak{q}}{\varrho_1^3} - \frac{\mathfrak{q}_1}{r_1^3}\right) + k^2 \left(\frac{\mathfrak{q}_0}{r_0^3} - \frac{\mathfrak{q}}{r^3}\right)$$

genügen, wenn $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ den heliozentrischen Abstand in der oskulierenden Bahn darstellt. Die Störungsausdrücke zerfallen also in zwei Summanden. Der erste, der die störende Masse m_1 als Faktor enthält, kann mit sehr großer Annäherung als bekannt vorausgesetzt werden. Er enthält zwar die unbekannten Störungskoordinaten in $\mathfrak{q}$ und $\varrho_1 = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$, aber da die Störungen im allgemeinen klein von der Ordnung m_1 sind[1]) und m_1 selbst für Jupiter als störenden Planeten von der Ordnung 10^{-3} ist, wird man diesen ersten Term, den man als das *direkte Störungsglied* bezeichnet, bis auf einen Fehler von der Ordnung m_1^2 berechnen können, wenn

[1]) Ausgenommen den Fall einer nahen Begegnung der beiden Körper (ϱ_1 klein).

man $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q}_0$ und ϱ_1 mit $\varrho_{10} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ vertauscht. In das zweite, das *indirekte Störungsglied*, gehen aber die Störungen in $\mathfrak{q}$ und r mit vollem Betrag ein, so daß hier ein Iterationsverfahren am Platze ist. Man setze

$$\text{(XVIII; 19)} \qquad \frac{\mathfrak{q}_0}{r_0^3} - \frac{\mathfrak{q}}{r^3} = \frac{\mathfrak{q} - \mathfrak{s}}{r_0^3} - \frac{\mathfrak{q}}{r^3} = \frac{1}{r_0^3}\left[\mathfrak{q}\left(1 - \frac{r_0^3}{r^3}\right) - \mathfrak{s}\right].$$

Aus (XVIII; 17) folgt nun durch skalares Quadrieren

$$r^2 = \mathfrak{q}^2 = (\mathfrak{q}_0 + \mathfrak{s})^2 = \mathfrak{q}_0^2 + 2(\mathfrak{q}_0\,\mathfrak{s}) + \mathfrak{s}^2$$

oder, wenn man durch $\mathfrak{q}_0^2 = r_0^2$ dividiert,

$$\frac{r^2}{r_0^2} = 1 + \frac{2}{r_0^2}\left[(\mathfrak{q}_0\,\mathfrak{s}) + \frac{1}{2}\mathfrak{s}^2\right] = 1 + 2q.$$

Dabei ist

$$\text{(XVIII; 20)} \qquad q = \frac{1}{r_0^2}\left[\left(x_0 + \frac{1}{2}\xi\right)\xi + \left(y_0 + \frac{1}{2}\eta\right)\eta + \left(z_0 + \frac{1}{2}\zeta\right)\zeta\right]$$

gesetzt worden, wenn

$$\xi = x - x_0; \quad \eta = y - y_0; \quad \zeta = z - z_0$$

die Koordinaten des Störungsvektors (XVIII; 17) bezeichnen. Man erhält dann

$$\text{(XVIII; 21)} \qquad \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 = (1 + 2q)^{-3/2} =$$
$$= 1 - 3q + \frac{3\cdot 5}{2!}q^2 - \frac{3\cdot 5\cdot 7}{3!}q^3 + \cdots = 1 - 3q\,f(q).$$

Aus (XVIII; 19) folgt für das indirekte Störungsglied

$$\frac{\mathfrak{q}_0}{r_0^3} - \frac{\mathfrak{q}}{r^3} = \frac{1}{r_0^3}[3q\,f\,\mathfrak{q} - \mathfrak{s}],$$

wobei die ENCKEsche *Reihe*

$$\text{(XVIII; 22)} \qquad f = 1 - \frac{5}{2}q + \frac{35}{6}q^2 - \frac{105}{8}q^3 + \cdots$$

leicht in eine Tafel mit der kleinen Größe q (die von der Ordnung der Störungen ist) als Argument gebracht werden kann (Anhang VII).

Die Differentialgleichung für den Störungsvektor $\mathfrak{s}$ lautet dann

$$\text{(XVIII; 23)} \qquad \ddot{\mathfrak{s}} = k^2 m_1\left(\frac{\mathfrak{q}_1 - \mathfrak{q}}{\varrho_1^3} - \frac{\mathfrak{q}_1}{r_1^3}\right) + \frac{k^2}{r_0^3}(3q\,f\,\mathfrak{q} - \mathfrak{s}),$$

und dieses System von drei skalaren Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit den Anfangsbedingungen

$$\mathfrak{s}_0 = 0; \quad \dot{\mathfrak{s}}_0 = 0$$

läßt sich bequem nach einer der in den Abschnitten 152 bis 155 beschriebenen numerischen Methoden integrieren. Da die Störungskoordinaten für die Oskulationsepoche verschwinden und erst mit dem Quadrat der Zwischenzeit anwachsen, ist die Anlaufsrechnung einfach und bequem. Bei der Fortführung

der Rechnung macht sich allerdings der Übelstand bemerkbar, daß die Beträge der Störungen rasch um mehrere Größenordnungen zunehmen. Man wird daher, wenn man die Integration über einen längeren Zeitraum (etwa über mehrere Umläufe) fortsetzen will, von Zeit zu Zeit auf neue oskulierende Elemente übergehen oder zeitweilig die Schrittweite verkleinern müssen, was immer einen unangenehmen Bruch in der Stetigkeit der Rechenoperationen bedeutet.

Für manche Zwecke der Störungsrechnung ist es wünschenswert, mit möglichst geringem Arbeitsaufwand genäherte Werte der Störungsbeträge berechnen zu können, die für beschränkte Zeitintervalle vor oder nach der Oskulationsepoche einigermaßen genau sind. Das ist z.B. der Fall, wenn man die aus einer ersten Bahnbestimmung stammenden vorläufigen Bahnelemente eines Planeten oder Kometen auf Grund weiterer Beobachtungen und unter Berücksichtigung der Störungen zu verbessern sucht oder wenn man vor einer numerischen Integration auf Anhieb und ohne umständliche Iteration eine Anzahl von Stützwerten braucht, die gerade genau genug sind, um als Anlaufsfolge verwendbar zu sein, und schließlich, wenn es sich weniger um die Berechnung exakter gestörter Ephemeriden handelt, als lediglich darum, einen ersten Überblick über das Verhalten der Störungen (Größenordnung, Geschwindigkeit und Sinn des Anwachsens usw.) in der weiteren Umgebung der Ausgangsepoche zu gewinnen. Gegebenenfalls lassen sich die genäherten Werte der gestörten Koordinaten nachträglich verbessern, wenn es gelingt, für die vernachlässigten Reste Differentialgleichungen aufzustellen, die sich numerisch integrieren lassen.

Eine Variante der ENCKEschen Methode der Berechnung spezieller Störungen der rechtwinkligen Koordinaten, die diesen Forderungen entspricht, ist von K. STUMPFF[1]) angegeben worden. Es sei wieder $\mathfrak{q}$ der Ortsvektor des gestörten, $\mathfrak{q}_0$ der des ungestörten Planetoiden in der oskulierenden Bahn und $\mathfrak{q}_1$ der Ortsvektor des Störplaneten (Jupiter). Dann gilt

$$\ddot{\mathfrak{q}} = -\frac{\mathfrak{q}}{r^3} - m\left(\frac{\mathfrak{q}-\mathfrak{q}_1}{\varrho_1^3} + \frac{\mathfrak{q}_1}{r_1^3}\right), \quad (\varrho_1 = |\mathfrak{q}-\mathfrak{q}_1|),$$

$$\ddot{\mathfrak{q}}_0 = -\frac{\mathfrak{q}_0}{r_0^3},$$

$$\ddot{\mathfrak{q}}_1 = -(1+m)\frac{\mathfrak{q}_1}{r_1^3},$$

wenn wir annehmen, daß der Störplanet (Jupiter) mit der Masse m eine ungestörte elliptische Bahn beschreibt, was für Zwecke der Störungsrechnung immer ausreicht, und wenn die Zeiteinheit so festgesetzt wird, daß $k = 1$ ist. Außerdem sei $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} - \mathfrak{q}_1$ der jovizentrische Ortsvektor des Planetoiden, und es sei $\mathfrak{p}_0$ der (ebenfalls jovizentrische) Ortsvektor eines fiktiven Planetoiden, der um Jupiter eine ungestörte Kegelschnittbahn beschreibt. Diese fiktive Bahn sei so beschaffen, daß zur Epoche der Oskulation ($t = 0$) die Anfangsbedingungen

$$\mathfrak{p}_0(0) = \mathfrak{p}(0); \quad \dot{\mathfrak{p}}_0(0) = \dot{\mathfrak{p}}(0)$$

[1]) K. STUMPFF, A.N. *273*, 105 (1942).

gelten; ferner sei

$$\ddot{\mathfrak{p}}_0 = -m\frac{\mathfrak{p}_0}{\varrho_0^3}, \quad (\varrho_0 = |\mathfrak{p}_0|).$$

Aus

$$\ddot{\mathfrak{q}} = -\frac{\mathfrak{q}}{r^3} - m\left(\frac{\mathfrak{p}}{\varrho_1^3} + \frac{\mathfrak{q}_1}{r_1^3}\right),$$

$$0 = \left(\ddot{\mathfrak{q}}_0 + \frac{\mathfrak{q}_0}{r_0^3}\right) + \frac{m}{1+m}\left[\ddot{\mathfrak{q}}_1 + (1+m)\frac{\mathfrak{q}_1}{r_1^3}\right] + \left(\ddot{\mathfrak{p}}_0 + m\frac{\mathfrak{p}_0}{\varrho_0^3}\right)$$

(die drei Teile der letzteren Gleichung verschwinden jeder für sich) erhält man durch Addieren

$$\ddot{\mathfrak{q}} = \ddot{\mathfrak{q}}_0 + \left(\frac{\mathfrak{q}_0}{r_0^3} - \frac{\mathfrak{q}}{r^3}\right) + \left(\ddot{\mathfrak{p}}_0 + \frac{m}{1+m}\ddot{\mathfrak{q}}_1\right) + m\left(\frac{\mathfrak{p}_0}{\varrho_0^3} - \frac{\mathfrak{p}}{\varrho^3}\right) =$$

$$= \ddot{\mathfrak{q}}_0 + \ddot{\mathfrak{p}}_0 + \frac{m}{1+m}\ddot{\mathfrak{q}}_1 + \ddot{\mathfrak{R}},$$

$$\ddot{\mathfrak{R}} = \left(\frac{\mathfrak{q}_0}{r_0^3} - \frac{\mathfrak{q}}{r^3}\right) + m\left(\frac{\mathfrak{p}_0}{\varrho_0^3} - \frac{\mathfrak{p}}{\varrho^3}\right),$$

wo $\ddot{\mathfrak{R}}$ eine Restfunktion bedeutet. Integration ergibt dann

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0 + [\mathfrak{p}_0(\tau) - (\mathfrak{p}_0(0) + \tau\dot{\mathfrak{p}}_0(0))] + \frac{m}{1+m}[\mathfrak{q}_1(\tau) - (\mathfrak{q}_1(0) + \tau\,\mathfrak{q}_1(0))] + \mathfrak{R}(\tau) =$$
$$= \bar{\mathfrak{q}} + \mathfrak{R}.$$

Der Näherungswert $\bar{\mathfrak{q}}$ läßt sich leicht berechnen, da er sich aus drei ungestörten Bewegungen zusammensetzt, nämlich aus $\mathfrak{q}_0(\tau)$, $\mathfrak{p}_0(\tau)$, $\mathfrak{q}_1(\tau)$, die man nach den in Kapitel V beschriebenen Methoden ephemeridenmäßig berechnen kann.

Das eigentliche Störungsproblem bezieht sich also auf die Berechnung des Doppelintegrals über die Störungsfunktion

$$\ddot{\mathfrak{R}} = \left(\frac{\mathfrak{q}_0}{r_0^3} - \frac{\mathfrak{q}}{r^3}\right) + m\left(\frac{\mathfrak{p}_0}{\varrho_0^3} - \frac{\mathfrak{p}}{\varrho_1^3}\right), \quad [\mathfrak{R}(0) = \dot{\mathfrak{R}}(0) = 0],$$

die erheblich einfacher gebaut ist als $\mathfrak{z}$ in (XVIII; 18) oder (XVIII; 23). Der erste Term ist mit dem indirekten Störungsglied der ENCKEschen Methode identisch und kann nach demselben Verfahren berechnet werden. Er ist für ziemlich lange Zeit klein, da er aus der Differenz zweier Bewegungen besteht, die mit den gleichen Anfangswerten beginnen und sich erst in den Gliedern mit τ^2 um Beträge von der Ordnung der störenden Masse unterscheiden. In der ENCKEschen Formel (XVIII; 23) ist dies für das direkte Störungsglied nicht mehr der Fall; zwar tritt auch hier die Störmasse m als Faktor einer Differenz auf, aber hier handelt es sich um die Differenz von Funktionen, deren Anfangswerte sehr verschieden sind und die daher rasch wachsende Beträge annimmt. In der obigen Formel für die Störungsfunktion besteht dagegen auch das direkte Glied aus der Differenz zweier gleichartiger Funktionen, deren Anfangswerte (Ort und Geschwindigkeit) übereinstimmen. Das direkte Glied ist daher von der Ordnung $m\,\tau^2$, beide liefern also nach zweimaliger Integration Störungsterme von der Ordnung τ^4.

Die Störungsrechnung nach dieser Methode hat also den Vorteil, daß die Störungsbeträge anfänglich äußerst langsam wachsen und in einem ziemlich breiten Raum um die Oskulationsepoche herum als verschwindend klein angesehen werden können. Die Anlaufsrechnung wird daher sehr einfach, selbst wenn man große Schrittweiten wählt. Später beginnen die Störungen $\mathfrak{R}$ rasch anzuwachsen, und zwar rascher als die ENCKEschen Störungen $\mathfrak{s}$, erreichen aber erst nach langer Zeit (bei normalen Planetoiden bis zu zwei Jahren nach der Oskulation) deren Größenordnung, so daß dann allerdings ein Übergang auf neue Ausgangselemente nötig wird.

Ein weiterer Vorteil dieser Methode springt in die Augen. Die Störungsfunktion $\mathfrak{R}$ setzt sich aus zwei gleichartig gebauten Termen zusammen, von denen einer sich auf eine heliozentrische, der andere auf eine planetozentrische (jovizentrische) Bewegung bezieht. Man erkennt leicht, daß diese Struktur der Formel auch erhalten bleibt, wenn mehrere störende Körper vorhanden sind, deren Bewegungen man zum Zwecke der Störungsrechnung (für gewisse Zeitintervalle um die Oskulationsepoche herum) genau genug durch oskulierende Kegelschnittbahnen ersetzen kann. Handelt es sich um einen Körper (etwa einen Kometen), der aus dem Anziehungsbereich eines Zentralkörpers (Sonne) in den eines anderen (Jupiter) hinüberwechselt, so ändern sich die Formeln der Störungsrechnung nicht, wohl aber vertauschen indirektes und direktes Störungsglied ihre Rollen. Diese Eigenschaft der Formeln machen sie auch für die Anwendung bei der Berechnung der Bahnen künstlicher Himmelskörper (Raumsonden) besonders geeignet; denn hier taucht ja sehr häufig das Problem auf, die Bahn eines solchen Körpers aus dem Anziehungsbereich der Erde in den anderer Himmelskörper (Mond, Sonne, Planeten) hinein zu verfolgen.

157. *Spezielle Störungen der Kegelschnittselemente*

Die bisher beschriebenen Methoden der speziellen Störungsrechnung liefern die gestörten rechtwinkligen Koordinaten des Körpers oder die an die ungestörten Koordinaten einer oskulierenden Bahn anzubringenden Störungen selbst. Die Lösung des Problems wird durch numerische Integration eines Systems von Differentialgleichungen zweiter Ordnung erzielt, das stets von der Form (XVIII; 2) ist, also aus drei Gleichungen von gleichartigem Bau besteht. Die Vorteile, die diesem Umstand zu verdanken sind, springen in die Augen: 1. Es sind drei parallellaufende Integrationen nach dem gleichen Algorithmus durchzuführen; 2. die Rechnung ist einfach und durchsichtig und daher auch für programmgesteuerte Rechenanlagen besonders geeignet.

Diesen wertvollen Vorzügen stehen einige Nachteile gegenüber: Wie schon erwähnt, wachsen die Störungen mit der Zeit stark an, so daß man bei Integrationen über lange Zeiträume mitunter gezwungen ist, die Schrittweite zu verkleinern oder die Integration von neuen Anfangswerten aus neu zu beginnen. Außerdem werden die Änderungen der Bahnverhältnisse, die am besten in den Kegelschnittselementen der die gestörte Bahn zu verschiedenen Zeiten oskulierenden Bahnen zum Ausdruck kommen, in den Ephemeriden nicht sichtbar. Man kann natürlich, wenn man Wert darauf legt, die Elemente der oskulierenden Bahnen zu jedem gewünschten Zeitpunkt aus der Ephemeride der Ko-

ordinaten entnehmen. Man bestimmt dann, etwa für das Argument a der Ephemeride, die Differentialquotienten der Koordinaten nach der Zeit mit der Interpolationsformel (XVII; 41):

$$h\,\dot{x}(a) = x^{\mathrm{I}}(a) - \frac{1}{6}x^{\mathrm{III}}(a) + \frac{1}{30}x^{\mathrm{V}}(a) - \frac{1}{140}x^{\mathrm{VII}}(a) + \cdots,$$
$$\left[x^{(2n+1)}(a) = \frac{1}{2}\{\nabla^{2n+1}(a+n) + \nabla^{2n+1}(a+n+1)\}\right]$$

usw. und kann dann aus den „lokalen Elementen" $x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ nach den in Band I beschriebenen Verfahren (Abschnitt 39) die für die Epoche a gültigen oskulierenden Kegelschnittselemente ableiten. Das erfordert aber jedesmal eine etwas umständliche Rechnung. Außerdem macht sich der Übelstand bemerkbar, daß manche dieser Bahnelemente (z. B. die Perihellängen schwach exzentrischer und die Knotenlängen schwach gegen die Hauptkoordinatenebene geneigter Bahnen) nur mit einer gewissen Unsicherheit aus den lokalen Elementen hervorgehen, so daß eine für verschiedene Epochen gerechnete Folge dieser Elemente keinen glatten Verlauf zeigt.

Man wird es daher häufig vorziehen, statt der Koordinaten oder der Koordinatenstörungen die veränderlichen oskulierenden Elemente selbst als unbekannte Funktionen einzuführen und deren zeitliche Änderung von einem Anfangszustand (den oskulierenden Elementen zur Epoche $t = t_0$) aus durch numerische Integration der Differentialgleichungen zu bestimmen, denen sie genügen und deren Form in Abschnitt 133 nach dem Prinzip der Variation der Konstanten entwickelt worden ist. Man nimmt dann den Nachteil in Kauf, daß jetzt sechs Differentialgleichungen (wenn auch erster Ordnung) zu lösen sind, die zudem sehr verschiedenartig und zum Teil recht kompliziert gebaut sind und die, zur Bestimmung der mittleren Länge des Himmelskörpers, durch Berechnung eines Doppelintegrals ergänzt werden müssen.

Diese Differentialgleichungen lauten nach (XV; 83) und (XV; 86), wenn die Zeit in Einheiten von $1/k$ Tagen ausgedrückt wird, also $k = 1$, $n = a^{-3/2}$, $f = 1/n\,a^2$ gesetzt wird,

$$\text{(XVIII; 24)}\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{n\,a}\frac{\partial F}{\partial \varepsilon},\\
\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{1}{n\,a^2}\left\{\frac{\partial F}{\partial \tilde{\omega}} + 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}\right\},\\
\sin i\,\frac{di}{dt} &= -\frac{\sec\varphi}{n\,a^2}\left\{\frac{\partial F}{\partial \Omega} + 2\sin^2\frac{i}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{\omega}} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}\right)\right\},\\
\sin i\,\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{n\,a^2}\sec\varphi\frac{\partial F}{\partial i},\\
\sin\varphi\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} &= \frac{1}{n\,a^2}\left\{\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \tan\varphi\tan\frac{i}{2}\frac{\partial F}{\partial i}\right\},\\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{1}{n\,a^2}\left\{\tan\varphi\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \sec\varphi\tan\frac{i}{2}\frac{\partial F}{\partial i} - 2a\frac{\partial F}{\partial a}\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Hierin bedeuten in der oskulierenden Bahn

(XVIII; 25) $\begin{cases} a \text{ die große Halbachse,} \\ n = a^{-3/2} \text{ die mittlere Bewegung in der Zeiteinheit,} \\ \varphi = \arcsin e \text{ den Exzentrizitätswinkel,} \\ \Omega \text{ die Länge des aufsteigenden Knotens,} \\ \tilde{\omega} = \Omega + \omega \text{ die Länge des Perihels,} \\ \varepsilon = \lambda - \int\limits_{t_0}^{t} n\,dt = \tilde{\omega} + M - \int\limits_{t_0}^{t} n\,dt \text{ die mittlere Länge des Pla-} \\ \text{netenortes zur Zeit } t_0 \text{ unter Berücksichtigung der zeitlichen} \\ \text{Änderung von } n. \end{cases}$

Schließlich ist F die Störungsfunktion

(XVIII; 26) $$F = m_1 \left\{ \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{r_1^3} (x\,x_1 + y\,y_1 + z\,z_1) \right\},$$

die in Abschnitt 133 zunächst mit F_0 bezeichnet worden war.

Die Differentialgleichungen (XVIII; 24) für die gestörten Elemente lassen sich in der vorliegenden Form noch nicht verwenden, da für die partiellen Ableitungen von F nach den Elementen noch brauchbare Ausdrücke gefunden werden müssen. Wird mit σ eines dieser Elemente bezeichnet, so ist offenbar

(XVIII; 27) $$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \sigma},$$

da von den Variablen, von denen F abhängt, nur die Ortskoordinaten des gestörten Körpers mit σ zu variieren sind. Die Ausdrücke (XVIII; 27) sind also lineare Funktionen der partiellen Ableitungen der Störungsfunktion nach den Koordinaten. Diese aber sind den Koordinaten der störenden Kraft proportional; denn es ist ja nach (XVIII; 1) die x-Koordinate der durch m_1 verursachten Störbeschleunigung, wenn wir wieder $k = 1$ setzen,

(XVIII; 28) $$m_1 \left(\frac{x_1 - x}{\varrho_1^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right) = \frac{\partial F}{\partial x},$$

und entsprechende Formeln gelten für y und z.

Zur Ableitung der partiellen Ableitungen der Koordinaten x, y, z nach den Bahnelementen benutzen wir die Gleichungen (IV; 13):

(XVIII; 29) $$\begin{cases} x = r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y = r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z = r \sin u \sin i, \end{cases}$$

wo r und u durch die aus der Theorie der Zweikörperbewegung bekannten Beziehungen

$$(\text{XVIII}; 30)\quad \begin{cases} \text{a)}\ M = M_0 + n(t - t_0) = \varepsilon + \int\limits_0^t n\,dt - \tilde{\omega}, \\ \text{b)}\ E - e\sin E = M, \\ \left.\begin{array}{l}\text{c)}\ r = a(1 - e\cos E) \\ \text{d)}\ \tan\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}\end{array}\right\}\ \text{oder}\ \left\{\begin{array}{l}\text{e)}\ r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin E, \\ \text{f)}\ r\cos v = a(\cos E - e),\end{array}\right. \\ \qquad\qquad \text{g)}\ u = \omega + v = \tilde{\omega} - \Omega + v \end{cases}$$

gegeben sind. Diese Gleichungen vermitteln die Abhängigkeit der Größen r (Radiusvektor) und u (Argument der Breite) von den Elementen

$$(\text{XVIII}; 31)\qquad a, e, \varepsilon; \tilde{\omega}, i, \Omega,$$

die wir brauchen, um die partiellen Ableitungen der Koordinaten nach diesen Elementen zu bilden. Es bestehen also Abhängigkeiten der Form

$$\begin{aligned} E &= E(e, \varepsilon, \tilde{\omega}) \quad \text{nach (XVIII; 30a, b)}, \\ r &= r(a, e, E) = r(a, e, \varepsilon, \tilde{\omega}) \quad \text{nach (XVIII; 30c)}, \\ v &= v(e, E) = v(e, \varepsilon, \tilde{\omega}) \quad \text{nach (XVIII; 30d)}, \\ u &= u(\tilde{\omega}, \Omega, v) = u(e, \varepsilon, \tilde{\omega}, \Omega) \quad \text{nach (XVIII; 30g)}. \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, daß die partielle Differentiation nach a sich nicht auf die zeitabhängigen Winkelgrößen M, E, v und u erstreckt, in denen a nur implizite in der mittleren Bewegung n enthalten ist; denn wir erinnern uns (s. Abschnitt 133), daß diese indirekte Abhängigkeit der Störungsfunktion F von a auf das Element ε geworfen wurde. Es ist demnach *nur* r mit der großen Halbachse a zu variieren.

Aus (XVIII; 30a, b) leiten wir zunächst ab:

$$(\text{XVIII}; 32)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial e} = \dfrac{\sin E}{1 - e\cos E} = \dfrac{a}{r}\sin E = \dfrac{\sin v}{\sqrt{1-e^2}}, \\ \dfrac{\partial E}{\partial \varepsilon} = -\dfrac{\partial E}{\partial \tilde{\omega}} = \dfrac{1}{1 - e\cos E} = \dfrac{a}{r} \end{cases}$$

und erhalten dann nach (XVIII; 30c)

$$(\text{XVIII}; 33)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial a} = 1 - e\cos E = \dfrac{r}{a}, \\ \dfrac{\partial r}{\partial e} = -a\cos E + a\,e\sin E\,\dfrac{\partial E}{\partial e} = -a\,\dfrac{\cos E - e}{1 - e\cos E} = -a\cos v, \\ \dfrac{\partial r}{\partial \varepsilon} = -\dfrac{\partial r}{\partial \tilde{\omega}} = a\,e\sin E\,\dfrac{\partial E}{\partial \varepsilon} = \dfrac{a^2 e}{r}\sin E = \dfrac{a\,e\sin v}{\sqrt{1-e^2}}. \end{cases}$$

Aus (XVIII; 30f) folgt

$$\cos v \frac{\partial r}{\partial e} - r \sin v \frac{\partial v}{\partial e} = -a\left(\sin E \frac{\partial E}{\partial e} + 1\right)$$

oder, wenn $\partial r/\partial e$ aus (XVIII; 33), $\partial E/\partial e$ aus (XVIII; 32) entnommen wird und wenn man nach der Kegelschnittsgleichung

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos v}{a(1-e^2)}$$

setzt,

$$\frac{\partial v}{\partial e} = \sin v\left(\frac{1}{1-e^2} + \frac{a}{r}\right) = \frac{\sin v\,(2 + e\cos v)}{1-e^2} = a \sin v\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right)$$

und auf gleichem Wege

$$\frac{\partial v}{\partial \varepsilon} = -\frac{\partial v}{\partial \tilde{\omega}} = \frac{a}{r}\,\frac{1 + e\cos v}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}.$$

Mit Hilfe dieser beiden Formeln ergibt sich aus (XVIII; 30g)

$$\text{(XVIII; 34)}\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial v}{\partial e} = a\sin v\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right),\\ &\frac{\partial u}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} = \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2},\\ &\frac{\partial u}{\partial \tilde{\omega}} = 1 + \frac{\partial v}{\partial \tilde{\omega}} = 1 - \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2},\\ &\frac{\partial u}{\partial \Omega} = -1. \end{aligned}\right.$$

Es seien nun

$$s = \frac{\partial F}{\partial x}; \quad t = \frac{\partial F}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial F}{\partial z}$$

die Koordinaten der durch die störenden Kräfte verursachten Beschleunigung des gestörten Körpers. Sind mehrere, etwa n, störende Planeten zu berücksichtigen, so ist

$$\text{(XVIII; 35)}\quad s = \sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\frac{x_i - x}{\varrho_i^3} - \frac{x_i}{r_i^3}\right), \ldots,$$

und man erhält dann für die Ausdrücke (XVIII; 27)

$$\text{(XVIII; 36)}\quad \frac{\partial F}{\partial \sigma} = s\frac{\partial x}{\partial \sigma} + t\frac{\partial y}{\partial \sigma} + w\frac{\partial z}{\partial \sigma},$$

wenn σ ein beliebiges der sechs Bahnelemente (XVIII; 31) vertritt. Hierin ist ferner, wenn (XVIII; 29) partiell differenziert wird,

$$\text{(XVIII; 37)}\quad \frac{\partial x}{\partial \sigma} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \sigma} + \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \sigma} + \left(\frac{\partial x}{\partial \sigma}\right),$$

und entsprechende Formeln gelten für y und z. Unter $(\partial x/\partial \sigma), \ldots$ sollen dabei die partiellen Ableitungen nach σ verstanden werden, sofern dieses Element

explizite vorkommt, nicht nur implizite in r oder u; das ist aber lediglich bei i und Ω der Fall.

Die Ausdrücke (XVIII; 36) nehmen entwickelt ziemlich komplizierte Formen an. Sie lassen sich aber wesentlich einfacher schreiben, wenn man von dem $x\,y\,z$-System (Äquator oder Ekliptik, Frühlingspunkt) auf ein geeignet zu wählendes $\xi\,\eta\,\zeta$-System übergeht. Dieses System soll folgendermaßen definiert werden: Die $\xi\,\eta$-Ebene fällt mit der zum Oskulationszeitpunkt t gehörigen oskulierenden Bahnebene zusammen, die Richtung der positiven ξ-Achse mit der Richtung zum Oskulationsort des Planeten. Die positive η-Richtung liegt dann in der Bahnebene, vom Planetenort im Sinne der Bewegung um 90° voraus, und die positive ζ-Achse zeigt, rechtläufige Bewegung vorausgesetzt, nach dem nördlichen Pol der Bahnebene. Zur Zeit der Oskulation sind also $\xi = r$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ die Koordinaten des gestörten Planeten.

Dieses „begleitende Koordinatensystem" ist übrigens schon in Abschnitt 40 (Band I, S. 197/198) vorgekommen, und wir dürfen uns daher auf die dort entwickelten Formeln berufen. Sind nämlich $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2, 3)$ die Richtungskosinus der Achsen $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ des neuen Systems gegen die entsprechenden $(\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k})$ des alten, so ist

$$\text{(XVIII; 38)} \qquad \begin{cases} \xi = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \\ \eta = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \\ \zeta = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z \end{cases}$$

eine orthogonale Transformation, die x, y, z in ξ, η, ζ überführt. Die Koeffizienten dieser Gleichungen sind nach (V; 22)

$$\text{(XVIII; 39)} \qquad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{\partial \xi}{\partial x} = \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i, \\ \beta_1 = \dfrac{\partial \xi}{\partial y} = \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i, \\ \gamma_1 = \dfrac{\partial \xi}{\partial z} = \sin u \sin i, \\ \alpha_2 = \dfrac{\partial \eta}{\partial x} = -(\sin u \cos \Omega + \cos u \sin \Omega \cos i), \\ \beta_2 = \dfrac{\partial \eta}{\partial y} = -(\sin u \sin \Omega - \cos u \cos \Omega \cos i), \\ \gamma_2 = \dfrac{\partial \eta}{\partial z} = \cos u \sin i, \\ \alpha_3 = \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} = \sin \Omega \sin i, \\ \beta_3 = \dfrac{\partial \zeta}{\partial y} = -\cos \Omega \sin i, \\ \gamma_3 = \dfrac{\partial \zeta}{\partial z} = \cos i, \end{cases}$$

und es gelten die Orthogonalitätsbedingungen

$$\text{(XVIII; 40)} \quad \begin{cases} \alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j, \\ 0 \text{ für } i \neq j, \end{cases} \\ \sum \alpha_i \beta_i = \sum \beta_i \gamma_i = \sum \gamma_i \alpha_i = 0. \end{cases}$$

Die Umkehrung der Transformation (XVIII; 38) lautet daher

$$\text{(XVIII; 41)} \quad \begin{cases} x = \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta, \\ y = \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta, \\ z = \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta. \end{cases}$$

An die Stelle der Beschleunigungsvektoren s, t, w treten im neuen System entsprechende Größen S, T, W, und es ist gemäß (XVIII; 41)

$$\text{(XVIII; 42)} \quad \begin{cases} S = \dfrac{\partial F}{\partial \xi} = \dfrac{\partial F}{\partial x} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} + \cdots = \alpha_1 s + \beta_1 t + \gamma_1 w, \\ T = \dfrac{\partial F}{\partial \eta} = \dfrac{\partial F}{\partial x} \dfrac{\partial x}{\partial \eta} + \cdots = \alpha_2 s + \beta_2 t + \gamma_2 w, \\ W = \dfrac{\partial F}{\partial \zeta} = \dfrac{\partial F}{\partial x} \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} + \cdots = \alpha_3 s + \beta_3 t + \gamma_3 w. \end{cases}$$

Führt man hierin (XVIII; 35) ein und bedenkt, daß nach (XVIII; 38) die neuen Koordinaten der Störplaneten aus den alten durch

$$\text{(XVIII; 43)} \quad \begin{cases} \xi_i = \alpha_1 x_i + \beta_1 y_i + \gamma_1 z_i, \\ \eta_i = \alpha_2 x_i + \beta_2 y_i + \gamma_2 z_i, \\ \zeta_i = \alpha_3 x_i + \beta_3 y_i + \gamma_3 z_i \end{cases}$$

hervorgehen, so findet man, da ja die Abstände r_i, ϱ_i von der Wahl des Systems unabhängig sind,

$$S_i = m_i \left(\frac{\xi_i - \xi}{\varrho_i^3} - \frac{\xi_i}{r_i^3} \right), \ldots,$$

also, da $\xi = r, \eta = \zeta = 0$ ist,

$$\text{(XVIII; 44)} \quad \begin{cases} S_i = m_i \left(\dfrac{1}{\varrho_i^3} - \dfrac{1}{r_i^3} \right) \xi_i - m_i \dfrac{r}{\varrho_i^3}, \\ T_i = m_i \left(\dfrac{1}{\varrho_i^3} - \dfrac{1}{r_i^3} \right) \eta_i, \\ W_i = m_i \left(\dfrac{1}{\varrho_i^3} - \dfrac{1}{r_i^3} \right) \zeta_i \end{cases}$$

mit

$$r_i^2 = \xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2,$$
$$\varrho_i^2 = (\xi_i - r)^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2.$$

Für logarithmische Rechnung ist es bequemer, Polarkoordinaten zu benutzen; die ekliptikalen Polarkoordinaten r_i, l_i, b_i der Störplaneten findet man in den Ephemeriden der Jahrbücher.

Abb. 32. Koordinaten des Störplaneten im begleitenden Koordinatensystem

Es sei (Abb. 32) an der heliozentrischen Sphäre ΥK die Ekliptik, KP die Spur der oskulierenden Bahn, P der sphärische Ort des gestörten Planeten und $KP = u$ sein Argument der Breite. Ferner sei P_1 der Ort eines Störplaneten mit l_1, b_1 als ekliptikaler Länge und Breite. In bezug auf die oskulierende Bahnebene und deren aufsteigenden Knoten K als Anfangspunkt der Längenzählung sei $L_1 = KR_1$ die Länge und $B_1 = R_1P_1$ die Breite des Störplaneten. Verlegen wir den Anfangspunkt der Längenzählung von K nach P, so wird die Länge $PR_1 = L_1 - u$, und es ist dann

$$\text{(XVIII; 45)} \qquad \begin{cases} \xi_1 = r_1 \cos B_1 \cos(L_1 - u), \\ \eta_1 = r_1 \cos B_1 \sin(L_1 - u), \\ \zeta_1 = r_1 \sin B_1. \end{cases}$$

Die Polarkoordinaten L_1, B_1 ergeben sich sodann aus dem Dreieck ONP_1, das die nördlichen Pole (N) der Ekliptik und (O) der oskulierenden Bahnebene mit P_1 bilden. Nach den Grundgleichungen der sphärischen Trigonometrie folgt aus diesem Dreieck

$$\begin{aligned} \cos B_1 \cos L_1 &= \cos b_1 \cos(l_1 - \Omega), \\ \cos B_1 \sin L_1 &= \sin b_1 \sin i + \cos b_1 \cos i \sin(l_1 - \Omega), \\ \sin B_1 &= \sin b_1 \cos i - \cos b_1 \sin i \sin(l_1 - \Omega). \end{aligned}$$

Sind die Beschleunigungen S, T, W mit Hilfe von (XVIII; 44) und (XVIII; 43) bzw. (XVIII; 45) gefunden, so kann man die Ausdrücke

$$\begin{aligned} s &= \alpha_1 S + \alpha_2 T + \alpha_3 W, \\ t &= \beta_1 S + \beta_2 T + \beta_3 W, \\ w &= \gamma_1 S + \gamma_2 T + \gamma_3 W, \end{aligned}$$

die durch Umkehrung der orthogonalen Transformation (XVIII; 42) entstehen, in (XVIII; 36) einsetzen und erhält dann

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = S\frac{\partial \xi}{\partial \sigma} + T\frac{\partial \eta}{\partial \sigma} + W\frac{\partial \zeta}{\partial \sigma}$$

mit

(XVIII; 46)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial \sigma} = \alpha_1\dfrac{\partial x}{\partial \sigma} + \beta_1\dfrac{\partial y}{\partial \sigma} + \gamma_1\dfrac{\partial z}{\partial \sigma}, \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial \sigma} = \alpha_2\dfrac{\partial x}{\partial \sigma} + \beta_2\dfrac{\partial y}{\partial \sigma} + \gamma_2\dfrac{\partial z}{\partial \sigma}, \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial \sigma} = \alpha_3\dfrac{\partial x}{\partial \sigma} + \beta_3\dfrac{\partial y}{\partial \sigma} + \gamma_3\dfrac{\partial z}{\partial \sigma}. \end{cases}$$

Nun sind noch die partiellen Ableitungen $\partial x/\partial \sigma, \ldots$ nach (XVIII; 37) zu bilden, wobei die $\partial r/\partial \sigma$ nach (XVIII; 33) und die $\partial u/\partial \sigma$ nach (XVIII; 34) entnommen werden. Es ist aber, wenn wir die Relationen (XVIII; 29) und (XVIII; 39) berücksichtigen,

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \alpha_1; \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \beta_1; \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \gamma_1,$$
$$\frac{\partial x}{\partial u} = r\,\alpha_2; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = r\,\beta_2; \quad \frac{\partial z}{\partial u} = r\,\gamma_2$$

und daher nach (XVIII; 37)

(XVIII; 47)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \sigma} = \alpha_1\dfrac{\partial r}{\partial \sigma} + r\,\alpha_2\dfrac{\partial u}{\partial \sigma} + \left(\dfrac{\partial x}{\partial \sigma}\right), \\ \dfrac{\partial y}{\partial \sigma} = \beta_1\dfrac{\partial r}{\partial \sigma} + r\,\beta_2\dfrac{\partial u}{\partial \sigma} + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \sigma}\right), \\ \dfrac{\partial z}{\partial \sigma} = \gamma_1\dfrac{\partial r}{\partial \sigma} + r\,\gamma_2\dfrac{\partial u}{\partial \sigma} + \left(\dfrac{\partial z}{\partial \sigma}\right). \end{cases} \qquad \begin{array}{c|c|c} \text{(I)} & \text{(II)} & \text{(III)} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{array}$$

Multipliziert man die Gleichungen (XVIII; 47) mit den Faktoren (I), (II) bzw. (III) und addiert, so erhält man wegen der Orthogonalitätsbedingungen (XVIII; 40) und nach (XVIII; 46)

(XVIII; 48)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial \sigma} = \dfrac{\partial r}{\partial \sigma} + \alpha_1\left(\dfrac{\partial x}{\partial \sigma}\right) + \beta_1\left(\dfrac{\partial y}{\partial \sigma}\right) + \gamma_1\left(\dfrac{\partial z}{\partial \sigma}\right), \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial \sigma} = r\,\dfrac{\partial u}{\partial \sigma} + \alpha_2\left(\dfrac{\partial x}{\partial \sigma}\right) + \beta_2\left(\dfrac{\partial y}{\partial \sigma}\right) + \gamma_2\left(\dfrac{\partial z}{\partial \sigma}\right), \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial \sigma} = \alpha_3\left(\dfrac{\partial x}{\partial \sigma}\right) + \beta_3\left(\dfrac{\partial y}{\partial \sigma}\right) + \gamma_3\left(\dfrac{\partial z}{\partial \sigma}\right). \end{cases}$$

Für die Ableitungen nach den vier Elementen $a, e; \varepsilon, \tilde{\omega}$, die in (XVIII; 29) nicht explizite vorkommen, gilt also einfach

(XVIII; 49) $$\frac{\partial \xi}{\partial \sigma} = \frac{\partial r}{\partial \sigma}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial \sigma} = r\frac{\partial u}{\partial \sigma}; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma} = 0,$$

während für die Ableitungen nach i und Ω aus (XVIII; 29) und (XVIII; 39)

(XVIII; 49a) $$\begin{cases} \left(\frac{\partial x}{\partial i}\right) = r\alpha_3 \sin u; & \left(\frac{\partial x}{\partial \Omega}\right) = -r\beta_1, \\ \left(\frac{\partial y}{\partial i}\right) = r\beta_3 \sin u; & \left(\frac{\partial y}{\partial \Omega}\right) = r\alpha_1, \\ \left(\frac{\partial z}{\partial i}\right) = r\gamma_3 \sin u; & \left(\frac{\partial z}{\partial \Omega}\right) = 0 \end{cases}$$

folgt. Setzt man (XVIII; 49) und (XVIII; 49a) in (XVIII; 48) ein, so ergibt sich

(XVIII; 50) $$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial i} = \frac{\partial \eta}{\partial i} = 0; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial i} = r \sin u, \\ \frac{\partial \xi}{\partial \Omega} = 0; \frac{\partial \eta}{\partial \Omega} = r(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 - 1) = r(\cos i - 1) = -2r\sin^2\frac{i}{2}, \\ \qquad \frac{d\zeta}{\partial \Omega} = r(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1) = -r\sin i \cos u \end{cases}$$

und aus (XVIII; 46), (XVIII; 48) und (XVIII; 50) schließlich

(XVIII; 51) $$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a} = S\frac{\partial r}{\partial a}; & \frac{\partial F}{\partial \tilde{\omega}} = S\frac{\partial r}{\partial \tilde{\omega}} + Tr\frac{\partial u}{\partial \tilde{\omega}}, \\ \frac{\partial F}{\partial e} = \sec\varphi\frac{\partial F}{\partial \varphi} = S\frac{\partial r}{\partial e} + Tr\frac{\partial u}{\partial e}; & \frac{\partial F}{\partial i} = Wr\sin u, \\ \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = S\frac{\partial r}{\partial \varepsilon} + Tr\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}; & \frac{\partial F}{\partial \Omega} = -2Tr\sin^2\frac{i}{2} - \\ & \qquad - Wr\sin i \cos u. \end{cases}$$

Nachdem man in (XVIII; 51) die partiellen Ableitungen von r und u gemäß (XVIII; 33) und (XVIII; 34) ausgedrückt hat, kann man die so entstehenden Formeln bei der Bildung der rechten Seiten der Differentialgleichungen (XVIII; 24) verwerten. Diese nehmen, wenn man noch

$$e = \sin\varphi; \quad \sqrt{1 - e^2} = \cos\varphi; \quad a\cos^2\varphi = p,$$

$$\frac{p}{r} - \frac{r}{a} = (1 + e\cos v) - (1 - e\cos E) = \sin\varphi(\cos v + \cos E)$$

setzt, zunächst die Form

$$(\text{XVIII; 52a})\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{n\cos\varphi}\left\{S\sin\varphi\sin v + T\frac{p}{r}\right\},\\
\frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{na}\{S\sin v + T(\cos v + \cos E)\},\\
\frac{di}{dt} &= \frac{\cos\varphi}{na}W\frac{r}{p}\cos u,\\
\sin i\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\cos\varphi}{na}W\frac{r}{p}\sin u,\\
\sin\varphi\frac{d\tilde\omega}{dt} &= \frac{\cos\varphi}{na}\left\{-S\cos v + T\left(\frac{r}{p}+1\right)\sin v + \right.\\
&\qquad\left. + W\frac{r}{p}\sin u\sin\varphi\tan\frac{i}{2}\right\},\\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\frac{d\tilde\omega}{dt} + 2\sin^2\frac{i}{2}\cos\varphi\frac{d\Omega}{dt} - 2\frac{r}{na^2}S
\end{aligned}\right.$$

an. Vielfach setzt man auch

$$S = \frac{na}{\cos\varphi}(S);\quad T = \frac{na}{\cos\varphi}(T);\quad W = \frac{na}{\cos\varphi}(W)$$

und findet dann

$$(\text{XVIII; 52b})\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{1}{a^2}\frac{da}{dt} &= \frac{2}{p}(S)\sin\varphi\sin v + \frac{2}{r}(T),\\
\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} = \frac{de}{dt} &= (S)\sin v + (T)(\cos v + \cos E),\\
\frac{di}{dt} &= (W)\frac{r}{p}\cos u,\\
\sin i\frac{d\Omega}{dt} &= (W)\frac{r}{p}\sin u,\\
\sin\varphi\frac{d\tilde\omega}{dt} &= -(S)\cos v + (T)\left(\frac{r}{p}+1\right)\sin v + \\
&\qquad + \sin\varphi\tan\frac{i}{2}\left(\sin i\frac{d\Omega}{dt}\right),\\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= \tan\frac{\varphi}{2}\left(\sin\varphi\frac{d\tilde\omega}{dt}\right) + \tan\frac{i}{2}\cos\varphi\left(\sin i\frac{d\Omega}{dt}\right) - \\
&\qquad - 2(S)\frac{r}{p}\cos\varphi.
\end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen lassen sich noch durch

$$\text{(XVIII; 52c)} \quad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{da}{dt}\cos^2\varphi - 2a\dfrac{d\varphi}{dt}\sin\varphi\cos\varphi = 2r(T), \\ \dfrac{dn}{dt} = -\dfrac{3}{2}na\left(\dfrac{1}{a^2}\dfrac{da}{dt}\right) \end{cases}$$

ergänzen. In den Gleichungen (XVIII; 52a, b) ist darauf Rücksicht genommen worden, daß die Elemente Ω und $\tilde{\omega}$ bei kleinen Neigungen i bzw. kleinen Exzentrizitäten $e = \sin\varphi$ unsicher bestimmbar sind und sich schon bei kleinen störenden Kräften rasch ändern. Die Faktoren $\sin i$ bzw. $\sin\varphi$, die den Differentialausdrücken für diese Elemente beigefügt sind, sorgen dann dafür, daß die Störungsausdrücke auch in diesen Fällen klein bleiben. Bei der Integration über diese Ausdrücke genügt es, da die Änderungen von $\sin i$ bzw. $\sin\varphi$ klein sind, einen Mittelwert dieser Größen aus dem Integral herauszuziehen, also z. B.

$$\int_{t_0}^{t} \sin i \frac{d\Omega}{dt}\,dt = \sin i_1(\Omega - \Omega_0)$$

zu setzen, wo i_1 einen Mittelwert von $i(t)$ bedeutet.

Das Element ε dient zur Bestimmung der mittleren Länge λ oder der mittleren Anomalie M in der gestörten Bahn. Es ist ja nach (XVIII; 25)

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} + n; \quad \frac{dM}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{d\tilde{\omega}}{dt} + n$$

oder, da n aus der letzten Gleichung (XVIII; 52c) durch Integration gewonnen wird,

$$\text{(XVIII; 53)} \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} + n_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{dn}{dt}dt; \quad \frac{dM}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{d\tilde{\omega}}{dt} + n_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{dn}{dt}dt,$$

wo n_0 die mittlere Bewegung zur Zeit t_0, der Ausgangszeit der numerischen Integration, bedeutet.

Die numerische Integration selbst erfolgt in zwei Schritten: Durch einfache Integration der Gleichungen (XVIII; 52b, c) werden die Elemente a, φ, i; $\Omega, \tilde{\omega}, \varepsilon$ erhalten, z.B.

$$i(t) = i(t_0) + \int_{t_0}^{t} (W)\frac{r}{p}\cos u\,dt.$$

Sodann ergibt sich die mittlere Länge in der Bahn oder die mittlere Anomalie aus (XVIII; 53):

$$\lambda(t) = \varepsilon(t) + n_0(t - t_0) + \iint_{t_0}^{t} \frac{dn}{dt}(dt)^2; \quad M(t) = \lambda(t) - \tilde{\omega}(t),$$

wobei nach (XVIII; 52c, b)

$$\frac{dn}{dt} = -3na\left\{\frac{1}{p}(S)\sin\varphi\sin v + \frac{1}{r}(T)\right\}$$

zu setzen ist.

Bei der praktischen Ausführung der Integration beachte man, daß die Störbeschleunigungen (S), (T), (W) von der Ordnung der störenden Massen sind. Wählt man die Schrittweite h des Integrationstableaus klein genug (bei Planetoiden reicht meist $h = 40^d$, bei Kometen in Perihelnähe $h = 10^d$ oder 20^d aus), dann darf man die Ausdrücke auf den rechten Seiten von (XVIII; 52) mit den konstanten oskulierenden Elementen der Ausgangsepoche t_0 berechnen. Die dabei entstehenden Fehler sind von der Ordnung der Quadrate der störenden Massen, also selbst bei Jupiter als Störplanet klein von der Ordnung 10^{-6}. Immerhin können diese Vernachlässigungen (also die Unterdrückung der Störungen zweiter Ordnung) mit der Zeit die Genauigkeitsschwelle überschreiten, so daß es ratsam ist, von Zeit zu Zeit (etwa nach jedem vollendeten Umlauf eines Planetoiden) die Rechnung mit neuen oskulierenden Ausgangselementen weiterzuführen. Strenger, wenn auch umständlicher, ist es natürlich, wenn man bei jedem Schritt in den Integranden die Elemente wegen der Störungen verbessert und damit die Einflüsse der Störungen zweiter Ordnung voll berücksichtigt.

Eine Variante dieser Methode, die sich besonders für Bahnen mit kleinen Exzentrizitäten und Neigungen eignet, hat W. DE SITTER (1902) vorgeschlagen (s. Anhang V).

158. *Spezielle Störungen der Zylinderkoordinaten. Methode von* BRÜNNOW

Die Methode der Berechnung spezieller Elementenstörungen wird mit Vorteil benutzt, wenn es sich um elliptische Bahnen nicht allzu großer Exzentrizität handelt, also um Planeten, Planetoiden oder kurzperiodische Kometen. Will man diese Methode auch auf langgestreckte oder parabelähnliche Bahnen anwenden, so müssen gewisse Umformungen vorgenommen werden. In der Praxis werden diese Varianten kaum gebraucht, da man (etwa bei langperiodischen Kometen, die man nur in der Perihelnähe beobachten kann) die langen Zeiträume zwischen zwei aufeinanderfolgenden Erscheinungen besser und bequemer durch Berechnung von Koordinatenstörungen überbrückt. Wegen der Formeln für die Störungen parabolischer oder parabelnaher Bahnelemente sei daher auf die Literatur verwiesen.[1])

In solchen Fällen bietet auch die Berechnung spezieller Störungen der *Zylinderkoordinaten* besondere Vorteile. Sind in irgendeinem Koordinatensystem x, y, z die rechtwinkligen, r, l, b die Polarkoordinaten eines Himmelskörpers, so kann man

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos b\cos l = \sigma\cos\varphi, \\ y &= r\cos b\sin l = \sigma\sin\varphi, \\ z &= r\sin b \qquad\;\;\, = z, \end{aligned}\right\} \quad \sigma = r\cos b; \quad \varphi = l; \quad z = r\sin b$$

[1]) Zum Beispiel J. BAUSCHINGER, Die Bahnbestimmung der Himmelskörper. Leipzig 1906, S. 508–511.

schreiben, und es sind dann σ, φ, z die Zylinderkoordinaten. Wir nennen σ die *kurtierte Distanz* des Körpers, d.h. die Projektion seiner heliozentrischen Distanz r auf die $x\,y$-Ebene. Die Bewegung des Himmelskörpers wird also in eine ebene Bewegung (ausgedrückt durch die ebenen Polarkoordinaten σ, φ als Funktionen der Zeit) und die Erhebung $z(t)$ über die Hauptkoordinatenebene aufgespalten. Die Vorteile dieses Verfahrens sind besonders augenfällig, wenn man als $\sigma\,\varphi$-Ebene die Ebene einer festen oskulierenden Bahn des Himmelskörpers wählt. Wenn man nämlich den Fall einer größeren Annäherung an einen Störplaneten ausschließt (der bei Kometen gelegentlich vorkommt und auf den wir in Abschnitt 161 noch zurückkommen werden), so ist die Abweichung z von dieser Ebene immer sehr klein. Wird also als intermediäre Bahn irgendeine ungestörte Kegelschnittbewegung in der oskulierenden Bahnebene angenommen, so ist $z(t)$ eine Störungsgröße, die um Null schwanken und auch während langer Zeiten nur mäßige Maximalbeträge erreichen wird.

Sind ferner σ_0, φ_0 die ungestörten Polarkoordinaten in der oskulierenden Ebene, so kann man die gestörten in der Form

$$\sigma = \sigma_0(1 + \varrho); \quad \varphi = \varphi_0 + \psi \tag{XVIII; 54}$$

schreiben, wo die dimensionslosen Größen ϱ und ψ als Störungen der Distanz und der Länge in der Bahn gelten. Die Störungen der rechtwinkligen Koordinaten in der oskulierenden Bahnebene sind dann

$$\sigma \cos\varphi - \sigma_0 \cos\varphi_0 = \Delta x,$$
$$\sigma \sin\varphi - \sigma_0 \sin\varphi_0 = \Delta y.$$

Hieraus folgt

$$\sigma - \sigma_0 \cos(\varphi - \varphi_0) = \Delta x \cos\varphi + \Delta y \sin\varphi,$$
$$\sigma_0 \sin(\varphi - \varphi_0) = \Delta y \cos\varphi - \Delta x \sin\varphi,$$

also, wenn $\varphi - \varphi_0 = \psi$, $\sigma - \sigma_0 = \sigma_0\,\varrho$ gesetzt wird und Glieder von zweiter und höherer Ordnung in ψ vernachlässigt werden,

$$\sigma_0\,\varrho = \Delta x \cos\varphi + \Delta y \sin\varphi,$$
$$\sigma_0\,\psi = \Delta y \cos\varphi - \Delta x \sin\varphi,$$

d.h., ϱ und ψ sind von der Ordnung $\Delta x/\sigma_0$, $\Delta y/\sigma_0$. Wenn es sich also um einen langperiodischen Kometen handelt, der nur kurze Zeit in der Perihelnähe beobachtet wird, aber während eines sehr langen Zeitraums zwischen zwei Erscheinungen in großer Entfernung von der Sonne weilt, so bleiben die Störungen ϱ, ψ wegen des Faktors $1/\sigma_0$ viel kleiner als die der rechtwinkligen Koordinaten, Δx und Δy. Natürlich ist diese Verkleinerung nur formell. Der praktische Nutzen dieses Verfahrens besteht aber darin, daß in jedem Stadium der Integration die Rechengenauigkeit auf das erforderliche Maß beschränkt bleibt, die Mitführung überflüssiger Dezimalstellen also vermieden wird.

Auf die Entwicklung praktischer Methoden zur Bestimmung spezieller Störungen der Zylinderkoordinaten ist im vorigen Jahrhundert viel Mühe auf-

gewandt worden. F. Brünnow[1]) hat ein Formelsystem aufgestellt, das wegen seiner Durchsichtigkeit und Klarheit der Definitionen bemerkenswert ist. Klassische Vollendung hat aber diese Methode erst durch P. A. Hansen[2]) erfahren, dessen Analyse allerdings einige begriffliche und häufig zu Mißverständnissen Anlaß gebende Schwierigkeiten in sich schließt, im Endergebnis aber einfach und den praktischen Erfordernissen des Rechners bestens angepaßt ist.

Wir werden zunächst ein Verfahren einschlagen, das im wesentlichen der Brünnowschen Methode entspricht, um dann die Gedankengänge aufzuspüren, die der Hansenschen (und von Tietjen[3]) noch verbesserten) Methode zugrunde liegen, und sie ihrer scheinbaren Unklarheiten zu entkleiden.

Die Lage der festen oskulierenden Bahnebene, die zur Oskulationsepoche $t = t_0$ gehöre, sei durch ihre Neigung i_0 und die Länge Ω_0 ihres aufsteigenden Knotens bezüglich der Ekliptik gegeben. Die ungestörte Bewegung des Himmelskörpers (die intermediäre Bahn) in dieser Ebene sei durch die Elemente a_0, e_0, ω_0, $M_0(t_0)$ bekannt, mit deren Hilfe nach den Formeln der Ephemeridenrechnung (Kapitel IV) die ebenen Polarkoordinaten r_0 (heliozentrische Distanz) und u_0 (Argument der Breite) in der intermediären Bewegung für beliebige Zeiten berechnet werden können.

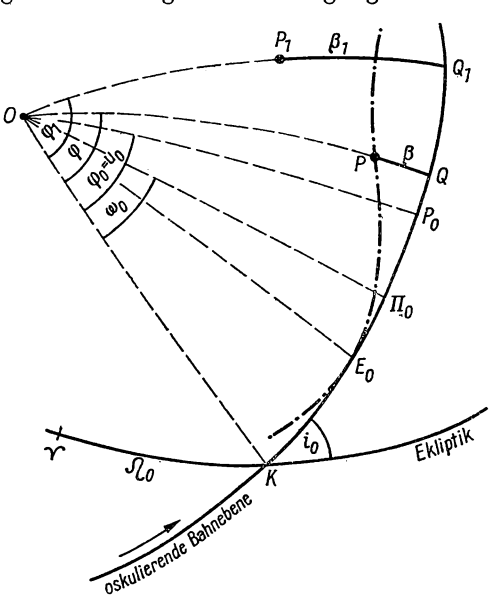


Abb. 33. Störungen der Zylinderkoordinaten, Methode von Brünnow

Es seien ferner (Abb. 33) an der heliozentrischen Sphäre ΥK die Ekliptik und KP_0 die Spur der festen oskulierenden Bahnebene. Auf der letzteren sei E_0 der (sphärische) Ort des Körpers zur Oskulationsepoche t_0, ferner Π_0 der Ort des Perihels der oskulierenden Bahn, P_0 der ungestörte Ort des Körpers zur Zeit t, P der gleichzeitige gestörte Ort, der auf der (strichpunktiert gezeichneten) Bahnspur der gestörten Bewegung liegt, die den größten Kreis KP_0 in E_0 berührt. Schließlich sei P_1 der sphärische Ort eines störenden Planeten, ebenfalls zur Zeit t.

Projizieren wir den räumlichen Ort des gestörten Himmelskörpers, den wir zum Unterschied von dem sphärischen mit (P) bezeichnen wollen, auf die

[1]) F. Brünnow, A. N. *34*, 249 (1852).
[2]) P. A. Hansen, A. N. *34*, 101 (1852); *37*, 301 (1854).
[3]) F. Tietjen, Berliner Astronomisches Jahrbuch 1877, Anhang.

Ebene der festen oskulierenden Bahn, so ist die heliozentrische Distanz des Projektionspunktes (Q) die kurtierte Distanz σ. Der sphärische Ort Q von (Q) wird erhalten, indem man P vom Pol O der oskulierenden Bahnebene aus auf KP_0 projiziert.

Die Längen φ in der oskulierenden Bahn mögen vom Knoten K aus gezählt werden. Dann ist $K\Pi_0 = \omega_0$ der ungestörte Perihelabstand vom Knoten, $KP_0 = \varphi_0 = u_0$ die Länge des ungestörten Planetenortes, $KQ_1 = \varphi_1$ die Länge des Störplaneten. Schließlich hat der Störplanet die Breite $P_1Q_1 = \beta_1$, der gestörte Körper die Breite $PQ = \beta$, der (fiktive) ungestörte Körper die Breite $\beta_0 = 0$.

Nun seien in einem zunächst beliebigen rechtwinkligen Koordinatensystem $\mathfrak{q}(x, y, z)$ der Ortsvektor des gestörten Körpers, $\mathfrak{q}_1(x_1, y_1, z_1)$ der eines Störplaneten. Dann genügt nach (XVIII; 1) $\mathfrak{q}$ der vektoriellen Differentialgleichung

$$\ddot{\mathfrak{q}} = K_1\,\mathfrak{q}_1 - k^2\left(\frac{1}{r^3} + \frac{m_1}{\varrho_1^3}\right)\mathfrak{q}, \tag{XVIII; 55}$$

in der zur Abkürzung

$$K_1 = k^2\,m_1\left(\frac{1}{\varrho_1^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) \tag{XVIII; 56}$$

gesetzt worden ist.

Wählen wir die oben beschriebene feste oskulierende Bahnebene als Hauptkoordinatenebene und bestimmen die Richtungen der positiven Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems durch drei Einheitsvektoren $\mathfrak{r}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ derart, daß

$\mathfrak{r}$ nach dem sphärischen Ort Q der Projektion des Planetenortes auf die oskulierende Bahnebene zeigt,

$\mathfrak{m}$ dem Vektor $\mathfrak{r}$ in der oskulierenden Ebene um 90° im Sinne der Bewegung des Himmelskörpers voraneilt,

$\mathfrak{n}$ nach dem Bahnpol O der oskulierenden Bahn gerichtet ist,

dann können wir die Vektoren $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}_1$ folgendermaßen in Komponenten zerlegen:

$$\mathfrak{q} = \sigma\,\mathfrak{r} + z\,\mathfrak{n}, \qquad (|\mathfrak{q}| = r = \sqrt{\sigma^2 + z^2}), \tag{XVIII; 57}$$

$$\mathfrak{q}_1 = \xi_1\,\mathfrak{r} + \eta_1\,\mathfrak{m} + \zeta_1\,\mathfrak{n}, \quad (|\mathfrak{q}_1| = r_1 = \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + z_1^2}), \tag{XVIII; 58}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \sigma_1\cos(\varphi_1 - \varphi),\\ \eta_1 &= \sigma_1\sin(\varphi_1 - \varphi),\\ \zeta_1 &= \sigma_1\tan\beta_1, \end{aligned}\right\} \quad (\sigma_1 = r_1\cos\beta_1)$$

als bekannte Größen gelten, da sie aus den in den Jahrbüchern gegebenen ekliptikalen Planetenkoordinaten durch einfache orthogonale Transformationen abgeleitet werden können.

Differenzieren wir (XVIII; 57) zweimal nach der Zeit und bedenken (s. Band I, S. 75/76), daß

$$\dot{\mathfrak{r}} = \dot{\varphi}\,\mathfrak{m}; \quad \dot{\mathfrak{m}} = -\dot{\varphi}\,\mathfrak{r}; \quad \dot{\mathfrak{n}} = 0$$

ist (da ja $\mathfrak{n}$ ein konstanter Vektor ist), so ergibt sich

$$\text{(XVIII; 59)} \qquad \ddot{\mathfrak{q}} = (\ddot{\sigma} - \sigma\,\dot{\varphi}^2)\,\mathfrak{r} + (2\dot{\sigma}\,\dot{\varphi} + \sigma\,\ddot{\varphi})\,\mathfrak{m} + \ddot{z}\,\mathfrak{n}.$$

Setzen wir nun (XVIII; 57), (XVIII; 58) und (XVIII; 59) in (XVIII; 55) ein, so erhalten wir, indem wir diese vektorielle Gleichung in drei skalare aufspalten:

die radiale Komponente

$$\text{(XVIII; 60a)} \qquad \ddot{\sigma} - \sigma\,\dot{\varphi}^2 = K_1\,\xi_1 - k^2\left(\frac{1}{r^3} + \frac{m_1}{\varrho_1^3}\right)\sigma,$$

die zirkulare Komponente

$$\text{(XVIII; 60b)} \qquad 2\dot{\sigma}\,\dot{\varphi} + \sigma\,\ddot{\varphi} = \frac{1}{\sigma}\,\frac{d}{dt}\,(\sigma^2\,\dot{\varphi}) = K_1\,\eta_1,$$

die normale Komponente

$$\text{(XVIII; 60c)} \qquad \ddot{z} = K_1\,\zeta_1 - k^2\left(\frac{1}{r^3} + \frac{m_1}{\varrho_1^3}\right)z.$$

Diese Gleichungen gelten, wenn nur ein einziger Störplanet zu berücksichtigen ist. Sind mehrere (n) Störplaneten vorhanden, so setzen wir zur Abkürzung (nach HANSEN):

$$\text{(XVIII; 61)} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} K_i\,\xi_i = \sigma \sum R; \quad \sum_{i=1}^{n} K_i\,\eta_i = \frac{1}{\sigma}\sum U; \quad \sum_{i=1}^{n} K_i\,\zeta_i = \sum W, \\ \sum_{i=1}^{n} k^2\,\frac{m_i}{\varrho_i^3} = \sum w, \end{cases}$$

ferner

$$r = \sqrt{\sigma^2 + z^2} = \sigma\,\sqrt{1 + 2s}; \quad s = \frac{z^2}{2\sigma^2}.$$

Dann kann man (s. Abschnitt 156)

$$\text{(XVIII; 62)} \qquad \frac{1}{r^3} = \frac{1}{\sigma^3}\,[1 - 3s\,f(s)]$$

schreiben, wo

$$f(s) = 1 - \frac{5}{2!}\,s + \frac{5\cdot 7}{3!}\,s^2 - \frac{5\cdot 7\cdot 9}{4!}\,s^3 + \cdots$$

die ENCKEsche Reihe (XVIII; 22) bedeutet (s. auch Anhang VII). Führt man (XVIII; 61) und (XVIII; 62) in die Differentialgleichungen (XVIII; 60) ein, so nehmen diese die Form

$$\text{(XVIII; 63)} \quad \begin{cases} \text{a)}\ \ddot{\sigma} - \sigma\,\dot{\varphi}^2 + k^2\,\sigma^{-2} = \sigma(\sum R + \Delta\sum R - \sum w) = \sigma R, \\ \text{b)}\ \frac{d}{dt}\,(\sigma^2\,\dot{\varphi}) = \sum U, \\ \text{c)}\ \ddot{z} + (k^2\,\sigma^{-3} + \sum w)\,z = \sum W + \Delta\sum W \end{cases}$$

an, wo

(XVIII; 64)
$$\begin{cases} \Delta\sum R = \frac{3}{2} k^2 \frac{z^2}{\sigma^5} f\left(\frac{z^2}{2\sigma^2}\right), \\ \Delta\sum W = z\,\Delta\sum R = \frac{3}{2} k^2 \frac{z^3}{\sigma^5} f\left(\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) \end{cases}$$

sehr kleine Korrektionsgrößen von der Ordnung z^2 bzw. z^3 bedeuten.

Die Gleichungen (XVIII; 60c) und (XVIII; 63c) sind natürlich mit (XVIII; 23) identisch, die für die Störung ζ der z-Koordinate

(XVIII; 65)
$$\ddot{\zeta} = K_1 \zeta_1 - \frac{k^2}{r_0^3} \zeta - k^2 \left[\frac{m_1}{\varrho_1^3} - \frac{3q}{r_0^3} f(q)\right] z$$

lautet. Dabei ist q durch (XVIII; 20) definiert, und es gelten nach (XVIII; 21) die Beziehungen

(XVIII; 66)
$$(1 + 2q)^{-3/2} \equiv 1 - 3q\, f(q) = \left(\frac{r_0}{r}\right)^3.$$

Beziehen wir (XVIII; 65) auf das oskulierende System, so ist wegen $\zeta = z$, $r_0 = \sigma_0$

(XVIII; 67)
$$\ddot{z} + k^2 \frac{m_1}{\varrho_1^3} z = K_1 \zeta_1 - \frac{k^2}{\sigma_0^3} [1 - 3q\, f(q)]\, z$$

und nach (XVIII; 66) und (XVIII; 62)

$$\frac{1 - 3q\, f(q)}{\sigma_0^3} = \frac{1}{r^3} = \frac{1 - 3s\, f(s)}{\sigma^3}.$$

Wenn wir aber das letzte Glied von (XVIII; 67) nach der einen oder der anderen dieser Beziehungen umformen, so ergibt sich (XVIII; 60c) bzw. (für n Störplaneten) die Differentialgleichung (XVIII; 63c), die dem Problem am besten angepaßt ist, da sie nur die Zylinderkoordinaten σ und z enthält. Sie kann nach dem COWELLschen Verfahren leicht integriert werden. Da z stets sehr klein ist, erhält man schon eine gute Näherung des Verlaufs von $z(t)$, wenn man $\sigma = \sigma_0$ und $\Delta\sum W = 0$ setzt. Liegen genäherte z, ϱ vor, die man mit praktisch ausreichender Genauigkeit durch Extrapolation des bisher ermittelten Störungsverlaufs erhält, so können σ und $\Delta\sum W$ genauer berechnet werden, wobei fast immer $f = 1$ gesetzt werden darf.

Um die Störungen $\varrho = \sigma/\sigma_0 - 1$ (oder $\varepsilon = \sigma - \sigma_0$) und $\psi = \varphi - \varphi_0$ zu ermitteln, ist es nötig, die Variablen der Gleichungen (XVIII; 63a, b) zu trennen. Durch Integration von (XVIII; 63b) ergibt sich zunächst

$$\sigma^2 \dot{\varphi} = (\sigma^2 \dot{\varphi})_{t=t_0} + \int_{t_0}^{t} \sum U\, dt.$$

Nun ist $\sum U$, ebenso wie R, von der Ordnung der störenden Massen. Für die ungestörte Bewegung ist also $\sum U = 0$ und

$$(\sigma^2 \dot{\varphi})_{t=t_0} = \sigma_0^2 \dot{\varphi}_0 = \text{const} = k\sqrt{p_0}.$$

Man erhält daher

(XVIII; 68) $$\dot{\varphi} = \frac{1}{\sigma^2}[k\sqrt{p_0} + J(t)],$$

wobei

(XVIII; 69) $$J(t) = \int_{t_0}^{t} \sum U\,dt = \int_{t_0}^{t} \sigma \sum_{i=1}^{n} K_i \eta_i\,dt$$

in erster Näherung mit $\sigma = \sigma_0$ berechnet werden kann.

Es lassen sich nun verschiedene Wege einschlagen, um eine saubere Trennung der Störungen in σ und φ zu erreichen. Ein älterer, von F. BRÜNNOW angegebener Weg führt direkt auf Differentialgleichungen für $\varepsilon = \sigma - \sigma_0$ und $\psi = \varphi - \varphi_0$.

Eliminiert man aus (XVIII; 63a) $\dot{\varphi}$ durch (XVIII; 68), so folgt

$$\ddot{\sigma} - \frac{1}{\sigma^3}[k^2 p_0 + 2J\,k\sqrt{p_0} + J^2] + \frac{k^2}{\sigma^2} = \sigma R$$

oder, wenn zur Abkürzung

(XVIII; 70) $$\lambda = 1 + \frac{J}{2k\sqrt{p_0}}$$

gesetzt wird,

(XVIII; 71) $$\ddot{\sigma} - \frac{k^2 p_0}{\sigma^3} - 2J\frac{\lambda k\sqrt{p_0}}{\sigma^3} + \frac{k^2}{\sigma^2} = \sigma R.$$

Führt man nun $\sigma = \sigma_0 + \varepsilon$ ein und bedenkt, daß nach (II; 34) und wegen der Kegelschnittsgleichung $p_0 = \sigma_0(1 + e\cos v_0)$

$$\ddot{\sigma}_0 = \frac{k^2}{\sigma_0^2} e_0 \cos v_0 = \frac{k^2}{\sigma_0^3}(p_0 - \sigma_0)$$

ist (wobei $v_0 = \varphi_0 - \omega_0$ die ungestörte wahre Anomalie bedeutet), so erhält (XVIII; 71) die Form

$$\ddot{\varepsilon} - \varepsilon R + \frac{k^2}{\sigma_0^3}\left[p_0 - \sigma_0 + (\sigma_0 + \varepsilon - p_0)\left(\frac{\sigma_0}{\sigma}\right)^3\right] = \sigma_0 R + 2J\frac{\lambda k\sqrt{p_0}}{\sigma^3} = S.$$

Schreibt man nun

$$\left(\frac{\sigma_0}{\sigma}\right)^3 = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_0 + \varepsilon}\right)^3 = (1 + \varrho)^{-3} = 1 - 3\varrho + 6\varrho^2 - 10\varrho^3 + \cdots, \qquad (\varepsilon = \sigma_0\,\varrho)$$

und berücksichtigt Terme bis zur Ordnung ϱ^2, so folgt

(XVIII; 72) $$\ddot{\varepsilon} + \varepsilon\left[\frac{k^2}{\sigma_0^4}(3p_0 - 2\sigma_0) - R\right] = S + 3\frac{k^2\varepsilon^2}{\sigma_0^5}(2p_0 - \sigma_0),$$

also eine Differentialgleichung für ε, deren Form genau derjenigen von (XVIII; 63c) entspricht.

Nach (XVIII; 68) ist ferner, für die Störung $\psi = \varphi - \varphi_0$ in Länge,

$$\dot{\psi} = \dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0 = \frac{1}{\sigma^2}[k\sqrt{p_0} + J] - \frac{k\sqrt{p_0}}{\sigma_0^2}.$$

Setzt man wieder $\sigma = \sigma_0(1 + \varrho)$, so ist

$$\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma_0^2} = \frac{1}{\sigma_0^2}\left[\frac{1}{(1+\varrho)^2} - 1\right] = -\frac{1}{\sigma_0^2}\frac{\varrho(2+\varrho)}{(1+\varrho)^2}$$

und daher

$$\text{(XVIII; 73)} \qquad \dot{\psi} = \frac{1}{\sigma^2}J - \frac{k\sqrt{p_0}}{\sigma_0^2}[2\varrho - 3\varrho^2 + 4\varrho^3 - \cdots], \qquad \left(\varrho = \frac{\varepsilon}{\sigma_0}\right).$$

Das System der Differentialgleichungen, durch deren Integration das Problem vollständig gelöst wird, lautet also

$$\text{(XVIII; 74)} \qquad \begin{cases} \ddot{z} + \left(\dfrac{k^2}{\sigma^3} + \sum w\right)z = \sum W + \Delta\sum W, \\ \ddot{\varepsilon} + \left[\dfrac{k^2}{\sigma_0^4}(3p_0 - 2\sigma_0) - R\right]\varepsilon = S + \Delta S, \\ \dot{J} = \sum U, \\ \dot{\psi} = \dfrac{J}{\sigma^2} - \dfrac{k\sqrt{p_0}}{\sigma_0^3}\varepsilon\left[2 - 3\dfrac{\varepsilon}{\sigma_0} + \cdots\right] \end{cases}$$

mit

$$R = \sum R + \Delta\sum R - \sum w; \quad S = \sigma_0 R + \frac{2\lambda k\sqrt{p_0}}{\sigma^3}J;$$

$$\Delta S = \frac{3k^2\varepsilon^2}{\sigma_0^5}(2p_0 - \sigma_0),$$

wobei $\sum R, \sum U, \sum W, \sum w, \Delta\sum R, \Delta\sum W$ durch (XVIII; 61) und (XVIII; 64) definiert sind.

In diesem System ist ε eine Störung von der Ordnung der Störungen der rechtwinkligen Koordinaten, besitzt also nicht die wünschenswerte Eigenschaft, die, wie oben bemerkt, die dimensionslose Störungsgröße $\varrho = \varepsilon/\sigma_0$ auszeichnet. Natürlich könnte man die zweite Gleichung (XVIII; 74) in eine Differentialgleichung für ϱ umformen, indem man $\ddot{\varepsilon} = \sigma_0\ddot{\varrho} + 2\dot{\sigma}_0\dot{\varrho} + \ddot{\sigma}_0\varrho$ setzt und hierin nach den Formeln der Zweikörperbewegung

$$\dot{\sigma}_0 = \frac{k}{\sqrt{p_0}}e_0\sin v_0; \quad \ddot{\sigma}_0 = \frac{k^2}{\sigma_0^2}e_0\cos v_0 = \frac{k^2}{\sigma_0^3}(p_0 - \sigma_0)$$

einführt. Dann tritt aber ein Glied mit $\dot{\varrho}$ auf, wodurch die Ausführung der numerischen Integration unnötig erschwert wird.

159. *Spezielle Störungen der Zylinderkoordinaten. Methode von* HANSEN *und* TIETJEN

Es ist das Verdienst von P. A. HANSEN, die am Ende des vorigen Abschnitts zutage getretene Unschönheit der BRÜNNOWschen Formeln beseitigt und ein Differentialgleichungssystem für die Störungen der Zylinderkoordinaten aufgestellt zu haben, in dem die einfache Form der Gleichungen (XVIII; 74) auch nach Einführung einer dimensionslosen Distanzstörung erhalten bleibt.

Daß dies möglich ist, liegt daran, daß man die intermediäre Bahn σ_0, φ_0 in der $\sigma\,\varphi$-Ebene auf *verschiedene* Weise als Kegelschnittbewegung definieren und unter den so verfügbaren Varianten der Methode diejenige mit den gewünschten Eigenschaften heraussuchen kann.

Die in Abschnitt 158 (entsprechend der BRÜNNOWschen Methode) benutzte intermediäre Bahn war die oskulierende ungestörte Kegelschnittbahn für die Oskulationsepoche t_0 selbst. Ihre Polarkoordinaten σ_0, φ_0 lassen sich nach dem Formelsystem

$$\text{(XVIII; 75)} \quad \begin{cases} n_0 = k\, a_0^{-3/2}; \quad E_0 - e_0 \sin E_0 = M_0 = M_0(t_0) + n_0(t - t_0), \\ \sigma_0 \cos v_0 = a_0(\cos E_0 - e_0), \\ \sigma_0 \sin v_0 = a_0 \sqrt{1 - e_0^2}\, \sin E_0, \\ \varphi_0 = \omega_0 + v_0 \end{cases}$$

oder nach irgendeiner anderen Vorschrift der Ephemeridenrechnung bestimmen, wenn die oskulierenden Elemente a_0, e_0, ω_0, $M_0(t_0)$ gegeben sind.

Es ist aber keineswegs notwendig, so zu verfahren. Die vom Knoten K der oskulierenden Bahnebene mit der Ekliptik aus gezählte Länge φ des gestörten Planetenortes ist ja durch die Differentialgleichung (XVIII; 68) bestimmt, deren Integral

$$\varphi = k\sqrt{p_0}\int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\sigma^2} + \int_{t_0}^{t} \frac{J(t)}{\sigma^2}\, dt + \varphi(t_0) = \bar{\omega} + \bar{v}$$

lautet, wo $\varphi(t_0) = \varphi_0(t_0)$ die Länge des gestörten Planetenortes zur Oskulationsepoche bedeutet, die ja dann gleich der Länge des ungestörten Ortes ist. Hier bedeutet, wenn wir die Bewegung von (Q), der Projektion des Planetenorts (P) auf die $\sigma\,\varphi$-Ebene, als eine gestörte ebene Kegelschnittbewegung ansehen, $\bar{\omega}$ den gestörten Perihelabstand vom Knoten bzw. die gestörte Länge des Perihels und $\bar{v}$ die gestörte wahre Anomalie. Bezeichnen wir die ungestörten Größen mit ω_0 und v_0, so kann man setzen

$$\varphi = \omega_0 + v_0 + \Delta\omega + \Delta v,$$

wo $\Delta\omega$ und Δv Störungen sind, die verschwinden, wenn die störenden Kräfte entfallen. Man hat also

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi,$$

wo

$$\varphi_0 = \varphi(t_0) + k\sqrt{p_0}\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{\sigma_0^2}$$

die ungestörte Länge und

$$\text{(XVIII; 76)}\quad \Delta\varphi = \Delta\omega + \Delta v = k\sqrt{p_0}\int_{t_0}^{t}\left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right)dt + \int_{t_0}^{t}\frac{J(t)}{\sigma^2}\,dt$$

die gesamte Störung in Länge bedeutet, die wir in Abschnitt 158 mit ψ bezeichnet haben.

Nun ist aber (XVIII; 76) eine diophantische Gleichung für die Störungen $\Delta\omega$ und Δv, deren Anteile an der gegebenen Summe $\Delta\varphi$ also noch willkürlich festgesetzt werden können. In der BRÜNNOWschen Analyse war $\Delta\omega = 0$ gesetzt worden, also $\omega = \omega_0 = \text{const}$ und $\Delta\varphi = \Delta v$. HANSEN schlägt dagegen vor, $\Delta\varphi$ in

$$\Delta\omega = \int_{t_0}^{t}\frac{J(t)}{\sigma^2}\,dt;\quad \Delta v = k\sqrt{p_0}\int_{t_0}^{t}\left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right)dt = \bar{v} - v_0$$

aufzuspalten. Auch diese Festsetzung ist im Sinne des Störungsbegriffs widerspruchsfrei; denn für verschwindende Störkräfte wird ja $\Delta\omega = 0$ und $\Delta v = 0$, da dann $J = 0$ und $\sigma = \sigma_0$ ist. Da ferner $\dot{v}_0 = k\sqrt{p_0}\,\sigma_0^{-2}$ ist, folgt

$$\text{(XVIII; 77)}\qquad \dot{\bar{v}} = \frac{k\sqrt{p_0}}{\sigma^2}.$$

Während also bei BRÜNNOW $\dot{v} = \dot{\varphi}$ durch (XVIII; 68) bestimmt ist, wird die wahre Anomalie $\bar{v}$ bei HANSEN durch (XVIII; 77) definiert. Wir werden also die intermediäre Kegelschnittbewegung nun so festsetzen müssen, daß, bei konstantem a_0, e_0, $p_0 = a_0(1 - e_0^2)$, die Perihellänge sich langsam ändert und die wahre Anomalie $\bar{v}$ der Differentialgleichung (XVIII; 77) genügt. Zu der Anomalie $\bar{v}$ definieren wir nun eine Distanz $\bar{\sigma}$ so, daß

$$\text{(XVIII; 78)}\qquad \bar{\sigma} = \frac{p_0}{1 + e\cos\bar{v}}$$

gilt, die intermediäre Bahn $\bar{\sigma}, \bar{v}$ also ein Kegelschnitt ist. *Für diese Bewegung gilt aber der Flächensatz nicht*; denn es ist ja nach (XVIII; 77)

$$\text{(XVIII; 79)}\qquad \bar{\sigma}^2\,\dot{\bar{v}} = \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma}\right)^2 k\sqrt{p_0}\,.$$

Dieser Ausdruck ist aber nicht konstant, da σ und $\bar{\sigma}$ sich durch vorläufig noch unbekannte Störungsbeträge unterscheiden. Es gilt also auch die KEPLERsche Gleichung, die ja (s. Band I, S. 105/106) aus dem Flächensatz folgt, nicht in der ursprünglichen Form. Setzen wir nämlich

$$\text{(XVIII; 80)}\qquad \begin{cases} \bar{\sigma}\cos\bar{v} = a_0(\cos\bar{E} - e_0), \\ \bar{\sigma}\sin\bar{v} = a_0\sqrt{1 - e_0^2}\,\sin\bar{E}, \end{cases}$$

was erlaubt ist, da man durch Elimination von $\bar{E}$ aus diesen Gleichungen (XVIII; 78) wiedergewinnt, so genügt die *exzentrische Anomalie* $\bar{E}$ der gestörten KEPLERschen Gleichung

(XVIII; 81) $$\bar{E} - e\sin\bar{E} = \bar{M} = M_0 + \Delta M = M_0(t_0) + n_0(t - t_0) + \Delta M,$$

in der ΔM als Störung der mittleren Anomalie aufzufassen ist, die nun so bestimmt werden muß, daß die Störungen z, $\Delta\omega$, ΔM und $\sigma - \bar{\sigma}$ das Problem lösen.

Daß dieses Verfahren die oben geforderten Bedingungen erfüllt, läßt sich leicht zeigen. Setzt man nämlich

(XVIII; 82) $$\sigma = \bar{\sigma}(1 + \nu),$$

wo ν eine Distanzstörung ist, die dimensionslos ist und sich größenordnungsmäßig ebenso verhält wie ϱ in (XVIII; 54), so ergibt sich durch zweimaliges Differenzieren nach der Zeit

(XVIII; 83) $$\begin{cases} \dot{\sigma} = \dot{\bar{\sigma}}(1 + \nu) + \bar{\sigma}\,\dot{\nu}, \\ \ddot{\sigma} = \ddot{\bar{\sigma}}(1 + \nu) + 2\dot{\bar{\sigma}}\,\dot{\nu} + \bar{\sigma}\,\ddot{\nu}. \end{cases}$$

Andererseits folgt aus (XVIII; 77), (XVIII; 78) und (XVIII; 82)

$$\dot{\bar{\sigma}} = \frac{p_0\, e_0 \sin\bar{v}}{(1 + e_0\cos\bar{v})^2}\,\dot{\bar{v}} = \frac{\bar{\sigma}^2}{p_0}\, e_0\sin\bar{v}\,\frac{k\sqrt{p_0}}{\bar{\sigma}^2} = \frac{k}{\sqrt{p_0}}\,\frac{e_0\sin\bar{v}}{(1+\nu)^2},$$

$$\ddot{\bar{\sigma}} = \frac{k}{\sqrt{p_0}}\,\frac{e_0\cos\bar{v}}{(1+\nu)^2}\,\dot{\bar{v}} - \frac{2k}{\sqrt{p_0}}\,\frac{e_0\sin\bar{v}}{(1+\nu)^3}\,\dot{\nu} =$$

$$= \frac{k^2}{\bar{\sigma}^2}\,\frac{e_0\cos\bar{v}}{(1+\nu)^4} - \frac{2k}{\sqrt{p_0}}\,\frac{e_0\sin\bar{v}}{(1+\nu)^3}\,\dot{\nu}.$$

Setzt man dies in (XVIII; 83) ein, so folgt

(XVIII; 84) $$\ddot{\sigma} = \bar{\sigma}\left(\ddot{\nu} + \frac{k^2\, e_0\cos\bar{v}}{\sigma^3}\right),$$

d.h., die $\dot{\nu}$ enthaltenden Terme heben sich gerade heraus. Substituiert man (XVIII; 84) in (XVIII; 71) und dividiert durch $\bar{\sigma} = \sigma/(1 + \nu)$, so erhält man als Differentialgleichung für die Distanzstörung

$$\ddot{\nu} + \frac{k^2}{\sigma^3}\left(e_0\cos\bar{v} - \frac{p_0}{\bar{\sigma}} + 1 + \nu\right) = \left(R + 2J\,\frac{\lambda\, k\sqrt{p_0}}{\sigma^4}\right)(1 + \nu).$$

Da aber $e_0\cos\bar{v} - p_0/\bar{\sigma} + 1 = 0$ ist, ergibt sich schließlich

(XVIII; 85) $$\ddot{\nu} + \nu\left(\frac{k^2}{\sigma^3} - T\right) = T = R + 2J\,\frac{\lambda\, k\sqrt{p_0}}{\sigma^4}.$$

Nun ist noch eine Differentialgleichung für ΔM erforderlich. Aus (XVIII; 81) folgt durch Differenzieren

$$\text{(XVIII; 86)} \qquad \dot{\bar{E}}(1 - e_0 \cos \bar{E}) = \dot{\bar{E}} \frac{\bar{\sigma}}{a_0} = \dot{\bar{M}} = n_0 + \frac{d\Delta M}{dt}.$$

Es ist aber, da die Gleichungen (XVIII; 78) und (XVIII; 80) gelten, nach Band I, S. 71 oben,

$$d\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^2 \frac{e_0}{p_0} \sin \bar{v}\, d\bar{v} = a_0 e_0 \sin \bar{E}\, d\bar{E},$$

d.h., es ist

$$a_0 \dot{\bar{E}} \sin \bar{E} = \frac{\bar{\sigma}^2}{p_0} \dot{\bar{v}} \sin \bar{v}.$$

Andererseits ist nach (XVIII; 80)

$$a_0 \sin \bar{E} = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{1 - e_0^2}} \sin \bar{v} = \sqrt{a_0} \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{p_0}} \sin \bar{v}, \quad \text{also} \quad \dot{\bar{E}} = \dot{\bar{v}} \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{a_0 p_0}}.$$

Setzt man dies in (XVIII; 86) ein und berücksichtigt man (XVIII; 79) und $k\, a_0^{-3/2} = n_0$, so folgt

$$\frac{d\Delta M}{dt} = \dot{\bar{E}} \frac{\bar{\sigma}}{a_0} - n_0 = \dot{\bar{v}} \frac{\bar{\sigma}^2}{\sqrt{a_0^3 p_0}} - n_0 = n_0 \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma}\right)^2 - n_0$$

oder

$$\frac{d\Delta M}{dt} = -n_0 \left(1 - \frac{1}{(1+\nu)^2}\right) = -n_0\, \nu \frac{2+\nu}{(1+\nu)^2}.$$

Damit erhält das System der HANSEN-TIETJENschen Differentialgleichungen die endgültige Form

$$\text{(XVIII; 87)} \quad \begin{cases} \ddot{z} + \left(\dfrac{k^2}{\sigma^3} + \sum w\right) z = \sum W + \Delta \sum W, \\[2ex] \ddot{\nu} + \left(\dfrac{k^2}{\sigma^3} - T\right) \nu = T = R + 2J \dfrac{\lambda k \sqrt{p_0}}{\sigma^4}, \\[2ex] \dfrac{d\Delta\omega}{dt} = \dfrac{J}{\sigma^2} = \dfrac{1}{\sigma^2} \displaystyle\int_{t_0}^{t} \sum U\, dt, \\[2ex] \dfrac{d\Delta M}{dt} = -n_0\, \nu \dfrac{2+\nu}{(1+\nu)^2} \end{cases}$$

und ist durch Iteration bequem lösbar. Bestimmt man nämlich die Koordinaten der intermediären Bahn genähert durch (XVIII; 75), so erhält man mit $\sigma \approx \sigma_0$ schon gute Näherungswerte der Störungen $z, \nu, \Delta\omega, \Delta M$ durch Integration von (XVIII; 87). Mit diesen berechnet man $M = M_0 + \Delta M$, sodann $\bar{E}$ aus (XVIII; 81), $\bar{\sigma}, \bar{v}$ aus (XVIII; 80) und besitzt dann verbesserte Zylinderkoordinaten

$$\sigma = \bar{\sigma}(1+\nu); \quad \varphi = \omega_0 + \Delta\omega + \bar{v}; \quad z.$$

Dieses Verfahren ist nötigenfalls mit den verbesserten Koordinaten zu wiederholen.

Die bestechende Einfachheit und Eleganz der HANSENschen Formeln wird, was zum Schluß nicht unerwähnt bleiben darf, durch einige Nachteile erkauft, von denen die BRÜNNOWsche Methode frei ist:

1. sind bei HANSEN, außer den beiden Doppelintegralen für z und ν, *drei* einfache Integrationen auszuführen, nämlich für J, $\Delta\omega$ und ΔM, während bei BRÜNNOW nur zwei, nämlich für J und ψ, nötig sind.

2. braucht bei BRÜNNOW die KEPLERsche Gleichung bei jedem Integrationsschritt nur einmal aufgelöst und das Formelsystem (XVIII; 75) nur einmal durchgerechnet zu werden, nämlich zur Bestimmung der Koordinaten in der festen oskulierenden Bahn, die sich ja im Laufe des Iterationsverfahrens nicht mehr ändert. Statt dessen muß bei der Methode von HANSEN-TIETJEN die Auflösung der KEPLERschen Gleichung und die Berechnung der intermediären Koordinaten nicht nur bei jedem Schritt der Integration, sondern innerhalb jedes Schrittes auch bei jeder Iteration neu erfolgen. Man wird also in der Praxis bei schwach exzentrischen Bahnen die BRÜNNOWsche Methode bevorzugen, da die Vorteile der HANSENschen Methode, die in der Verwendung von ν statt ε als Distanzstörung liegen, wegen der immer ziemlich gleichbleibenden Größenordnung von σ nicht so entscheidend ins Gewicht fallen wie bei langgestreckten Kometenbahnen, die den Himmelskörper für lange Zeit in große Sonnenabstände führen.

160. *Spezielle Störungen der vektoriellen Bahnelemente. Methoden von HERRICK und MUSEN*

In den vorhergehenden Abschnitten haben wir verschiedene Methoden der Berechnung spezieller Störungen von Koordinaten (rechtwinkligen oder Zylinderkoordinaten) und von Bahnelementen kennengelernt. Die ENCKEsche Methode der Störungen der rechtwinkligen Koordinaten zeichnete sich dabei durch vollkommene Symmetrie der Formeln aus: Es wurden drei gleichartig gebaute Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die drei Störungskoordinaten $\xi = x - x_0$, $\eta = y - y_0$, $\zeta = z - z_0$ erhalten, deren Integration nach der COWELLschen oder nach anderen Methoden direkt auf eine Ephemeride der gestörten Koordinaten des Himmelskörpers führt. Dagegen liefert die Methode der speziellen Störungen der Kegelschnittselemente, als Ergebnis der Integration von sechs Differentialgleichungen erster Ordnung und höchst unsymmetrischer Gestalt, die langsam veränderlichen oskulierenden Bahnelemente selbst, aus denen man nach bekannten Methoden (s. Abschnitt 32, 33) die rechtwinkligen Koordinaten des Ortes und, wenn erwünscht, auch der Geschwindigkeit des gestörten Körpers berechnen kann. Der unbestreitbare und für den Rechner oft auch entscheidende Vorteil dieser Methode besteht darin, daß während der ganzen Dauer der Integrationsarbeit die Übersicht über die Änderung der Bahnelemente nicht verlorengeht. Allerdings sind jetzt sechs Differentialgleichungen erster Ordnung zu integrieren, abgesehen von einer zusätzlichen Doppelintegration zur Bestimmung der mittleren Länge, die

man aber umgehen kann, wenn man die Störung der mittleren Bewegung n bei jedem Integrationsschritt berücksichtigt.

Andererseits fällt der Vorteil der Methoden der Koordinatenstörungen, nämlich der Umstand, daß nur drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung von symmetrischer und algebraischer Form zu integrieren sind, außerordentlich schwer ins Gewicht. Für die sich jetzt immer mehr durchsetzenden elektronischen Verfahren sind daher die ENCKEschen Formeln weit besser geeignet als die der Elementenstörungen. Diese sind für eine programmgesteuerte Rechnung nicht nur wegen ihrer trigonometrischen Form unbequem, sondern sie erfordern auch eine viel zu umständliche Programmierung, da jeder der auftretenden Störungsausdrücke individuell gestaltet ist.

Man wird also gerade bei Verwendung elektronischer Rechenanlagen die Methoden der Koordinatenstörungen bevorzugen, obwohl man nur ungern auf eine fortlaufende Übersicht über die Änderung der oskulierenden Bahnelemente verzichtet. Man kann zwar, wie schon zu Beginn des Abschnitts 157 erwähnt wurde, aus der Ephemeride der rechtwinkligen Koordinaten auch die Geschwindigkeitskoordinaten durch Interpolation ableiten und dann nach Abschnitt 39 die oskulierenden Kegelschnittselemente für jeden gewünschten Zeitpunkt berechnen, doch ist die Genauigkeit dieses Verfahrens nicht sehr groß. Weit genauer ist es, die zu einer beliebigen Oskulationsepoche gehörenden Koordinatenstörungen direkt in die *Störungen* der Kegelschnittselemente überzuführen. Diese Reduktion erfordert aber eine recht umständliche Rechnung, die hier aus Raumgründen nicht wiedergegeben werden kann, zumal sie in der Praxis kaum benutzt wird. Der Leser sei wegen dieser Verfahren auf die Literatur verwiesen; insbesondere ist die Umwandlung der Störungen der Zylinderkoordinaten in Elementenstörungen sehr ausführlich in Abschnitt 183 von BAUSCHINGERS „Bahnbestimmung der Himmelskörper" beschrieben.

Versuche, die hauptsächlichsten Forderungen der Praxis, nämlich symmetrische und algebraische Form der Differentialgleichungen und fortlaufende Orientierung über die Variation der Bahnelemente ohne umständliche Nebenrechnung, in neuen Methoden vereinigt zu erfüllen, sind u.a. von B. STRÖMGREN[1]), S. HERRICK[2]), P. MUSEN[3]) und P. HERGET[4]) unternommen worden. Sie beruhen auf der Möglichkeit, Form und räumliche Orientierung einer oskulierenden Kegelschnittbahn durch zwei konstante Vektoren zu beschreiben, deren Koordinaten symmetrisch gebaute Ausdrücke in den Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten des Himmelskörpers sind und die bei gestörter Bewegung schwach veränderlich sein werden. Diese Störungen lassen sich dann mit Hilfe der Regeln der Vektoralgebra und Vektoranalysis bequem in einer für programmgesteuerte Rechnung geeigneten Form ausdrücken.

Es sei, zu irgendeiner Oskulationsepoche t, ein rechtwinkliges heliozentrisches Koordinatensystem durch drei Einheitsvektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ so definiert, daß $\mathfrak{a}$ nach dem Perihel der oskulierenden Bahn, $\mathfrak{b}$ nach dem Punkt mit der wahren

[1]) B. STRÖMGREN, P.o.m.M. *65*, 5 (1929).
[2]) S. HERRICK, P.A.S.P. *60*, 321 (1948); A.J. *58*, 156 (1953).
[3]) P. MUSEN, A.J. *59*, 262 (1954).
[4]) P. HERGET, A. J. *64*, 16 (1962).

Anomalie $v = 90°$ und $\mathfrak{c}$ nach demjenigen Pol der Bahnebene zeigt, von dem aus die Bewegung rechtläufig erscheint. Dann sind die fünf Elemente

(XVIII; 88) $$i, \Omega;\quad p, e, \omega$$

der oskulierenden Bahn nach Abschnitt 19, wenn wie dort die Zeiteinheit so festgelegt wird, daß $k = 1$ ist, durch die beiden Vektoren

(XVIII; 89a) $$\mathfrak{g}(c_1, c_2, c_3) = \sqrt{p}\,\mathfrak{c} \quad \text{(Flächengeschwindigkeitsvektor)},$$

(XVIII; 89b) $$\mathfrak{f}(d_1, d_2, d_3) = e\,\mathfrak{a} \quad \text{(LAPLACEscher Vektor)}$$

bestimmbar, die normal zueinander sind und zwischen denen daher die Beziehung

$$(\mathfrak{g}\,\mathfrak{f}) = c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 = 0$$

besteht. Diese beiden Vektoren lassen sich durch einen dritten,

(XVIII; 89c) $$\mathfrak{h}(e_1, e_2, e_3) = [\mathfrak{g}\,\mathfrak{f}] = e\sqrt{p}[\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}] = e\sqrt{p}\,\mathfrak{b}$$

ergänzen, und es gelten auch die Identitäten

$$(\mathfrak{g}\,\mathfrak{h}) = (\mathfrak{f}\,\mathfrak{h}) = 0.$$

Die Koordinaten dieser Vektoren sind, wenn x, y, z die Koordinaten des Ortsvektors $\mathfrak{r}$ des Körpers in der ungestörten Bahn zu irgendeiner Zeit sind und wenn $r = |\mathfrak{r}|$, $V = |\dot{\mathfrak{r}}|$ gesetzt wird,

(XVIII; 90a) $$\left\{\begin{aligned} c_1 &= y\dot{z} - z\dot{y} = \sqrt{p}\sin i \sin\Omega, \\ c_2 &= z\dot{x} - x\dot{z} = -\sqrt{p}\sin i\cos\Omega, \\ c_3 &= x\dot{y} - y\dot{x} = \sqrt{p}\cos i, \end{aligned}\right\} \text{nach (V; 7)},$$

(XVIII; 90b) $$\left\{\begin{aligned} d_1 &= \left(V^2 - \frac{1}{r}\right)x - r\dot{r}\dot{x} = e(\cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i), \\ d_2 &= \left(V^2 - \frac{1}{r}\right)y - r\dot{r}\dot{y} = e(\cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i), \\ d_3 &= \left(V^2 - \frac{1}{r}\right)z - r\dot{r}\dot{z} = e\sin\omega\sin i, \\ &\qquad\text{nach (V; 10)}, \end{aligned}\right.$$

(XVIII; 90c) $$\left\{\begin{aligned} e_1 &= c_2 d_3 - c_3 d_2 = \dot{r}x - r^2\left(\dot{r}^2 - V^2 + \frac{1}{r}\right)\dot{x} = \\ &= -e\sqrt{p}(\sin\omega\cos\Omega + \cos\omega\sin\Omega\cos i), \\ e_2 &= c_3 d_1 - c_1 d_3 = \dot{r}y - r^2\left(\dot{r}^2 - V^2 + \frac{1}{r}\right)\dot{y} = \\ &= -e\sqrt{p}(\sin\omega\sin\Omega - \cos\omega\cos\Omega\cos i), \\ e_3 &= c_1 d_2 - c_2 d_1 = \dot{r}z - r^2\left(\dot{r}^2 - V^2 + \frac{1}{r}\right)\dot{z} = \\ &= e\sqrt{p}\cos\omega\sin i, \\ &\qquad\text{nach (XVIII; 89c)}. \end{aligned}\right.$$

In der Tat folgen aus je zwei dieser Vektoren die fünf Elemente (XVIII; 88) eindeutig, wobei jedesmal eine der sechs skalaren Gleichungen überzählig ist und als Kontrolle benutzt werden kann. So erhält man z. B. aus (XVIII; 90a, b)

$$\tan i \cos \Omega = -\frac{c_2}{c_3}; \quad \tan i \sin \Omega = \frac{c_1}{c_3}; \quad p = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2,$$

$$e \cos\omega = d_1 \cos \Omega + d_2 \sin \Omega; \quad e \sin\omega \cos i = d_2 \cos \Omega - d_1 \sin \Omega$$

und zur Kontrolle

$$e \sin\omega \sin i = d_3.$$

Statt dessen kann man auch die rein algebraischen und daher für elektronische Rechnung geeigneteren Formeln

$$\tan \Omega = -\frac{c_1}{c_2}; \quad \tan i = \frac{1}{c_3} \sqrt{c_1^2 + c_2^2}; \quad p = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2,$$

$$\tan\omega = \frac{d_3 \sqrt{p}}{c_1 d_2 - c_2 d_1}; \quad e^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$$

benutzen. Entsprechende Formelsysteme erhält man, wenn man die Vektorenpaare $\mathfrak{g}, \mathfrak{f}$ bzw. $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ als gegeben voraussetzt.

Für eine gestörte Bewegung werden die Vektoren $\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, \mathfrak{h}$ schwach veränderliche Funktionen der Zeit und können durch Integration von Differentialgleichungen bestimmt werden. Ist dies geschehen, so wird zur vollständigen Lösung des Problems nur noch eine weitere Integration zur Bestimmung der Perihelzeit T oder der mittleren Anomalie M nötig sein.

S. Herrick benutzt in seiner Methode die Vektoren $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{h}$, deren Koordinaten, wie die Gleichungen (XVIII; 90b, c) erkennen lassen, die allgemeine Form

$$F x + G \dot{x}; \quad F y + G \dot{y}; \quad F z + G \dot{z}$$

besitzen, wo F, G (für $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{h}$ verschiedene) Funktionen der Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten sind, die symmetrisch gebaut und von der Wahl des $x\,y\,z$-Systems unabhängig sind. Sie lassen sich also durch die „lokalen Invarianten"

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}; \quad V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

bzw. durch die in Kapitel V eingeführten Größen

$$\mu = \frac{1}{r^3}, \quad \sigma = \frac{\dot{r}}{r}, \quad \omega = \frac{V^2}{r^2}; \quad \varepsilon = \omega - \mu, \quad \varrho = \mu - \varepsilon, \quad \vartheta = \omega - \sigma^2 = \mu + \varepsilon - \sigma^2$$

ausdrücken. Schreibt man also

$$\mathfrak{f} = q\,\mathfrak{r} - u\,\dot{\mathfrak{r}}; \quad \mathfrak{h} = s\,\mathfrak{r} - w\,\dot{\mathfrak{r}},$$

so folgt aus (XVIII; 90b, c), und da nach (V; 18) $r^4\,\vartheta = p$ ist,

$$
\text{(XVIII; 91)}\quad \begin{cases} q = V^2 - \dfrac{1}{r} = r^2(\omega - \mu) = r^2\,\varepsilon; & u = r\,\dot{r} = r^2\,\sigma, \\ s = \dot{r} = r\,\sigma = \dfrac{u}{r}; & w = r^2\left(\dot{r}^2 - V^2 + \dfrac{1}{r}\right) = \\ & = r^4(\sigma^2 - \omega) + r = r - p. \end{cases}
$$

Differenziert man u und w nach der Zeit, so erhält man

$$
\text{(XVIII; 92)}\quad \begin{cases} \dot{u} = 2r\,\dot{r}\,\sigma + r^2\,\dot{\sigma} = 2r^2\,\sigma^2 + r^2(\varepsilon - 2\sigma^2) = r^2\,\varepsilon = q, \\ \dot{w} = \dot{r} = r\,\sigma = s \end{cases}
$$

und daher

$$
\text{(XVIII; 93)}\qquad \mathfrak{f} = \dot{u}\,\mathfrak{r} - u\,\dot{\mathfrak{r}}; \quad \mathfrak{h} = \dot{w}\,\mathfrak{r} - w\,\dot{\mathfrak{r}}.
$$

Für die ungestörte Bewegung des Himmelskörpers sind $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{h}$ konstante Vektoren, und da $\ddot{\mathfrak{r}} = -\mu\,\mathfrak{r}$ gilt, folgt

$$
\dot{\mathfrak{f}} = \ddot{u}\,\mathfrak{r} + \mu\,u\,\mathfrak{r} = 0; \quad \dot{\mathfrak{h}} = \ddot{w}\,\mathfrak{r} + \mu\,w\,\mathfrak{r} = 0.
$$

Es ist also

$$
\ddot{u} = -\mu\,u; \quad \ddot{w} = -\mu\,w.
$$

Diese Beziehungen lassen sich auch direkt aus (XVIII; 92) durch nochmaliges Differenzieren ableiten:

$$
\begin{aligned}
\ddot{u} &= 2r\,\dot{r}\,\varepsilon + r^2\,\dot{\varepsilon} = 2r^2\,\sigma\,\varepsilon - r^2\,\sigma\,(2\varepsilon + \mu) = -r^2\,\sigma\,\mu = -\mu\,u, \\
\ddot{w} &= \dot{r}\,\sigma + r\,\dot{\sigma} = r\,\sigma^2 + r(\varepsilon - 2\sigma^2) = r(\varepsilon - \sigma^2) = \\
&= r(\vartheta - \mu) = \mu(p - r) = -\mu\,w.
\end{aligned}
$$

Für die gestörte Bewegung gilt

$$
\ddot{\mathfrak{r}} = -\mu\,\mathfrak{r} + \mathfrak{F},
$$

wenn

$$
\mathfrak{F} = m_1\left(\frac{\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}}{\varrho_1^3} - \frac{\mathfrak{r}_1}{r_1^3}\right); \quad \varrho_1^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2
$$

den Vektor der Störbeschleunigung bezeichnet, die dem Himmelskörper durch den Planeten mit der Masse m_1 und dem Ortsvektor $\mathfrak{r}_1$ erteilt wird, bzw., wenn mehrere Störplaneten vorhanden sind, die Summe über entsprechende Ausdrücke.

Wir führen nun einen „Störungsoperator“ δ ein, der, angewandt auf irgendeine skalare oder vektorielle Funktion φ der Koordinaten des Ortes oder der Geschwindigkeit des gestörten Körpers, die der ungestörten zeitlichen Änderung von φ hinzuzufügende Störung bezeichnet. Es ist also beispielsweise

$$
\delta\,\mathfrak{r} = 0; \quad \delta\,\dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{F},
$$

und für jedes Bahnelement ψ, das in der ungestörten Bewegung konstant ist, gilt

$$
\frac{d\psi}{dt} = \delta\psi.
$$

Für die Störungsausdrücke der drei Vektoren $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}$ erhält man demnach aus (XVIII; 93) und $\mathfrak{g} = [\mathfrak{r}\,\dot{\mathfrak{r}}]$

$$\text{(XVIII; 94)}\quad \left\{\begin{aligned} \delta\mathfrak{f} &= \delta(\dot{u}\,\mathfrak{r} - u\,\dot{\mathfrak{r}}) = \delta\dot{u}\,\mathfrak{r} - \delta u\,\dot{\mathfrak{r}} - u\,\mathfrak{F},\\ \delta\mathfrak{h} &= \delta(\dot{w}\,\mathfrak{r} - w\,\dot{\mathfrak{r}}) = \delta\dot{w}\,\mathfrak{r} - \delta w\,\dot{\mathfrak{r}} - w\,\mathfrak{F},\\ \delta\mathfrak{g} &= \delta[\mathfrak{r}\,\dot{\mathfrak{r}}] = [\mathfrak{r}\,\mathfrak{F}]. \end{aligned}\right.$$

Ferner ergibt sich aus $u = (\mathfrak{r}\,\dot{\mathfrak{r}})$, $w = u^2 - r^2\,\dot{\mathfrak{r}}^2 + r = r - p$, $p = \mathfrak{g}^2$

$$\text{(XVIII; 95)}\quad \left\{\begin{aligned} \delta u &= (\mathfrak{r}\,\mathfrak{F}),\\ \delta w &= 2u\,\delta u - 2r^2(\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{F}) = 2\{(\mathfrak{r}\,\dot{\mathfrak{r}})\,(\mathfrak{r}\,\mathfrak{F}) - r^2(\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{F})\} =\\ &= -\delta p = -2\mathfrak{g}\,\delta\mathfrak{g} = -2(\mathfrak{g}\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{F}) \end{aligned}\right.$$

und aus $\dot{u} = q = \dot{\mathfrak{r}}^2 - 1/r$, $\dot{w} = s = u/r$

$$\text{(XVIII; 96)}\qquad \delta\dot{u} = 2(\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{F});\quad \delta\dot{w} = \frac{1}{r}\,\delta u = \frac{1}{r}\,(\mathfrak{r}\,\mathfrak{F}).$$

Somit folgen aus (XVIII; 94), (XVIII; 95) und (XVIII; 96) die Störungsgleichungen

$$\text{(XVIII; 97)}\quad \left\{\begin{aligned} \delta\mathfrak{f} &= 2(\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{F})\,\mathfrak{r} - (\mathfrak{r}\,\mathfrak{F})\,\dot{\mathfrak{r}} - (\mathfrak{r}\,\dot{\mathfrak{r}})\,\mathfrak{F},\\ \delta\mathfrak{h} &= \frac{1}{r}\,(\mathfrak{r}\,\mathfrak{F})\,\mathfrak{r} - 2\{(\mathfrak{r}\,\dot{\mathfrak{r}})\,(\mathfrak{r}\,\mathfrak{F}) - r^2(\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{F})\}\,\dot{\mathfrak{r}} - (r - p)\,\mathfrak{F}\\ &\qquad\qquad \text{mit}\quad r - p = r + (\mathfrak{r}\,\dot{\mathfrak{r}})^2 - r^2\,\dot{\mathfrak{r}}^2,\\ \delta\mathfrak{g} &= [\mathfrak{r}\,\mathfrak{F}], \end{aligned}\right.$$

die nur algebraische Ausdrücke in den Koordinaten des Ortes und der Geschwindigkeit des gestörten Körpers und den Störungskoordinaten enthalten, und es genügt, zwei dieser vektoriellen Differentialgleichungen numerisch zu integrieren, um die Elemente (XVIII; 88) als Funktionen der Zeit zu erhalten.

Die beiden ersten Gleichungen (XVIII; 97), die HERRICK seiner Methode zugrunde legt, zeichnen sich dadurch aus, daß rechts lineare Ausdrücke in $\mathfrak{r}$, $\dot{\mathfrak{r}}$, $\mathfrak{F}$ mit einfachen skalaren Koeffizienten stehen. Diesem formalen Vorteil steht der Nachteil gegenüber, daß beide Vektoren $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{h}$ der Exzentrizität e proportional sind, was bei sehr schwach exzentrischen Bahnen unnötige Schwierigkeiten macht. Die Vorzüge der HERRICKschen Formeln werden daher nur bei Bahnen mit mittlerer oder großer Exzentrizität zur Geltung kommen. In anderen Fällen wird man besser die Differentialgleichungen für $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{f}$ oder $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ kombinieren. Aus $\mathfrak{g}$ erhält man i, ☊, p unabhängig von e genau. Bei kleinem e wird nur die Periheldistanz ω, die aus $\mathfrak{f}$ oder $\mathfrak{h}$ zu bestimmen ist, ungenau. Das ist aber unvermeidlich, und man tut daher gut daran, statt e und ω die Ausdrücke $e\cos\omega$ und $e\sin\omega$ als „Elemente" einzuführen.

Das einfachste Formelsystem, das zur Berechnung der Störungen der vektoriellen Elemente ausreicht, dürfte durch die Gleichungen für $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ gegeben sein. P. MUSEN schlägt (loc. cit.) statt dessen ein anderes vor, in dem er die Störungsausdrücke für $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{k} = \mathfrak{h}/p$ verwendet. Er erreicht dadurch, daß

in den Formeln der Vektor $\dot{\mathfrak{r}}$ nur noch implizite in dem Flächengeschwindigkeitsvektor $\mathfrak{g}$ vorkommt. Das hat den Vorteil, daß bei der Vorausberechnung der oskulierenden Bewegung nur die Ortskoordinaten berechnet zu werden brauchen.

Aus

$$\mathfrak{h} = \dot{w}\,\mathfrak{r} - w\,\dot{\mathfrak{r}} = \dot{r}\,\mathfrak{r} - (r - p)\,\dot{\mathfrak{r}}; \quad \mathfrak{g}^2 = p$$

folgt

$$\text{(XVIII; 98)} \qquad \mathfrak{k} = \frac{1}{p}\,\mathfrak{h} = \dot{\mathfrak{r}} + \frac{1}{p}(\dot{r}\,\mathfrak{r} - r\,\dot{\mathfrak{r}}) = \dot{\mathfrak{r}} + \frac{1}{r\,p}[\mathfrak{r}\,\mathfrak{g}];$$

denn es ist ja $[\mathfrak{r}\,\mathfrak{g}] = [\mathfrak{r}[\mathfrak{r}\,\dot{\mathfrak{r}}]] = r(\dot{r}\,\mathfrak{r} - r\,\dot{\mathfrak{r}})$.

Für die Störung des Vektors $\mathfrak{k}$ erhält man demnach

$$\delta\mathfrak{k} = \mathfrak{F} + \frac{1}{r\,p}[\mathfrak{r}\,\delta\mathfrak{g}] - \frac{1}{r\,p^2}\,\delta p\,[\mathfrak{r}\,\mathfrak{g}]$$

oder, wegen $\delta\mathfrak{g} = [\mathfrak{r}\,\mathfrak{F}]$, $\delta p = 2\mathfrak{g}\,\delta\mathfrak{g} = 2(\mathfrak{g}\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{F})$,

$$\text{(XVIII; 98a)} \qquad \delta\mathfrak{k} = \mathfrak{F} + \frac{1}{r\,p}\{(\mathfrak{r}\,\mathfrak{F})\,\mathfrak{r} - r^2\,\mathfrak{F}\} - \frac{2}{r\,p^2}(\mathfrak{g}\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{F})\,[\mathfrak{r}\,\mathfrak{g}] =$$

$$= \mathfrak{F}\left(1 - \frac{r}{p}\right) + \frac{1}{r\,p}(\mathfrak{r}\,\mathfrak{F})\,\mathfrak{r} - \frac{2}{r\,p^2}(\mathfrak{g}\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{F})\,[\mathfrak{r}\,\mathfrak{g}].$$

Nun läßt sich der Störungsvektor $\mathfrak{F}$ in bezug auf das durch die drei Einheitsvektoren

$$\frac{\mathfrak{g}}{\sqrt{p}}; \quad \frac{\mathfrak{r}}{r}; \quad \frac{[\mathfrak{g}\,\mathfrak{r}]}{r\sqrt{p}}$$

bestimmte rechtwinklige Koordinatensystem in Komponenten zerlegen:

$$\text{(XVIII; 99)} \qquad \mathfrak{F} = \frac{1}{p}(\mathfrak{F}\,\mathfrak{g})\,\mathfrak{g} + \frac{1}{r^2}(\mathfrak{F}\,\mathfrak{r})\,\mathfrak{r} + \frac{1}{r^2\,p}(\mathfrak{F}\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{r})\,[\mathfrak{g}\,\mathfrak{r}].$$

Eliminiert man $(\mathfrak{F}\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{r})\,[\mathfrak{g}\,\mathfrak{r}]$ mit Hilfe von (XVIII; 99) aus (XVIII; 98a), so erhält man

$$\text{(XVIII; 100)} \qquad \delta\mathfrak{k} = \mathfrak{F}\left(1 + \frac{r}{p}\right) - 2\,\frac{r}{p^2}(\mathfrak{F}\,\mathfrak{g})\,\mathfrak{g} - \frac{(\mathfrak{F}\,\mathfrak{r})}{r\,p}\,\mathfrak{r},$$

eine Differentialgleichung, die zusammen mit $\delta\mathfrak{g} = [\mathfrak{r}\,\mathfrak{F}]$ und $p = \mathfrak{g}^2$ das Problem löst, ohne daß $\dot{\mathfrak{r}}$ und $\dot{r}$ explizite auftreten.

Zur Bestimmung des sechsten Elements stellt S. HERRICK eine Differentialgleichung für die Störung der mittleren Anomalie M auf. Aus der KEPLERschen Gleichung

$$E - e\sin E = M = n(t - T), \qquad (n = a^{-3/2})$$

folgt

$$\text{(XVIII; 101)} \qquad \delta M = \delta E - \delta(e\sin E).$$

Dagegen ist der totale Differentialquotient der mittleren Anomalie nach der Zeit

$$\frac{dM}{dt} = \delta M + n.$$

Da aber n in der ungestörten Bewegung konstant und daher

$$\frac{dn}{dt} = \delta n; \quad n = n_0 + \int_{t_0}^{t} \delta n \, dt$$

ist, ergibt sich

$$\frac{dM}{dt} = n_0 + \delta M + \int_{t_0}^{t} \delta n \, dt$$

und nach Integration

$$M = M_0 + n_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \delta M \, dt + \iint_{t_0}^{t} \delta n \, dt^2.$$

Es wird also nur noch nötig sein, Ausdrücke für δM und δn zu ermitteln, die zur Vervollständigung der Gleichungen von HERRICK (XVIII; 97) oder MUSEN (XVIII; 100) der Form nach geeignet sind.

Aus $n = a^{-3/2}$ folgt zunächst

$$\delta n = -\frac{3}{2} a^{-5/2} \delta a = -\frac{3}{2} n \frac{\delta a}{a}$$

und aus dem Energiesatz

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - V^2 = \frac{2}{r} - (\dot{\mathfrak{r}})^2$$

schließlich

(XVIII; 102)
$$\begin{cases} \dfrac{\delta a}{a^2} = 2(\dot{\mathfrak{r}}\,\delta\dot{\mathfrak{r}}) = 2(\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{F}) = \delta\dot{u} \quad \text{nach (XVIII; 96)}, \\ \delta n = -\dfrac{3}{2\sqrt{a}}\,\delta\dot{u}. \end{cases}$$

Aus (V; 25) leitet man ab

(XVIII; 103)
$$\begin{cases} e\sin E = \dfrac{\sigma\sqrt{\varrho}}{\mu} = \left(r\sqrt{\varrho}\right)(r^2\sigma) = \dfrac{u}{\sqrt{a}}, \\ \qquad \text{da nach (V; 30)} \ \dfrac{1}{a} = r^2\varrho \ \text{ist}, \\ e\cos E = 1 - \dfrac{r}{a} \end{cases}$$

und daraus

(XVIII; 104)
$$\begin{cases} \delta(e\sin E) = \dfrac{\delta u}{\sqrt{a}} - \dfrac{u\sqrt{a}}{2}\,\delta\dot{u} = \sin E\,\delta e + e\cos E\,\delta E, \\ \delta(e\cos E) = \dfrac{r\,\delta a}{a^2} = r\,\delta\dot{u} = \cos E\,\delta e - e\sin E\,\delta E. \end{cases}$$

Eliminiert man hieraus δe, so folgt

$$\text{(XVIII; 105)}\qquad e\,\delta E = \left(\frac{\delta u}{\sqrt{a}} - \frac{u\sqrt{a}}{2}\,\delta\dot{u}\right)\cos E - r\,\delta\dot{u}\sin E.$$

Nach (XVIII; 101), (XVIII; 104) und (XVIII; 105) ergibt sich dann

$$e\,\delta M = \left(\frac{\delta u}{\sqrt{a}} - \frac{u\sqrt{a}}{2}\,\delta\dot{u}\right)(\cos E - e) - r\,\delta\dot{u}\sin E.$$

Nun ist aber

$$\sin E = \frac{u}{e\sqrt{a}} \quad \text{nach (XVIII; 103)}; \quad \cos E - e = \frac{p - r}{a\,e} \quad \text{nach (II; 11, 1)}$$

und somit

$$e^2\sqrt{a}\,\delta M = \left(\delta u - \frac{u\,a}{2}\,\delta\dot{u}\right)\frac{p - r}{a} - r\,u\,\delta\dot{u}$$

oder

$$\text{(XVIII; 106)}\qquad e^2\sqrt{a}\,\delta M = \frac{p - r}{a}\,\delta u - \frac{1}{2}(r + p)\,u\,\delta\dot{u} =$$

$$= \frac{p - r}{a}(\mathfrak{r}\,\mathfrak{F}) - (r + p)\,r\,\dot{r}(\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{F}).$$

Die Formeln (XVIII; 102) und (XVIII; 106) sind der Form nach als Ergänzung der HERRICKschen Gleichungen brauchbar. Um sie auch dem MUSENschen System anzupassen, sind noch Umformungen notwendig: So erhält man, wegen (XVIII; 98) $\dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{k} - [\mathfrak{r}\,\mathfrak{g}]/r p$, aus (XVIII; 96)

$$\delta\dot{u} = 2(\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{F}) = 2(\mathfrak{k}\,\mathfrak{F}) - 2\,\frac{(\mathfrak{r}\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{F})}{r\,p},$$

also aus (XVIII; 102)

$$\text{(XVIII; 107)}\qquad \delta n = -\frac{3}{\sqrt{a}}\left\{(\mathfrak{k}\,\mathfrak{F}) + \frac{(\mathfrak{g}\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{F})}{r\,p}\right\}.$$

Für δM gibt MUSEN die Formel

$$\text{(XVIII; 108)}\qquad e^2\sqrt{a}\,\delta M = p(\mathfrak{f}\,\mathfrak{K}) - 2e^2(\mathfrak{r}\,\mathfrak{F})$$

mit

$$\mathfrak{K} = \left(1 + \frac{r}{p}\right)\mathfrak{F} - \frac{(\mathfrak{r}\,\mathfrak{F})}{r\,p}\,\mathfrak{r}$$

an, deren Identität mit (XVIII; 106) leicht bewiesen werden kann. Setzt man nämlich nach (XVIII; 93)

$$\mathfrak{f} = \dot{u}\,\mathfrak{r} - u\,\dot{\mathfrak{r}} = \left(\dot{\mathfrak{r}}^2 - \frac{1}{r}\right)\mathfrak{r} - r\,\dot{r}\,\dot{\mathfrak{r}}$$

in (XVIII; 108) ein, so folgt

$$e^2\sqrt{a}\,\delta M = (r+p)(\mathfrak{f}\,\mathfrak{F}) - \frac{(\mathfrak{r}\,\mathfrak{F})(\mathfrak{r}\,\mathfrak{f})}{r} - 2e^2(\mathfrak{r}\,\mathfrak{F}) =$$

$$= (r+p)\left\{\left(\dot{\mathfrak{r}}^2 - \frac{1}{r}\right)(\mathfrak{r}\,\mathfrak{F}) - r\dot{r}(\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{F})\right\} - \frac{(\mathfrak{r}\,\mathfrak{F})}{r}\left\{\left(\dot{\mathfrak{r}}^2 - \frac{1}{r}\right)r^2 - r^2\dot{r}^2\right\} - 2e^2(\mathfrak{r}\,\mathfrak{F}) =$$

$$= -r\dot{r}(r+p)(\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{F}) + \left[p\left(\dot{\mathfrak{r}}^2 - \frac{1}{r}\right) + r\dot{r}^2 - 2e^2\right](\mathfrak{r}\,\mathfrak{F}).$$

Um zu zeigen, daß dieser Ausdruck mit (XVIII; 106) identisch ist, genügt es also zu beweisen, daß der Term in der eckigen Klammer den Wert $(p-r)/a$ besitzt. Setzt man nun

$$\dot{\mathfrak{r}}^2 = V^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a}; \quad e^2 = 1 - \frac{p}{a}$$

und nach (V; 20)

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a} - \frac{p}{r^2},$$

so ergibt sich die Behauptung unmittelbar.

Die Formeln von Musen, die sich für die numerische Integration mit programmgesteuerten Anlagen besonders gut eignen, mögen hier noch einmal zusammengestellt werden:

$$\delta\mathfrak{g} = [\mathfrak{r}\,\mathfrak{F}]; \quad p = \mathfrak{g}^2,$$

$$\mathfrak{K} = \left(1 + \frac{r}{p}\right)\mathfrak{F} - \frac{(\mathfrak{r}\,\mathfrak{F})}{r\,p}\,\mathfrak{r},$$

$$\delta\mathfrak{k} = \mathfrak{K} - 2\frac{r}{p^2}(\mathfrak{g}\,\mathfrak{F})\,\mathfrak{g},$$

$$\mathfrak{f} = [\mathfrak{k}\,\mathfrak{g}]; \quad e^2 = f^2; \quad a = \frac{p}{1-e^2},$$

$$e^2\sqrt{a}\,\delta M = p(\mathfrak{K}\,\mathfrak{f}) - 2e^2(\mathfrak{r}\,\mathfrak{F}),$$

$$\sqrt{a}\,\delta n = -3\left\{(\mathfrak{k}\,\mathfrak{F}) + \frac{(\mathfrak{g}\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{F})}{r\,p}\right\},$$

$$M = M_0 + n_0(t-t_0) + \int_{t_0}^{t}\delta M\,dt + \iint_{t_0}^{t}\delta n\,dt^2.$$

Alle Terme auf den rechten Seiten der Störungsgleichungen enthalten $\mathfrak{F}$ und sind daher den störenden Massen proportional. Sie können deshalb, sofern man sich auf Störungen erster Ordnung beschränkt, sämtlich genau genug berechnet werden, wenn man die Vektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{F}$ als Funktionen der Zeit bzw. als Ephemeride mit den Formeln der ungestörten Bewegung berechnet.

Als Kontrollen dienen die Beziehungen

$$n = a^{-3/2} \quad \text{und} \quad (\mathfrak{g}\,\mathfrak{k}) = 0.$$

Da der Vektor $\mathfrak{f}$ proportional e ist, enthält die Störung δM ein Glied proportional $1/e$, so daß Schwierigkeiten auftreten, wenn e sehr klein ist. In diesem Fall ist es besser, die mittlere Position des Planeten von einem festen Anfangsort in der oskulierenden Bahn aus (mittlere Länge) zu zählen. P. HERGET hat in einer Variante der MUSENschen Methode diesen Umstand berücksichtigt (s. Fußnote 4 auf S. 408).

161. *Das TISSERANDsche Kriterium. Integralinvarianten*

Die Störungen, die ein Planetoid oder Komet im Laufe seiner Bahnbewegung um die Sonne durch die großen Planeten erfährt, sind im allgemeinen so klein, daß es statthaft ist, eine Kegelschnittbahn für alle oder wenigstens sehr lange Zeiten als intermediäre Bahn zu benutzen, von der dieser Himmelskörper dann nur um Größen von der Ordnung der störenden Massen abweicht. Wir haben aber bereits mehrfach darauf hingewiesen, daß dies nicht mehr gilt, wenn der Himmelskörper sehr nahe an einem der störenden Planeten vorübergeht. So hat man gelegentlich Kometen beobachtet, die sich dem Jupiter stark näherten und den Bereich seiner Satelliten durchquerten (so die Kometen 1770 I und 1889 V). Wenn sich solche Kometen auch immer nur kurze Zeit im Herrschaftsbereich des Planeten aufhielten, so genügte dies doch zu einer durchgreifenden Umgestaltung ihrer Bahnverhältnisse. Hatte sich also der Komet vor der Begegnung mit Jupiter in einer Kegelschnittbahn A mit den nur wenig veränderlichen oskulierenden Elementen E_i bewegt, so beschrieb er nach der Begegnung eine Bahn A' mit den wiederum nur wenig veränderlichen Elementen E_i', die aber nun von den Elementen E_i merklich verschieden waren. Die intermediären Bahnen eines und desselben Kometen in zwei Erscheinungen können also, falls er in der Zwischenzeit den Anziehungsbereich eines großen Planeten durchlaufen hat, so sehr voneinander abweichen, daß es schwierig ist, die Identität des Himmelskörpers in beiden Erscheinungen zu erkennen. Dieses Problem ist heute wieder besonders aktuell geworden durch die Versuche, künstliche Himmelskörper (Raumsonden) in die Nähe des Mondes oder von Planeten (Venus, Mars) zu bringen; auch sie werden dabei erhebliche Veränderungen ihrer Bahnen erleiden.

F. TISSERAND[1]) hat gezeigt, daß es gewisse Beziehungen zwischen den Elementen E und E' gibt, deren Gültigkeit durch die starken Störungen beim nahen Vorübergang am störenden Körper nicht oder nur geringfügig beeinflußt wird, Beziehungen also, die man cum grano salis als invariant bezeichnen kann. TISSERAND leitet eine derartige Beziehung, die man also auch als Kriterium für die Identität eines Kometen in zwei Erscheinungen verwenden kann, aus dem JACOBIschen Integral des „problème restreint" ab. Dieses Integral gilt ja für die Bewegung eines masselosen Körpers, der von einem in einer Kreisbahn um die Sonne laufenden Planeten (Jupiter) gestört wird, wobei, wie in Abschnitt 99 gezeigt worden ist, der masselose Körper sich auch frei im Raum bewegen kann (seine Bewegung also nicht auf die Ebene der Jupiterbahn

[1]) F. TISSERAND, Traité de mécanique céleste, Bd. IV. Paris 1896, S. 203–205.

beschränkt zu bleiben braucht). Bezieht man Ort und Geschwindigkeit des Kometen ($x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$) auf den Schwerpunkt Sonne–Jupiter als Koordinatenanfang, auf die Ebene der Jupiterbahn als xy-Ebene und auf feste Achsen, so nimmt das JACOBIsche Integral die Form (XI; 85)

$$C = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) - (x\dot{y} - y\dot{x}) \tag{XVIII; 109}$$

an. Dabei sind die Einheiten so gewählt, daß die Summe der endlichen Massen, deren konstanter Abstand und die Gravitationskonstante den Wert 1 annehmen. Es ist dann auch die Winkelgeschwindigkeit der Jupiterbewegung $n = 1$. Ferner bedeuten r_1 und r_2 die Abstände des masselosen Körpers von der Masse m_1 (Sonne) und m_2 (Jupiter).

In der oskulierenden Bahn des Kometen ist dann

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \frac{2}{r_1} - \frac{1}{a}; \quad x\dot{y} - y\dot{x} = \sqrt{m_1}\sqrt{p}\cos i,$$

wenn a die große Halbachse, p den Parameter und i die Neigung der oskulierenden Bahnebene gegen die Ebene der Jupiterbahn bedeuten. Setzt man dies ein, so ergibt (XVIII; 109)

$$2C = -\left[\frac{1}{a} + 2m_2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) + 2\sqrt{m_1}\sqrt{p}\cos i\right].$$

Daraus folgt aber, daß der Ausdruck

$$\frac{1}{2a} + \sqrt{m_1}\sqrt{p}\cos i = -\left[C + m_2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)\right], \tag{XVIII; 110}$$

der eine Funktion der Elemente a, e und i ist, bis auf einen Rest von der Ordnung der störenden Masse m_2 konstant bleibt, solange der Abstand r_2 des Kometen von dem Störplaneten genügend groß ist, und zwar gilt das sowohl für den Teil der Bahnbewegung *vor* als auch *nach* einer engen Begegnung.

In der astronomischen Praxis benutzt man für das TISSERANDsche Kriterium (XVIII; 110) gewöhnlich einen etwas anderen Ausdruck, da man heliozentrische Koordinaten und andere Einheiten verwendet. In einem heliozentrischen Koordinatensystem hat das JACOBIsche Integral die Form (XI; 87):

$$C = \frac{1}{2}V^2 - k^2\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) - n(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{1}{2}k^2\frac{m_2}{a_1^3}(r_1^2 - r_2^2).$$

Setzen wir nun die Sonnenmasse gleich 1, die Jupitermasse gleich μ, drücken alle Längen in AE aus und bestimmen die Zeiteinheit so, daß $k = 1$ wird, so folgt, da hier der Halbmesser der Jupiterbahn gleich a_1 gesetzt wurde, also $n = \sqrt{1+\mu}\, a_1^{-3/2}$ ist, daß

$$\frac{1}{2a} + \frac{\sqrt{1+\mu}}{a_1^{3/2}}\sqrt{p}\cos i = -\left[C + \mu\left(\frac{1}{r_2} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{a_1^3}\right)\right] \tag{XVIII; 111}$$

wiederum konstant bis auf ein zusätzliches Glied von der Ordnung μ ist, das sich mit einem anderen, von der hier vernachlässigten Exzentrizität der Jupiterbahn herrührenden Restglied vermischt.

Das TISSERANDsche Kriterium (XVIII; 109) bzw. (XVIII; 111) stellt ein besonders instruktives und nützliches Beispiel dafür dar, daß zwischen den oskulierenden Bahnelementen einer gestörten Bewegung gewisse invariante oder nahezu invariante Beziehungen bestehen, die zur Überprüfung einer Störungsrechnung über längere Zeiten dienen können. Eine Theorie solcher *Integralinvarianten* ist von H. POINCARÉ in sehr allgemeiner Form aufgestellt worden.[1] Ihre Anwendung auf die speziellen Probleme der gestörten Bewegung von Planetoiden und Kometen hat A. WILKENS[2] in einer grundlegenden Untersuchung erörtert, über deren Ergebnisse hier das Wichtigste mitgeteilt werden muß.

Wir erinnern uns der Gleichungen (XV; 86), mit denen die oskulierenden Elemente

$$a, e, i;\ \Omega, \bar{\omega}, \varepsilon$$

der gestörten Bewegung eines Himmelskörpers als Funktionen der Zeit beschrieben werden. Sie haben die Form

(XVIII; 112)

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \alpha_1 \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}; & -\frac{d\Omega}{dt} &= \gamma_3 \frac{\partial F}{\partial i},\\
\frac{de}{dt} &= \beta_1 \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \beta_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\omega}}; & -\frac{d\bar{\omega}}{dt} &= \gamma_2 \frac{\partial F}{\partial i} + \beta_2 \frac{\partial F}{\partial e},\\
\frac{di}{dt} &= \gamma_1 \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \gamma_2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\omega}} + \gamma_3 \frac{\partial F}{\partial \Omega}; & -\frac{d\varepsilon}{dt} &= \gamma_1 \frac{\partial F}{\partial i} + \beta_1 \frac{\partial F}{\partial e} + \alpha_1 \frac{\partial F}{\partial a},
\end{aligned}\right.$$

wo $\alpha_1;\ \beta_1, \beta_2;\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ Funktionen von a, e, i sind und $\gamma_1 = \gamma_2$ ist.

Als Umkehrung dieses linearen Gleichungssystems erhält man entsprechend

(XVIII; 113)

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} &= a_1 \frac{da}{dt}; & -\frac{\partial F}{\partial i} &= c_3 \frac{d\Omega}{dt},\\
\frac{\partial F}{\partial \bar{\omega}} &= b_1 \frac{da}{dt} + b_2 \frac{de}{dt}; & -\frac{\partial F}{\partial e} &= c_2 \frac{d\Omega}{dt} + b_2 \frac{d\bar{\omega}}{dt},\\
\frac{\partial F}{\partial \Omega} &= c_1 \frac{da}{dt} + c_2 \frac{de}{dt} + c_3 \frac{di}{dt}; & -\frac{\partial F}{\partial a} &= c_1 \frac{d\Omega}{dt} + b_1 \frac{d\bar{\omega}}{dt} + a_1 \frac{d\varepsilon}{df},
\end{aligned}\right.$$

[1] H. POINCARÉ, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Bd. III. Paris 1896, Kap. XXII.

[2] A. WILKENS, Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Math.-Naturwiss. Klasse 123 (1955).

und es sind a_1; b_1, b_2; c_1, c_2, c_3 andere Funktionen von a, e, i, die mit den Koeffizienten (XVIII; 112) in Beziehung stehen; insbesondere gilt für die Diagonalglieder

$$a_1 = \frac{1}{\alpha_1}; \quad b_2 = \frac{1}{\beta_2}; \quad c_3 = \frac{1}{\gamma_3},$$

und man findet, wenn man die Werte aus (XV; 86) einsetzt, als Determinante des Systems (XVIII; 113)

$$(a_1 b_2 c_3)^2 = (\alpha_1 \beta_2 \gamma_3)^{-2} = \frac{1}{4} a\, e^2 \sin^2 i.$$

Aus (XVIII; 112) und (XVIII; 113) entnimmt man die merkwürdige Tatsache, daß die Elemente in zwei Gruppen zerfallen, nämlich

$$(A) \quad a,\ e,\ i,$$

$$(B) \quad \Omega,\ \tilde{\omega},\ \varepsilon,$$

so daß in den Störungsgleichungen die Elemente der Gruppe (A) in bestimmter Weise mit denen der Gruppe (B) verknüpft sind. Betrachtet man (XVIII; 112), so findet man, daß die totalen Ableitungen der Elemente der einen Gruppe diejenigen partiellen Ableitungen der Störungsfunktion nach den Elementen der anderen Gruppe enthalten, die durch die Verbindungslinien in dem Schema Abb. 34 gekennzeichnet sind. So enthält da/dt nur die partielle Ableitung nach ε, de/dt die Ableitungen nach ε und $\tilde{\omega}$, schließlich di/dt die nach allen drei Elementen der Gruppe (B). Ebenso ist Ω mit i, ferner $\tilde{\omega}$ mit i und e,

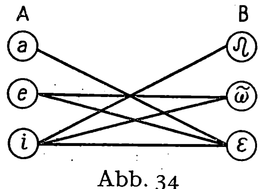


Abb. 34
Zusammenhänge zwischen den Störungen der Bahnelemente und den partiellen Ableitungen der Störungsfunktion

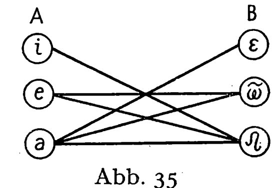


Abb. 35
Zusammenhänge zwischen den partiellen Ableitungen der Störungsfunktion und den Störungen der Bahnelemente

schließlich ε mit allen drei Elementen der Gruppe (A) verbunden. In (XVIII; 113) erscheinen ähnliche Zusammenhänge, die in Abb. 35 versinnbildlicht werden. Hier findet man aber gegen Abb. 34 die Plätze von a und Ω mit denen von i und ε vertauscht.

Integralinvarianten des Störungsproblems haben nach POINCARÉ die allgemeine Form

$$\text{(XVIII; 114)} \qquad \int (f_a\, da + f_e\, de + \cdots + f_\varepsilon\, d\varepsilon) = \text{const},$$

wo $f_a, f_e, \ldots, f_\varepsilon$ gewisse Funktionen der Elemente $a, e, \ldots, \varepsilon$ sind, von denen die einen oder anderen auch Null sein können. Man kann solche Aus-

drücke aus (XVIII; 113) ableiten, indem man je zwei dieser Gleichungen, etwa

$$\begin{array}{l|l} \frac{\partial F}{\partial \Omega} = c_1 \frac{da}{dt} + c_2 \frac{de}{dt} + c_3 \frac{di}{dt}, & \frac{\partial F}{\partial a} \\ -\frac{\partial F}{\partial a} = c_1 \frac{d\Omega}{dt} + b_1 \frac{d\tilde{\omega}}{dt} + a_1 \frac{d\varepsilon}{dt} & \frac{\partial F}{\partial \Omega} \end{array}$$

miteinander kombiniert. Multipliziert man nämlich diese Gleichungen mit den danebenstehenden Faktoren und addiert, so erhält man einen Differentialausdruck der Form

$$f_a \frac{da}{dt} + f_e \frac{de}{dt} + \cdots + f_\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} = 0, \tag{XVIII; 115}$$

wo

$$f_a = c_1 \frac{\partial F}{\partial a}; \quad f_e = c_2 \frac{\partial F}{\partial a}; \quad \ldots; \quad f_{\tilde{\omega}} = b_1 \frac{\partial F}{\partial \Omega}; \quad f_\varepsilon = a_1 \frac{\partial F}{\partial \Omega}$$

neue Funktionen der Elemente sind, die aber auch die Zeit explizite enthalten. Das konstante Integral über (XVIII; 115) ist daher keine Invariante im Sinne der POINCARÉschen Definition, da in (XVIII; 114) die $f_a, f_e, \ldots$ nur von den Elementen, also (insofern diese variabel sind) nur implizite von der Zeit abhängen sollen. Formal ließe sich diese Abweichung aber beseitigen, wenn man statt ε die mittlere Länge $\lambda = \varepsilon + \int n\, dt$ als „Element" einführt, wenn man also statt des Systems (XVIII; 113) das System (V; 78) dieser Betrachtung zugrunde legt.

Durch Kombination verschiedener Gleichungspaare aus (XVIII; 113) lassen sich verschiedene Integralinvarianten erzeugen, die aus zwei, drei usw. bis sechs Differentialen entstehen und über die WILKENS (loc. cit.) eine erschöpfende Übersicht gegeben hat. Die Konstanten dieser Ausdrücke von der Form (XVIII; 114) entsprechen, wie hier ausdrücklich bemerkt werden muß, keinen neuen Integralen des Dreikörperproblems, sondern sind lediglich Funktionen der bekannten Integrale der Energie und der Impulsmomente.

Eine Integralinvariante besonderer Art erhält man, wenn man die sechs linearen Gleichungen (XVIII; 112) mit den Faktoren $\partial F/\partial a$, $\partial F/\partial e$, $\partial F/\partial i$, $-\partial F/\partial \Omega$, $-\partial F/\partial \tilde{\omega}$, $-\partial F/\partial \varepsilon$ multipliziert und die Produkte addiert. Man erhält dann

$$\frac{\partial F}{\partial a}\frac{da}{dt} + \frac{\partial F}{\partial e}\frac{de}{dt} + \frac{\partial F}{\partial i}\frac{di}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \Omega}\frac{d\Omega}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{\omega}}\frac{d\tilde{\omega}}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{dJ}{dt} = 0.$$

Nun ist aber F eine Funktion der Elemente der Bahnen des gestörten und des störenden Körpers, die auch (in den Anomalien) die Zeit explizite enthält. Ist der gestörte Körper von verschwindend kleiner Masse und nur ein Störplanet vorhanden, der dann eine elliptische Bahn mit konstanten Elementen beschreibt, so ist

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial a}\frac{da}{dt} + \frac{\partial F}{\partial e}\frac{de}{dt} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt},$$

und es folgt daher

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{dF}{dt} - \frac{\partial F}{\partial t}; \quad J = F - \int \frac{\partial F}{\partial t} dt = \text{const.}$$

Wenn die Integration der Gleichungen von der Form (XVIII; 114) numerisch ausgeführt wird, so stellt die Konstanz des Integrals einen Identitätstest von der Art des TISSERANDschen dar, der sogar streng ist, da er keinen zu vernachlässigenden Restbetrag übrigläßt. Man kann aber auch partiell integrieren und erhält dann

$$(f_a a + f_e e + \cdots + f_\varepsilon \varepsilon)_{t=t} - \int_{t_0}^{t} \left(a \frac{df_a}{dt} + e \frac{df_e}{dt} + \cdots + \varepsilon \frac{df_\varepsilon}{dt}\right) dt = C,$$

wo die Konstante

$$C = (f_a a + f_e e + \cdots + f_\varepsilon \varepsilon)_{t=t_0}$$

den Anfangsbedingungen des Problems entnommen werden kann. Im allgemeinen ist demnach

$$\text{(XVIII; 116)} \qquad f_a a + f_e e + \cdots + f_\varepsilon \varepsilon = C + \text{Rest}$$

ein genähertes Integral, da das Restintegral von der Ordnung der störenden Masse ist; denn es sind ja die Ableitungen

$$\frac{df_a}{dt} = \frac{\partial F}{\partial a} \frac{dc_1}{dt} + c_1 \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial a}\right), \ldots$$

von der Ordnung der störenden Masse und werden daher für geraume Zeit vor und nach der Oskulationsepoche klein bleiben. Das gilt allerdings nur, sofern zwischen t_0 und t keine nahe Begegnung zwischen den beiden Himmelskörpern stattgefunden hat. Die Größen $f_a, f_e, \ldots$ enthalten ja die partiellen Ableitungen der Störungsfunktion und daher, wie (XVIII; 51) zeigt, die Größen S, T, W, die nach (XVIII; 44) wegen der $1/\varrho^3$ proportionalen Terme sehr groß werden können, wenn der Abstand ϱ der beiden Körper klein ist. Das Restintegral, das klein von der Ordnung der störenden Masse bleibt, solange der Abstand groß ist, wird daher während des Durchgangs des gestörten Körpers durch die Einflußsphäre des Störplaneten erhebliche Änderungen erleiden, nach der Begegnung aber wiederum für lange Zeit nur geringfügig von einem konstanten Wert abweichen, der nun der Konstante C hinzugefügt werden kann. Die Konstante des Ausdrucks (XVIII; 116) wird also vor und nach der Begegnung mehr oder weniger voneinander verschiedene Werte annehmen, so daß die Beziehung (XVIII; 116) nicht im Sinne des TISSERANDschen Kriteriums verwendet werden kann. Um dies zu erreichen, müßte man aus verschiedenen Differentialausdrücken von der Form (XVIII; 115) den Hauptteil der Störungsfunktion, also den ϱ^{-1} proportionalen Term, eliminieren. Nach den Untersuchungen von WILKENS führt das aber auf komplizierte nichtlineare Beziehungen zwischen den Differentialen der Elemente, deren praktische Bedeutung zur Herleitung von Identitätskriterien zweifelhaft ist.

KAPITEL XIX

DAS EINGESCHRÄNKTE DREIKÖRPERPROBLEM. PERIODISCHE UND ASYMPTOTISCHE LÖSUNGEN

162. *Periodische Lösungen*

Die Differentialgleichungen der Himmelsmechanik lassen sich immer in der allgemeinen Form

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{XIX; 1}$$

schreiben, wenn die x_i alle die Bewegung charakterisierenden Größen (etwa die Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten der beteiligten Körper) darstellen. Die partikulären Lösungen

$$x_i = \varphi_i(t) \tag{XIX; 2}$$

des Systems, die durch die Anfangsbedingungen

$$x_1(0) = \varphi_1(0); \quad \ldots; \quad x_n(0) = \varphi_n(0) \tag{XIX; 3}$$

determiniert sind, sind nur in besonderen Fällen für alle Zeiten bekannt, z.B. für die Bewegung zweier Massenpunkte umeinander bzw. um den gemeinsamen Schwerpunkt oder in gewissen speziellen Fällen des Dreikörperproblems (z.B. für die LAGRANGEschen Lösungen, in denen eine der drei Massen relativ zu den beiden anderen in einem der fünf Librationszentren ruht, oder für die in Abschnitt 104 behandelte MACMILLANsche Bewegung). Im übrigen kann man zwar die Bewegung der drei (oder mehr) Massen, ausgehend von einem Anfangszustand (XIX; 3), für beschränkte Zeiten durch Reihenentwicklungen darstellen oder mit Hilfe der in Kapitel XVII und XVIII beschriebenen Methoden der numerischen Integration rechnerisch verfolgen. Es ist aber nicht möglich, strenge Lösungen anzugeben, die für beliebige Anfangsbedingungen und für alle Zeiten gültig sind, obwohl (wie K. SUNDMAN nachgewiesen hat und in Band III bewiesen werden soll) solche Lösungen formal existieren.

Es gibt aber Sonderfälle, in denen die Bahnbewegung der Massenpunkte für alle Zeiten bekannt ist, wenn man sie (numerisch oder auf Grund analytischer Formeln) für ein *endliches* Zeitintervall beherrscht: dann nämlich, wenn für eine feste Zahl T

$$\varphi_i(0) = \varphi_i(T) \tag{XIX; 4}$$

gilt; denn dann nehmen ja auch alle Anfangsbedingungen für $t = 0$ und $t = T$ die gleichen Werte an, die Bewegung wird also von da an wiederum in derselben Weise ablaufen. Es ist dann allgemein

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(t + T) = \varphi_i(t \pm kT), \tag{XIX; 5}$$

wenn k irgendeine ganze Zahl bedeutet. Die Lösung (XIX; 2) ist also periodisch mit der Periode T. Dasselbe gilt offenbar auch dann, wenn die Funktionen f_i (oder einige von ihnen) die Zeit t explizite in Form periodischer Terme mit

der Periode T enthalten; denn in diesem Fall sind für die Erfüllung der Gleichungen (XIX; 5) keine zusätzlichen Bedingungen erforderlich.

Ferner kann der Begriff „periodische Lösungen" noch dahin erweitert werden, daß man für eine gewisse Anzahl von Variablen, die Winkelgrößen darstellen, statt (XIX; 4) die Bedingungen

$$\varphi_i(T) = \varphi_i(0) + 2k_i\pi, \qquad (k_i \text{ ganzzahlig}) \tag{XIX; 6}$$

zuläßt. Für diese Größen gilt dann

$$\varphi_i(t + T) = \varphi_i(t) + 2k_i\pi,$$

eine Aussage, die wegen der hier vorausgesetzten Eigenschaften der φ_i mit (XIX; 5) gleichbedeutend ist.

Schließlich ist noch denkbar, daß eine Bewegung, die in einem gegebenen festen Koordinatensystem unperiodisch verläuft, periodisch wird, wenn man dieses Koordinatensystem mit einem anderen vertauscht, das sich in bestimmter Weise gegen das feste bewegt. Dieser Fall ist für die Anwendung der Theorie auf gewisse himmelsmechanische Probleme besonders wichtig. Als einfaches Beispiel möge das ebene „problème restreint" dienen: In dem rotierenden Koordinatensystem, in dem die beiden endlichen Massen feste Plätze haben, existieren gewisse periodische Bahnen der infinitesimalen Masse, z.B. die kleinen Librationen um die Lagrangeschen Dreieckspunkte. Gehen wir aber durch Rückwärtsdrehung auf ein festes Koordinatensystem zurück, so führen in ihm die endlichen Massen gleichförmige Kreisbewegungen um den Koordinatenanfang mit der Periode T_1 (Jupiterumlauf!) aus. Die infinitesimale Masse wird dann im allgemeinen keine periodische Bahn beschreiben, es sei denn, daß die Umlaufszeiten T und T_1 kommensurabel sind. Ein anderes Beispiel ist die Bewegung eines sonnennahen Planeten (Merkur!), wenn wir die Störungen durch andere Planeten außer acht lassen. Nach dem Newtonschen Gesetz bewegt sich ein solcher Planet in einer Keplerschen Ellipse, also in einer periodischen Bahn. Legen wir aber (s. Abschnitt 90) das Attraktionsgesetz der relativistischen Mechanik zugrunde, so führt die Apsidenlinie der Bahn eine gleichförmige, wenn auch sehr langsame Drehung aus. Die Bewegung ist dann unperiodisch, und der Planet wird im Laufe sehr langer Zeiten jeden beliebigen Punkt innerhalb eines Kreisringes um die im Koordinatenanfang ruhende Sonne als Mittelpunkt erreichen, eines Ringes, dessen innerer Halbmesser durch die Periheldistanz, dessen äußerer durch die Apheldistanz der Bahn gegeben ist. Trotzdem kann man auch eine solche Bewegung als periodisch bezeichnen, weil man durch eine gleichförmige Drehung des Koordinatensystems erreichen kann, daß die Perihelbewegung kompensiert und die Bahn in diesem langsam rotierenden System eine geschlossene Keplersche Ellipse mit fester Apsidenlinie wird.

In gewissen einfachen Sonderfällen des Dreikörperproblems gibt es immer, in anderen nur unter zusätzlichen Bedingungen periodische Bewegungen dieser letztgenannten Art. Angenommen, es bewegen sich zwei unendlich kleine Massen m_1, m_2 in der gleichen Ebene um eine endliche Masse, die im Koordinaten-

anfang ruht. Dann beschreiben die beiden infinitesimalen Körper KEPLERsche Ellipsen um die große Masse, die in deren gemeinsamem Brennpunkt steht. Wir können dann zwei Fälle unterscheiden:

1. Beide Massen beschreiben Kreisbahnen. Dann sind ihre Längen

$$\lambda_1 = n_1(t - t_0); \quad \lambda_2 = n_2(t - t_0),$$

wenn

$$n_1 = \frac{2\pi}{T_1}; \quad n_2 = \frac{2\pi}{T_2}$$

ihre konstanten Winkelgeschwindigkeiten, T_1, T_2 ihre Umlaufszeiten bedeuten und wenn $t = t_0$ ein Zeitpunkt ist, in dem sich beide Körper in einer Konjunktionsstellung $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ befinden. Sie werden sich dann zu einem späteren Zeitpunkt $t = \Theta_k$ wiederum in Konjunktion befinden, wenn

$$n_1(\Theta_k - t_0) = n_2(\Theta_k - t_0) + 2k\pi$$

ist, wo k irgendeine ganze Zahl bedeutet. Es wäre dann

$$\Theta_k(n_1 - n_2) = 2k\pi + t_0(n_1 - n_2)$$

oder

$$\Theta_k = t_0 + \frac{2k\pi}{n_1 - n_2},$$

d.h., nach Ablauf der Zeit

$$s = \frac{2\pi}{|n_1 - n_2|},$$

die wir als die *synodische Umlaufszeit* der beiden Körper bezeichnen, bilden diese mit der Sonne immer wieder die gleiche Konstellation. In diesem Fall wird es stets möglich sein, dem Koordinatensystem eine gleichförmige Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit $\nu = n_1$ zu erteilen, so daß im rotierenden System die Bewegung periodisch mit der Periode s ist; denn in diesem System sind ja zu den Zeiten $t = k\,s$ die Längen

$$\lambda_1' = n_1(k\,s - t_0) - n_1\,k\,s = -n_1\,t_0,$$
$$\lambda_2' = n_2(k\,s - t_0) - n_1\,k\,s = (n_2 - n_1)\,k\,s - n_2\,t_0 = -n_2\,t_0 \pm 2k\pi$$

die gleichen wie zur Zeit $t = 0$, abgesehen von Vielfachen von 2π. Dasselbe gilt auch, wenn $\nu = n_2$ gewählt wird. Wenn also beide Bahnen Kreise sind, so ist die Bewegung in einem geeigneten gleichförmig rotierenden System immer periodisch.

2. Ist eine der beiden Bahnen oder sind beide elliptisch, so tritt Periodizität des Systems nur unter der Bedingung ein, daß die beiden mittleren Bewegungen kommensurabel sind, d.h., daß

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{k_1}{k_2} \qquad \text{(XIX; 7)}$$

ist, wo k_1 und k_2 zwei (teilerfremde) ganze Zahlen bedeuten. Findet etwa zur Zeit $t = 0$ eine Konjunktion statt, so sind die wahren Längen l_1, l_2 der beiden

Körper gleich, und die Bewegung des Systems ist dann und nur dann periodisch, wenn zu einer anderen Zeit $t = \Theta$ die wahren Längen um ganze Vielfache von 2π zugenommen haben, d.h., wenn beide Körper in der Zeit Θ eine ganze Anzahl von Umläufen vollenden. Es betrage etwa der Längenzuwachs der beiden Körper in diesem Zeitraum

$$n_1 \Theta = 2\pi k_1 \quad \text{bzw.} \quad n_2 \Theta = 2\pi k_2.$$

Daraus folgt dann (XIX; 7) und ferner

$$\Theta = k_1 T_1 = k_2 T_2$$

als Periode der Bewegung. Die gleichen Überlegungen gelten übrigens auch, wenn die Bewegungen der beiden infinitesimalen Massen in verschiedenen Ebenen erfolgen.

Diese zunächst noch sehr primitiven und rein geometrischen Überlegungen haben als Ausgangspunkt für die Arbeiten von H. Poincaré über die Existenz und Beschaffenheit periodischer Lösungen gedient. Wir werden über die wichtigsten Ergebnisse dieser berühmten und in den Bestand der klassischen Himmelsmechanik eingegangenen Untersuchungen dieses großen Mathematikers in den Abschnitten 170 bis 172 noch eingehend zu berichten haben. Versuche, über den mathematischen Beweis der Existenz periodischer Lösungen des Dreikörperproblems hinaus zu konkreten Lösungen mit Hilfe analytischer Ansätze zu gelangen, erweisen sich dabei als ziemlich wenig fruchtbar. Fälle, wie die periodische MacMillansche Bewegung (Abschnitt 104), sind für die Astronomie uninteressant, und die Charliersche Theorie der infinitesimalen periodischen Librationen läßt sich, wie in Kapitel XIII gezeigt worden ist, nur unter großen Schwierigkeiten auf endliche periodische Bahnen ausdehnen. Zwar haben wir in Abschnitt 120 gezeigt, daß die langsamen Bewegungen der „Trojaner" um die Lagrangeschen Dreieckspunkte *angenähert* durch periodische Bahnen dargestellt werden können, aber ein exakter Beweis dafür, daß streng periodische Trojanerbahnen als partikuläre Lösungen der Differentialgleichungen des eingeschränkten Dreikörperproblems existieren, ist weder durch die Brownsche Theorie noch durch die hübsche Lösung des Problems durch B. Thüring, die im nächsten Abschnitt dargestellt werden soll, erbracht worden.[1])

Demgegenüber ist die Methode der numerischen Integration der Bewegungsgleichungen als Hilfsmittel zum Aufsuchen periodischer Lösungen ungemein ergiebig, wenigstens in jenen Spezialfällen des Dreikörperproblems, in denen eine der drei Massen als unendlich klein angesehen werden darf, insbesondere also im ebenen „problème restreint" und im Hillschen Mondproblem.

Die periodischen Lösungen des ebenen „problème restreint" sind in den ersten Jahrzehnten unseres Jahrhunderts (ab 1913) von E. Strömgren und

[1]) Eine strenge Theorie einer Schar von periodischen Lösungen bezieht sich auf die sogenannten „Variationsbahnen" des Hillschen Mondproblems (Abschnitt 100), die in Kap. XXI behandelt werden. Aber hier handelt es sich um eine stark schematisierte Variante des eingeschränkten Dreikörperproblems, die nur unter gewissen Bedingungen Näherungslösungen des eigentlichen Problems liefert.

anderen Kopenhagener Astronomen im Verlauf ausgedehnter numerischer Rechnungen systematisch aufgesucht und klassifiziert worden. Dazu sind umständliche und zeitraubende numerische Integrationen der Differentialgleichungen dieses Problems notwendig gewesen, die von einem großen Stab von Rechnern ausgeführt wurden und sich über einen langen Zeitraum erstreckt haben. Heute läßt sich eine solche systematische Erforschung der unerschöpflichen Fülle von periodischen Bahnen, die das eingeschränkte Dreikörperproblem zuläßt, mit Hilfe der schnellen elektronischen Integrationsverfahren genauer, vollständiger und in unvergleichlich viel kürzerer Zeit ausführen. Zur Zeit der Niederschrift dieser Zeilen ist allerdings in dieser Hinsicht noch wenig geschehen bzw. veröffentlicht worden, so daß wir uns vorerst mit einer Übersicht (s. Abschnitte 166 bis 169) über die Kopenhagener Ergebnisse zufriedengeben müssen.

Das Verfahren, das bei diesen numerischen Untersuchungen angewandt wird, ist einfach. Die Lösung der Differentialgleichungen

$$\text{(XIX; 8)} \qquad \begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial y} \end{cases}$$

des „problème restreint" sind so beschaffen, daß jeder möglichen (geschlossenen oder nicht geschlossenen) Bahnkurve K des infinitesimalen Körpers eine andere, K', gegenübersteht, die zu K symmetrisch in bezug auf die x-Achse gelegen ist, also K an der x-Achse spiegelt. Es sei etwa K eine der Bahnkurven, die durch einen Punkt $P(x, y)$ hindurchgeht und (Abb. 36) in der Pfeilrichtung durchlaufen werde. Man betrachte dann einen Punkt $P'(x, -y)$, der zu P spiegelbildlich bezüglich der x-Achse gelegen ist. In ihm hat die Potentialfunktion Ω den gleichen Wert wie in P, da diese (s. Abschnitt 114) ebenfalls symmetrisch zur x-Achse verläuft. Daraus folgt aber, daß $\partial\Omega/\partial x$ in beiden Punkten gleich, $\partial\Omega/\partial y$ aber entgegengesetzt gleich ist. Es gibt also eine Lösung von (XIX; 8), die durch P' hindurchgeht und die so beschaffen ist, daß in P' die Ableitungen $\dot{y}$ und $\ddot{x}$ denselben Wert wie in P haben, $\dot{x}$ und $\ddot{y}$ aber den entgegengesetzt gleichen. Daraus folgt aber unmittelbar anschaulich, daß K' zu K spiegelbildlich in bezug auf die x-Achse liegt und daß in der Umgebung von P und P' die Bewegung in y in gleichem Sinne, die in x aber in entgegengesetztem Sinne erfolgt, wie in Abb. 36 durch Pfeile angedeutet wird. Mit anderen Worten: Die Form der Bahnen ist spiegelbildlich zur x-Achse, die Bewegung in ihr aber nicht! Was für ein kurzes Kurvenstück in der Umgebung von P und P' gilt, wird, solange man etwaige Singularitäten ausschließt, auch für die ganze Bahnkurve gelten.

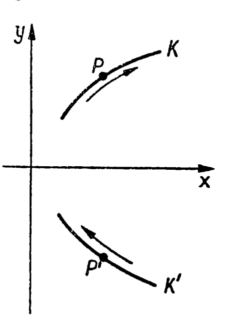


Abb. 36. Spiegelbildlich zur x-Achse liegende Bahnen des „problème restreint“

Ein interessantes Beispiel hierfür sind die periodischen Librationen um L_4 und L_5, die (Abb. 37) spiegelbildlich zur x-Achse, aber im gleichen (negativen) Umlaufssinn erfolgen.

Aus diesen Überlegungen lassen sich nun einige interessante Schlüsse ziehen. Angenommen, die unendlich kleine Masse startet im Zeitpunkt $t = 0$ von einem Punkt $P(x = x_0, y = 0)$ der x-Achse in der positiven Ordinatenrichtung mit der Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = \dot{y}_0$ (Abb. 38). Dann folgt aus dem oben bewiesenen Spiegelungssatz, daß die Bahn symmetrisch zur x-Achse verläuft und etwa die in Abb. 38 angedeutete Gestalt (ausgezogene Kurve) hat. Wird also der Körper nach einer gewissen Zeit, etwa für $t = T$, wiederum die x-Achse in einem Punkt Q durchstoßen, so ist sicher, daß er sich im Zeitpunkt $t = -T$ ebenfalls in Q befunden hat, so daß also Q ein Doppelpunkt der Bahnkurve ist.

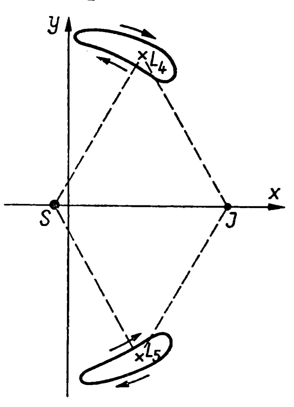
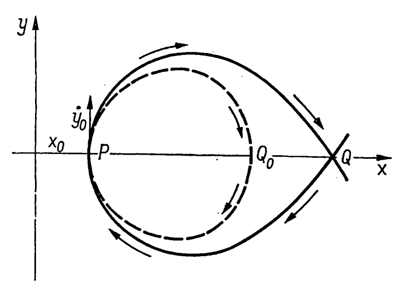


Abb. 37. Periodische Trojanerbahnen um L_4 und L_5, schematisch

Durch numerische Integration von (XIX; 8) mit den Anfangsbedingungen

$$\text{(XIX; 9)} \qquad x = x_0, \quad y = 0; \quad \dot{x} = 0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0$$

wird man die Bewegung des Körpers bis Q rechnerisch verfolgen können. Variiert man $\dot{y}_0$, so wird die Lage von Q sich ändern, und es wird unter Umständen gelingen, unter den verschiedenen Q ein Q_0 zu finden, in dem die Kurve senkrecht in die x-Achse einmündet, so daß also dort $\dot{x} = 0$ ist. Dann ist die Kurve PQ_0 (in Abb. 38



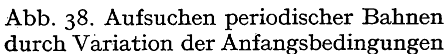


Abb. 38. Aufsuchen periodischer Bahnen durch Variation der Anfangsbedingungen

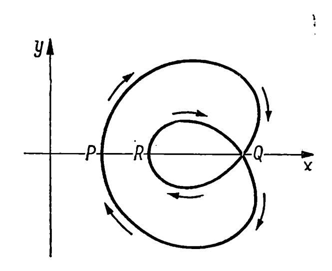


Abb. 39. Fiktive periodische Bahn mit zwei Umläufen und einem Doppelpunkt

gestrichelt gezeichnet) geschlossen und repräsentiert somit eine periodische Lösung.

Der hier angenommene Fall ist besonders einfach. Es ist aber denkbar (und wir werden weiter unten sehen, daß dies auch wirklich zutrifft), daß man von einem und demselben Punkt P der x-Achse aus mit verschiedenen, diskreten Anfangsgeschwindigkeiten $\dot{y}_0$ in der positiven oder negativen Ordinatenrichtung periodische Bahnen erzielt, und zwar solche, die (wie in Abb. 38) nach

einmaligem Umlauf in sich zurückkehren, und solche, die dies erst nach mehreren Umläufen bzw. nach mehrfachem schrägem Überschreiten der Abszissenachse tun. Ein fiktives Beispiel für eine nach zwei Umläufen periodische Bahn zeigt Abb. 39: Hier durchschreitet der Körper die x-Achse in Q schräg, aber dann in R rechtwinklig. Es kommen aber auch Bahnformen vor, die erst nach zahlreichen schrägen Übergängen über die x-Achse und nach einer sehr langen Zeit T nach dem Start die Periodizitätsbedingung

$$\dot{x}(T) = 0; \quad y(T) = 0$$

erfüllen. Denkbar (und die numerischen Untersuchungen in Kopenhagen haben dies auch bestätigt) sind auch periodische Bahnen, die zur x-Achse unsymmetrisch verlaufen und diese schiefwinklig oder — wie die Trojanerbahnen — überhaupt nicht schneiden. Es bestehen dann aber immer zwei zur x-Achse spiegelbildlich verlaufende periodische Bahnen, die eventuell gemeinsame Schnittpunkte mit der x-Achse haben und gleichsinnig durchlaufen werden. Ist schließlich die Bewegung unperiodisch, so daß die Periodizitätsbedingung für kein endliches T erfüllt ist, so wird diese doch unter Umständen für gewisse endliche, gegebenenfalls sehr große T *angenähert* erfüllt sein. Es ist dann sehr wahrscheinlich, daß eine solche unperiodische Bahn einer streng periodischen mit der Periode T während eines langen Zeitintervalls dicht benachbart bleibt.

Die Bedeutung der periodischen Lösungen für das Studium der Bewegungen im eingeschränkten Dreikörperproblem geht aus diesen Überlegungen deutlich hervor. Man kann sie kaum präziser hervorheben, als es POINCARÉ getan hat. Er schreibt[1]:

„Es scheint zunächst, daß diese Tatsache (die Existenz periodischer Lösungen) kein praktisches Interesse habe. In der Tat ist die Wahrscheinlichkeit gleich Null, daß die Anfangsbedingungen einer Bewegung genau diejenigen sind, die einer periodischen Lösung entsprechen. Aber sie können von ihnen sehr wenig verschieden sein, und das gerade in solchen Fällen, in denen die alten Methoden nicht anwendbar sind. Man kann dann die periodische Lösung mit Vorteil als erste Annäherung verwenden, als ‚intermediäre Bahn', um einen Ausdruck von H. GYLDÉN zu gebrauchen. Darüber hinaus aber gibt es ein Faktum, das ich nicht streng beweisen kann, das mir aber dennoch sehr wahrscheinlich richtig zu sein scheint: Wenn zu einem System von (kanonischen) Differentialgleichungen eine partikuläre Lösung gegeben ist, so wird man immer eine periodische Lösung finden können – deren Periode allerdings sehr lang sein wird –, so daß die Differenz dieser beiden Lösungen während eines beliebig langen Zeitraums beliebig klein bleibt. Was uns außerdem diese periodischen Lösungen so kostbar macht, ist die Tatsache, daß sie sozusagen die einzige Bresche darstellen, durch die wir versuchen können, in ein bis dahin als unzugänglich angesehenes Gebiet einzudringen."

---

[1]) H. POINCARÉ, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Bd. I. Paris 1889, S. 81–82.

163. *Intermediäre Lösungen des Trojanerproblems. Theorie von B. Thüring*

Unter allen periodischen Lösungen des eingeschränkten Dreikörperproblems beanspruchen die langperiodischen Librationen um die beiden LAGRANGEschen Dreieckspunkte L_4 und L_5 besondere Aufmerksamkeit, nicht nur, weil in der Theorie dieser Bewegungen die hauptsächlichsten Eigenschaften der (in der Natur sehr viel verwickelteren) Bewegung der „Trojaner", der Planetoiden der Jupitergruppe, zutage treten, sondern auch, weil die Schar dieser periodischen Bahnen partikuläre Lösungen des „problème restreint" darstellen, die mathematisch höchst bemerkenswerte Züge aufweisen.

In einer sehr engen Umgebung um L_4 und L_5 haben nach der CHARLIERschen Theorie (Abschnitt 116) die periodischen Bahnen der Familie *d* die Gestalt koaxialer und ähnlicher Ellipsen um das Librationszentrum als Mittelpunkt. Wenn das Verhältnis der endlichen Massen (Jupiter : Sonne) sehr viel kleiner ist als der zulässige Maximalwert 0.04, so sind die Ellipsen langgestreckt, fallen die großen Achsen nahezu mit der Tangente der Jupiterbahn in L_4 (L_5) zusammen und werden diese Bahnen rückläufig und tautochron in Zeiten durchlaufen, die lang im Verhältnis zur Umlaufszeit der endlichen Massen sind. Mit wachsenden Amplituden nehmen die Bahnen abweichende Gestalt an: Aus den Untersuchungen von E. W. BROWN (Abschnitt 120) wissen wir, daß sie diejenigen HILLschen Grenzkurven eng umschließen, deren JACOBIsche Konstante zwischen $2\Omega_4$ und $2\Omega_3$ liegt und die getrennte „verbotene Bereiche" von bohnen- oder bananenförmiger Gestalt um die beiden Librationszentren abgrenzen. Aus Gründen der Stetigkeit ist es kaum zweifelhaft, daß auch für beliebige Librationselongationen (Schwankungsweiten des Längenunterschiedes Planetoid–Jupiter) streng periodische „Trojanerbahnen" als partikuläre Lösungen des „problème restreint" existieren und daß diese Lösungen eine einparametrige Schar von einander umschließenden und sich nirgends schneidenden oder berührenden geschlossenen Kurven bilden, die bei Abnahme des Parameters (etwa der mittleren Schwankungsweite) gegen Null in die Schar der CHARLIERschen Ellipsen einmünden. Andererseits darf man erwarten, daß es eine „Grenzbahn" dieser Schar gibt, die in der größten Elongation nach der von Jupiter abgewandten Seite hin bis zur negativen x-Achse reicht und dort mit der zum anderen Librationszentrum gehörenden Grenzbahn zusammenstößt. Diese Grenzbahn wird diejenige HILLsche Grenzkurve umschließen, die durch L_3 geht und den Übergang zwischen den getrennten (bohnenförmigen) und den beide Zentren hufeisenförmig umschließenden Grenzkurven bildet. Die strenge Gültigkeit dieser heuristischen Überlegung und die Existenz streng periodischer Trojanerbahnen überhaupt ist gelegentlich bezweifelt worden. Diese Zweifel haben sich aber heute einfach dadurch beheben lassen, daß es gelungen ist, durch numerische Integration mit geeigneten Anfangsbedingungen periodische Lösungen dieser Art zu erzeugen.[1]

Es liegt nahe, über die abschätzenden Untersuchungen von E. W. BROWN (Abschnitt 120) hinaus eine strengere Theorie der Trojanerbewegung zu ver-

[1] E. RABE, A.J. *66*, 500 (1961).

suchen, indem man sich der Methode der Variation der Konstanten bedient. In der Tat ist es möglich, Differentialgleichungen aufzustellen, deren Lösungen als intermediäre Lösungen des Problems der periodischen Trojanerbewegung gelten können, da sie von diesen nur um Beträge von der Größenordnung der Jupitermasse abweichen. Eine hübsche Lösung dieser Aufgabe, die wir hier in etwas abgewandelter Form wiedergeben, stammt von B. THÜRING.[1])

Die Abschätzungen in Abschnitt 120 hatten folgendes Bild ergeben: Die mittlere Bewegung des Trojaners in Länge (in einem festen heliozentrischen Koordinatensystem in der Ebene der kreisförmigen Jupiterbahn) ist gleich der des Jupiter. Die wahre Bewegung in Länge schwankt um die mittlere periodisch mit sehr langer Periode. Die Abweichungen der wahren von der mittleren Bewegung (die Winkelgeschwindigkeit des Ortsvektors im rotierenden System) sind von der Größenordnung $\sqrt{m_1}$, wenn m_1 die in Einheiten der Sonnenmasse ausgedrückte Jupitermasse ist. Von der gleichen Ordnung sind auch die Schwankungen des Sonnenabstandes r des Trojaners um den Halbmesser a_1 der Jupiterbahn.

In jedem Augenblick ist die oskulierende Kegelschnittbahn des Trojaners eine Ellipse mit sehr kleiner Exzentrizität; denn es ist ja nach (II; 38) in der oskulierenden Bahn

$$\dot{r} = k \frac{e}{\sqrt{p}} \sin v,$$

also e von der Ordnung $\dot{r}$, wenn wir die Einheiten der Zeit und der Länge so wählen, daß $k = 1$ und der Halbmesser der Jupiterbahn $a_1 = 1$ ist (denn dann ist auch der Parameter p der Trojanerbahn von der Größenordnung der Längeneinheit). Andererseits ist, wie in Abschnitt 120 gezeigt worden ist, $\dot{r}$ von der Ordnung der Jupitermasse m_1, d.h. aber, daß wir für die Exzentrizität der oskulierenden Ellipse ebenfalls Werte von der Größenordnung $m_1 \approx 10^{-3}$ ansetzen dürfen.

Wir benutzen relative heliozentrische Koordinaten und folgende Bezeichnungen:

$m_0 = 1 =$ Masse der Sonne,

$k = 1 =$ Gravitationskonstante,

$m_1;\ x_1, y_1;\ r_1 = 1, l_1 =$ Masse, rechtwinklige und Polarkoordinaten des Jupiter,

$m_2 = 0;\ x, y;\ r, l =$ Masse, rechtwinklige und Polarkoordinaten des Trojaners,

$\lambda_1 = l_1, \lambda =$ mittlere Längen von Jupiter und Trojaner,

$\alpha = \lambda - \lambda_1 =$ mittlerer Längenunterschied Trojaner–Jupiter.

Ferner seien für die Bewegung des Trojaners in der Ebene der Jupiterbahn (da $i = 0$ ist und die Knotenlänge Ω hier keine Bedeutung hat)

$$L = \sqrt{a}\,; \quad \varrho_1 = 2\sqrt{a}\sin^2\frac{\varphi}{2}, \qquad (e = \sin\varphi)$$

$$\lambda = M + \tilde{\omega}, \quad \omega_1 = -\tilde{\omega}$$

[1]) B. THÜRING, A.N. *238*, 197 (1930); *243*, 183 (1931).

die kanonischen POINCARÉschen Elemente (XV; 73) der oskulierenden Trojanerbahn,

$$\text{(XIX; 10)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \lambda}; & \frac{d\varrho_1}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \omega_1}, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}; & \frac{d\omega_1}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \varrho_1} \end{aligned} \right.$$

die Differentialgleichungen, denen diese Elemente als Funktionen der Oskulationsepoche t genügen und, gemäß (XV; 70b),

$$\text{(XIX; 11)} \qquad F = \frac{1}{2L^2} + m_1 \left\{ \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_1^3} (x\, x_1 + y\, y_1) \right\}$$

die HAMILTONsche Funktion des Systems, wenn r_{12} den Abstand Jupiter–Trojaner bezeichnet.

Nimmt man nun an, daß e von der Ordnung m_1 ist, so liegt es nahe, F nach Potenzen von e zu entwickeln, also

$$\text{(XIX; 12)} \qquad F = F_0 + eF_1 + e^2 F_2 + \cdots$$

zu setzen, wo F_0 nur von L und λ abhängt. Man erhält dann eine intermediäre Bahn, indem man das System

$$\text{(XIX; 13)} \qquad \frac{dL}{dt} = \frac{\partial F_0}{\partial \lambda}; \quad \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial F_0}{\partial L}$$

auflöst, das man aus (XIX; 10) erhält, wenn man $e = 0$ setzt.

Bezeichnen wir nun mit $\psi = l - l_1$ die Differenz der wahren heliozentrischen Längen der beiden Planeten, so ist (Abb. 40)

$$r_{12}^2 = 1 + r^2 - 2r\cos\psi,$$

$$x\, x_1 + y\, y_1 = r\cos\psi.$$

Ferner ist

$$\psi = l - l_1 = \tilde{\omega} + v - \lambda_1,$$

wenn $v = l - \tilde{\omega}$ die wahre Anomalie des Planetoiden bedeutet. Nach (VII; 66) ist aber die „Mittelpunktsgleichung" in der elliptischen Bahn

Abb. 40
Dreieck Sonne–Jupiter–Trojaner

$$v - M = 2e\sin M + \cdots,$$

also

$$\psi = \tilde{\omega} + M - \lambda_1 + 2e\sin M + \cdots = \lambda - \lambda_1 + 2e\sin M + \cdots = \alpha + f(e),$$

wo $f(e)$ eine Funktion von e ist, die mit e gleichzeitig verschwindet. Schließlich ist es zweckmäßig, nach (II; 10)

$$r = a(1 - e\cos E); \quad a = 1 + \varrho$$

zu setzen. Da sich nämlich r und der Jupiterbahnhalbmesser $a_1 = 1$ um Größen von der Ordnung $\sqrt{m_1}$ unterscheiden, wird ϱ, das an Stelle von a bzw. L

als variables Element benutzt werden kann, ebenfalls von der Ordnung $\sqrt{m_1}$ sein, eine Tatsache, aus der man bei Reihenentwicklungen Nutzen ziehen kann. Aus (XIX; 11) entsteht so

$$\text{(XIX; 14)} \quad F = \frac{1}{2(1+\varrho)} + m_1 \{1 + (1+\varrho)^2 (1 - e\cos E)^2 - 2(1+\varrho) \times$$
$$\times (1 - e\cos E)\cos[\alpha + f(e)]\}^{-1/2} - m_1 (1+\varrho)(1 - e\cos E)\cos[\alpha + f(e)],$$

also, wenn $e = 0$ gesetzt wird,

$$F_0 = \frac{1}{2(1+\varrho)} + m_1 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2(1+\varrho)(1-\cos\alpha) + \varrho^2}} - (1+\varrho)\cos\alpha \right\} =$$
$$= \frac{1}{2(1+\varrho)} + m_1 \left\{ \frac{1}{2\sqrt{1+\varrho}\,\sin\frac{\alpha}{2}} \left[1 + \frac{\varrho^2}{4(1+\varrho)\sin^2\frac{\alpha}{2}} \right]^{-1/2} - (1+\varrho)\cos\alpha \right\}.$$

Berücksichtigt man nun, daß ϱ^2 von der Ordnung m_1 ist, und vernachlässigt man in F_0 alle Terme von der Ordnung m_1^2, so darf man schreiben

$$\text{(XIX; 15)} \qquad F_0 = \frac{1}{2(1+\varrho)} + m_1 \left\{ \frac{1 - \frac{1}{2}\varrho}{2\sin\frac{\alpha}{2}} - (1+\varrho)\cos\alpha \right\};$$

denn es ist, wie weiter unten gezeigt werden wird, $4\sin^2(\alpha/2) > 0.16$, so daß die Ordnung des vernachlässigten Gliedes mit ϱ^2 durch den Nenner nicht merklich beeinflußt werden kann. F_0 ist damit als Funktion von ϱ und α dargestellt, und es sind nun auch die Gleichungen (XIX; 13) in solche mit den gleichen Variablen umzuwandeln. Es ist

$$\frac{\partial F_0}{\partial \lambda} = \frac{\partial F_0}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} = \frac{\partial F_0}{\partial \alpha}; \quad \frac{\partial F_0}{\partial \varrho} = \frac{\partial F_0}{\partial L}\frac{\partial L}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \varrho} = \frac{\partial F_0}{\partial L}\frac{1}{2\sqrt{a}},$$

also

$$\frac{\partial F_0}{\partial \lambda} = \frac{\partial F_0}{\partial \alpha}; \quad \frac{\partial F_0}{\partial L} = 2\sqrt{a}\,\frac{\partial F_0}{\partial \varrho} = 2\sqrt{1+\varrho}\,\frac{\partial F_0}{\partial \varrho},$$

ferner

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\lambda_1}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + \sqrt{1+m_1},$$
$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{d\varrho}\frac{d\varrho}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\frac{d\varrho}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{1+\varrho}}\frac{d\varrho}{dt}.$$

Mithin erhalten wir intermediäre Bahnen, indem wir statt (XIX; 13) das System

$$\text{(XIX; 16)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\varrho}{dt} &= 2\sqrt{1+\varrho}\,\frac{\partial F_0}{\partial \alpha}, \\ \frac{d\alpha}{dt} &= -\sqrt{1+m_1} - 2\sqrt{1+\varrho}\,\frac{\partial F_0}{\partial \varrho} \end{aligned} \right.$$

integrieren. Nun ergibt sich aber aus (XIX; 15) durch partielles Differenzieren

$$\frac{\partial F_0}{\partial \alpha} = m_1 \left\{ - \frac{1 - \frac{1}{2}\varrho}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \cos \frac{\alpha}{2} + (1 + \varrho) \sin\alpha \right\} =$$

$$= m_1 \sin\alpha \left\{ 1 - \frac{1}{8 \sin^3 \frac{\alpha}{2}} + \varrho \left(1 + \frac{1}{16 \sin^3 \frac{\alpha}{2}} \right) \right\}$$

und damit

$$\text{(XIX; 17)} \qquad \frac{d\varrho}{dt} = 2 m_1 \sqrt{1 + \varrho} \sin\alpha \left\{ 1 - \frac{1}{8 \sin^3 \frac{\alpha}{2}} + \varrho \left(1 + \frac{1}{16 \sin^3 \frac{\alpha}{2}} \right) \right\}.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial F_0}{\partial \varrho} = - \frac{1}{2(1 + \varrho)^2} - m_1 \left(\frac{1}{4 \sin \frac{\alpha}{2}} + \cos\alpha \right),$$

also

$$\frac{d\alpha}{dt} = - \sqrt{1 + m_1} + 2 \sqrt{1 + \varrho} \left\{ \frac{1}{2(1 + \varrho)^2} + m_1 \left(\frac{1}{4 \sin \frac{\alpha}{2}} + \cos\alpha \right) \right\}$$

oder

$$\text{(XIX; 18)} \qquad \frac{d\alpha}{dt} = (1 + \varrho)^{-3/2} - \sqrt{1 + m_1} + 2 m_1 \sqrt{1 + \varrho} \left(\frac{1}{4 \sin \frac{\alpha}{2}} + \cos\alpha \right).$$

Differenziert man (XIX; 18) noch einmal nach der Zeit, so erhält man

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \left\{ - \frac{3}{2} (1 + \varrho)^{-5/2} + (1 + \varrho)^{-1/2} m_1 \left(\frac{1}{4 \sin \frac{\alpha}{2}} + \cos\alpha \right) \right\} \frac{d\varrho}{dt} -$$

$$- 2 m_1 \sqrt{1 + \varrho} \sin\alpha \left(1 + \frac{1}{16 \sin^3 \frac{\alpha}{2}} \right) \frac{d\alpha}{dt}.$$

Ersetzt man hierin $d\varrho/dt$ durch (XIX; 17) und unterdrückt wiederum alle Terme von der Ordnung m_1^2, so folgt zunächst

(XIX; 19)

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = - 3 m_1 (1 + \varrho)^{-2} \sin\alpha \left\{ 1 - \frac{1}{8 \sin^3 \frac{\alpha}{2}} + \varrho \left(1 + \frac{1}{16 \sin^3 \frac{\alpha}{2}} \right) \right\} -$$

$$- 2 m_1 \sqrt{1 + \varrho} \sin\alpha \left(1 + \frac{1}{16 \sin^3 \frac{\alpha}{2}} \right) \frac{d\alpha}{dt}.$$

Andererseits kann man (XIX; 18) auch schreiben

(XIX; 20) $$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{3}{2}\varrho + \langle \text{Glieder von der Ordnung } m_1 \text{ bzw. } \varrho^2 \rangle.$$

Es ist demnach, wie auch schon in Abschnitt 120 festgestellt worden ist, $d\alpha/dt$ von der Ordnung ϱ. Unterdrücken wir also in (XIX; 19), ebenso wie die Terme von der Ordnung m_1^2, auch die gleichwertigen von der Ordnung $m_1\varrho^2$ bzw. $m_1\varrho\, d\alpha/dt$, so erhalten wir

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -3m_1\sin\alpha\left\{1 - \frac{1}{8\sin^3\frac{\alpha}{2}} + \varrho\left(1 + \frac{1}{16\sin^3\frac{\alpha}{2}}\right)\right\} +$$

$$+ 6m_1\varrho\sin\alpha\left(1 - \frac{1}{8\sin^3\frac{\alpha}{2}}\right) - 2m_1\sin\alpha\left(1 + \frac{1}{16\sin^3\frac{\alpha}{2}}\right)\frac{d\alpha}{dt}.$$

Hierin dürfen wir, ohne der angestrebten Genauigkeit Abbruch zu tun, nach (XIX; 20)

$$\varrho = -\frac{2}{3}\frac{d\alpha}{dt}$$

setzen. Es ergibt sich dann für α eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + f(\alpha)\frac{d\alpha}{dt} + g(\alpha) = 0,$$

in der

$$f(\alpha) = 4m_1\sin\alpha\left(1 - \frac{1}{8\sin^3\frac{\alpha}{2}}\right),$$

$$g(\alpha) = 3m_1\sin\alpha\left(1 - \frac{1}{8\sin^3\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{3}{4}f(\alpha)$$

gesetzt ist. Man kann daher auch schreiben:

(XIX; 21) $$\boxed{\frac{d^2\alpha}{dt^2} + f(\alpha)\left\{\frac{d\alpha}{dt} + \frac{3}{4}\right\} = 0.}$$

Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung läßt sich folgendermaßen integrieren: Man setze

(XIX; 22) $$\frac{d\alpha}{dt} = \gamma(\alpha) + \varphi(\alpha),$$

wo $\gamma(\alpha)$ eine noch zu bestimmende Funktion von α ist und

(XIX; 23) $$\varphi(\alpha) = -\int f(\alpha)\,d\alpha = 4m_1\left(\cos\alpha - \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$$

eine bekannte Funktion darstellt. Differenziert man (XIX; 22) nach der Zeit, so ergibt sich

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{d\gamma}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{d\gamma}{d\alpha} + \frac{d\varphi}{d\alpha}\right)\frac{d\alpha}{dt} = \left[\frac{d\gamma}{d\alpha} - f(\alpha)\right]\frac{d\alpha}{dt}$$

und, wenn man dies in (XIX; 21) einsetzt,

$$\text{(XIX; 24)} \qquad \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{d\alpha}\,\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\gamma}{d\alpha}\,[\gamma(\alpha) + \varphi(\alpha)] = -\frac{3}{4}f(\alpha).$$

Diese lineare Differentialgleichung für $\gamma(\alpha)$ läßt sich durch Trennung der Variablen lösen. Setzt man für den Augenblick

$$\gamma + \varphi = \frac{3}{4u}; \quad \frac{d\gamma}{d\alpha} = -\frac{3}{4u^2}\,\frac{du}{d\alpha} + f(\alpha),$$

wo $u(\alpha)$ eine neue Variable darstellt, so erhält man statt (XIX; 24)

$$\text{(XIX; 25)} \qquad \frac{du}{d\alpha} = \frac{4}{3}u^2(1 + u)\,f(\alpha)$$

oder

$$\frac{du}{u^2(1 + u)} = \frac{4}{3}f(\alpha)\,d\alpha = -\frac{4}{3}d\varphi.$$

Die Integration ergibt, wenn φ_0 eine willkürliche Konstante darstellt,

$$\varphi - \varphi_0 = -\frac{3}{4}\int\frac{du}{u^2(1 + u)} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{u} + \ln\frac{u}{1 + u}\right)$$

oder, wenn man wieder γ statt u einführt,

$$\varphi_0 + \gamma = -\frac{3}{4}\ln\frac{1}{1 + \frac{4}{3}(\varphi + \gamma)}$$

bzw.

$$\text{(XIX; 26)} \qquad e^{-4/3(\varphi_0 + \gamma)}\left[1 + \frac{4}{3}(\varphi + \gamma)\right] = 1.$$

Bedenkt man nun, daß

$$\varphi + \gamma = \frac{d\alpha}{dt} = (\varphi - \varphi_0) + (\varphi_0 + \gamma)$$

ist, und setzt zur Abkürzung

$$\frac{4}{3}\,\frac{d\alpha}{dt} = \frac{4}{3}(\varphi + \gamma) = y; \quad \frac{4}{3}(\varphi - \varphi_0) = z,$$

so erhält man die transzendente Gleichung

$$\text{(XIX; 27)} \qquad e^{-y+z}(1 + y) = 1 \quad \text{bzw.} \quad e^{-y}(1 + y) = e^{-z},$$

aus der sich y und damit $d\alpha/dt = {}^3/_4 y$ als Funktion von φ und dem Bahnparameter φ_0 bestimmen läßt. Eine Lösung dieser Gleichung, die für alle praktischen Zwecke genau genug ist, ergibt sich leicht, wenn man bedenkt, daß z von der Größenordnung m_1 ist; denn es ist ja nach (XIX; 23) φ von der Ordnung m_1. Schreibt man daher (XIX; 27) in Potenzreihenform

$$1 - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{8} y^4 + \frac{1}{30} y^5 - \cdots = 1 - z + \frac{1}{2} z^2 - \cdots,$$

so findet man in erster Näherung

$$y^2 \approx 2z; \quad y \approx \pm\sqrt{2z} = \zeta,$$

und man erhält daher eine genauere Lösung durch den Ansatz

$$y = \zeta + a\zeta^2 + b\zeta^3 + c\zeta^4 + \cdots; \quad z = \frac{1}{2}\zeta^2.$$

Koeffizientenvergleich ergibt dann

$$a = \frac{1}{3}; \quad b = \frac{1}{36}; \quad c = -\frac{1}{135}; \quad \ldots,$$

also

$$y = \zeta + \frac{1}{3}\zeta^2 + \frac{1}{36}\zeta^3 - \frac{1}{135}\zeta^4 + \cdots$$

oder, bis auf Restglieder von der Ordnung m_1^2, die man selbst im Falle extremer Librationsamplituden vernachlässigen darf,

$$y = \zeta\left(1 + \frac{1}{6}\zeta\right)^2$$

bzw.

$$\text{(XIX; 28)} \qquad \frac{d\alpha}{dt} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}(\varphi - \varphi_0)}\left\{1 \pm \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}(\varphi - \varphi_0)}\right\}^2.$$

Über die Bewegung des Trojaners in der hier erhaltenen periodischen intermediären Bahn kann man aus den obigen Ergebnissen folgende Schlüsse ziehen:

1. Für $\varphi = \varphi_0$ wird $d\alpha/dt = 0$, d.h., die Bewegung des Trojaners in Länge ist derjenigen des Jupiter gleich, die Kommensurabilität 1 : 1 ist also streng erfüllt. Ist φ_0 als Bahnparameter vorgegeben, so dient nach (XIX; 23) die Gleichung

$$\text{(XIX; 29)} \qquad \varphi = 4m_1\left(\cos\alpha - \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right) = \varphi_0$$

zur Bestimmung der Extremwerte von α. Im allgemeinen liefert (XIX; 29) zwei Extrema, zwischen denen die Librationsbewegung periodisch hin- und hergeht. Die Funktion $\varphi(\alpha)$ hat die in Abb. 41 wiedergegebene Gestalt, aus

der man für verschiedene $\varphi = \varphi_0$ die Extrema ablesen kann, zwischen denen α während der periodischen Bewegung des Trojaners schwankt. Aus

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = 4m_1\left(\frac{1}{8\sin^3\frac{\alpha}{2}} - 1\right)\sin\alpha$$

folgt, daß φ im Bereich $0° < \alpha < 180°$ nur ein Extremum bei $\alpha = 60°$ hat, nämlich

$$\varphi(60°) = -2m_1.$$

Für $\varphi_0 = -2m_1$ fallen also Maximum und Minimum von α zusammen: Der Planetoid verharrt in L_4 ($\alpha = 60°$).

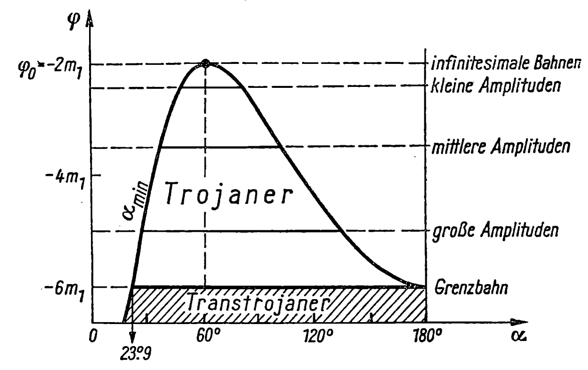


Abb. 41. Librationsamplituden der periodischen Trojanerbahnen

Die größtmögliche Elongation ($\alpha = 180°$) wird nach (XIX; 29) erreicht, wenn $\varphi_0 = -6m_1$ gesetzt wird. Die Gleichung (XIX; 29) lautet dann

$$\text{(XIX; 30)} \qquad \cos\alpha - \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = -\frac{3}{2}$$

und ist mit (XIII; 108) identisch, wie man leicht zeigt, indem man dort $\varphi = \alpha$ und $\gamma = 5\mu$ setzt. Sie hat also die gleichen Wurzeln, nämlich

$$\text{(XIX; 30a)} \qquad \alpha_{\max} = 180°; \quad \alpha_{\min} = 23{,}^\circ 9.$$

Die Familie der periodischen Trojanerbahnen (d.h. der sie in der THÜRINGschen Theorie vertretenden intermediären Bahnen) entspricht also Werten des Parameters φ_0 im Bereich

$$-6m_1 \leqq \varphi_0 \leqq -2m_1.$$

Die größten Elongationen aller dieser Bahnen liegen zu L_4 unsymmetrisch, wie Abb. 41 deutlich zeigt: Nach der Jupiterseite hin ist die Librationsamplitude kleiner als nach der entgegengesetzten. Für $\varphi_0 < -6m_1$ hört die Libration um L_4 ganz auf; die Bahnen gehen in solche über, die L_4 und L_5 gemeinsam umfassen und die HILLschen Grenzkurven vom hufeisenförmigen Typus umschließen.

2. In (XIX; 28) gilt das positive Zeichen vor den Quadratwurzeln, wenn $d\alpha/dt > 0$ ist, also in demjenigen Teil der Librationsbewegung, der den Planetoiden in rechtläufiger Richtung von Jupiter wegführt, das negative im rückläufigen Teil der Bahn. In beiden Teilen ist die Winkelgeschwindigkeit etwas verschieden: Die rückläufige Bewegung in Länge erfolgt ein wenig langsamer als die rechtläufige. Die größte Winkelgeschwindigkeit in der Librationsbewegung wird erreicht, wenn $d^2\alpha/dt^2 = 0$ ist. Das ist nach (XIX; 21) für $f(\alpha) = 0$ der Fall, d.h. für $\alpha = 60°$. Hier erreicht auch die Differenz $\varphi - \varphi_0$ ihr Maximum. In der extremen Trojanerbahn, die den Planeten bis an die Grenzwerte (XIX; 30a) führt, errechnet man[1]) aus (XIX; 28) mit $\varphi - \varphi_0 = 4m_1$

$$\text{(XIX; 31)} \qquad \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{\text{extr}} = +23''\!.40 \quad \text{bzw.} \quad -21''\!.87$$

als extreme Winkelgeschwindigkeiten je mittleren Sonnentag, die eintreten, wenn der Trojaner, von der Sonne aus gesehen, im rechtläufigen bzw. rückläufigen Teil der Bahn an L_4 vorübergeht.

3. Aus (XIX; 20) schließt man, daß $\varrho \sim -d\alpha/dt$ ist. Es ist also im rechtläufigen Teil der Bewegung $\varrho < 0$, im rückläufigen $\varrho > 0$. Die Librationsbahn um L_4 wird demnach im negativen Sinne, d.h. im Sinne des Uhrzeigers, durchlaufen. Das gleiche ist nach den Ergebnissen des vorigen Abschnitts auch für die Librationsbahnen um L_5 der Fall.

Die Differentialgleichung (XIX; 28) läßt sich formal noch einmal integrieren, denn aus

$$dt = \pm\frac{4}{3}\,\frac{d\alpha}{\zeta\left(1 \pm \frac{1}{6}\zeta\right)^2}; \quad \zeta = \sqrt{\frac{8}{3}(\varphi - \varphi_0)}$$

folgt

$$\text{(XIX; 32)} \qquad t - t_0 = \pm\frac{4}{3}\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\zeta\left(1 \pm \frac{1}{6}\zeta\right)^2}.$$

Ist also t_0 der Zeitpunkt, an dem der Planetoid den jupiternahen Umkehrpunkt $\alpha = \alpha_{\min}$ erreicht, so sind

$$P_1 = \frac{4}{3}\int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{\zeta\left(1 + \frac{1}{6}\zeta\right)^2}; \quad P_2 = \frac{4}{3}\int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{\zeta\left(1 - \frac{1}{6}\zeta\right)^2}$$

die beiden Zeiten, in denen die recht- bzw. rückläufige Bahnhälfte zurückgelegt wird. Die gesamte Librationsperiode ist dann $P = P_1 + P_2$.

[1]) Formel (XIX; 28) ergibt mit $\varphi - \varphi_0 = 4m_1$ ($m_1 = 1:1047.35$) für $\dot\alpha_{\text{extr}}$ die Werte $+0.078255$ bzw. -0.073163 in Radien pro Zeiteinheit. Da die letztere gleich $T/2\pi$ ist, wenn $T = 4332^d\!.6$ die Umlaufszeit des Jupiter bedeutet, erhält man $\dot\alpha_{\text{extr}}$ in Bogensekunden pro Tag, wenn man mit dem Umrechnungsfaktor $n_1 = 2\pi/T \sin 1'' = 299''\!.13/\text{Tag}$, der mittleren täglichen Bewegung des Jupiter, multipliziert.

164. *Periodische Trojaner- und Transtrojanerbahnen*

Die Eigenschaften der intermediären periodischen Trojanerbahnen, die als Ergebnis der Untersuchungen des vorigen Abschnitts erscheinen, unterscheiden sich von denen der BROWNschen Analyse (Abschnitt 120) nur durch einige Feinheiten, vor allem aber dadurch, daß sie als Lösungen eines Systems von Differentialgleichungen gewonnen werden. Versuche, ausgehend von diesen speziellen intermediären Lösungen des „problème restreint", die Existenz strenger periodischer Trojanerbahnen mit beliebiger Librationsamplitude mathematisch zu beweisen und deren Form analytisch darzustellen, scheinen bislang nicht gelungen zu sein, obwohl die Methode der Variation der Konstanten einen Weg dazu aufzeigt. Bis vor kurzem ist es daher zweifelhaft geblieben, ob es periodische Lösungen des Trojanerproblems mit endlichen Amplituden überhaupt gibt, wenn dies auch aus Stetigkeitsgründen überaus wahrscheinlich ist. Die Entscheidung darüber ist durch numerische Untersuchungen gefallen. EUGEN RABE[1]) hat durch numerische Integration der Differentialgleichungen des eingeschränkten Dreikörperproblems von bestimmten Anfangsbedingungen aus eine Serie solcher Bahnen gefunden. Die Rechnungen wurden elektronisch neunstellig durchgeführt und ergaben strenge Periodizität bis zur siebenten oder achten Dezimale genau, bei Bahnen sehr großer Amplitude bis zur sechsten Stelle; die kleinen Abweichungen können, bei 80 bis 180 Integrationsschritten, die für einen Umlauf nötig waren, zum überwiegenden Teil auf die unvermeidlichen, sich aufsummierenden Abrundungsfehler zurückgeführt werden, so daß an der Existenz dieser Klasse von periodischen Lösungen kein Zweifel mehr bestehen kann.

Eine etwas eingehendere Beschäftigung mit den Ergebnissen der RABEschen Untersuchungen ist in mehrfacher Hinsicht nützlich und interessant. Einmal, weil hier eine geschlossene Schar von periodischen Lösungen vorliegt, die, aus „Quellpunkten" (den Librationszentren) hervorgehend, bis zu einer „Grenzbahn" fortschreitet, die singulären Charakter hat und somit die Schar abschließt, dennoch aber (wie gezeigt werden wird) eine Fortsetzung der Schar über diese Singularität hinaus nicht verhindert. Ferner bietet das Problem des numerischen Aufsuchens dieser periodischen Librationsbahnen gewisse eigentümliche Schwierigkeiten, die bei anderen Bahnfamilien nicht bestehen, und es wird den Rechner, der sich mit der reizvollen (und auch heute noch längst nicht erschöpfend gelösten) Aufgabe der Auffindung und Klassifizierung der periodischen Lösungen beschäftigt, sehr interessieren, wie solche Schwierigkeiten überwunden werden können.

Die periodischen Bahnen, die (wie die in Abb. 38 und 39, S. 428 schematisch definierten Typen) dadurch charakterisiert sind, daß zu einem Anfangszeitpunkt $t = t_0$ der Planetoid die x-Achse des rotierenden Systems rechtwinklig überschreitet, lassen sich verhältnismäßig einfach ermitteln, indem man die Anfangsbedingungen (XIX; 9) durch Variation von $\dot{y}_0$ allein so lange verändert, bis sich periodische Bahnen ergeben. Die periodischen Trojanerbahnen, die ja die x-Achse nicht schneiden und unsymmetrische Gestalt haben, gehören

[1]) E. RABE, A.J. *66*, 500 (1961).

diesem Typ nicht an. Um sie aufzufinden, reicht die Variation eines einzigen der vier Anfangswerte (XIX; 9) nicht aus. Man wird vielmehr, ausgehend von einem Punkt (x_0, y_0), der in der Nähe des Einheitskreises um den Sonnenort (Jupiterbahn) liegen muß, jene Kombination $(\dot{x}_0, \dot{y}_0)$ zu suchen haben, die als Anfangsimpuls den Körper auf eine periodische Bahn bringt. Man hat also *zwei* Parameter zu variieren, wodurch das Rechenprogramm erheblich komplizierter wird.

E. RABE hat (loc. cit.) gezeigt, daß es gelingt, diese durch die unsymmetrische Form der langgestreckten Trojanerbahnen bedingten Schwierigkeiten auf ein erträgliches Maß herabzusetzen, indem er die aus den Untersuchungen von BROWN und THÜRING bekannten geometrischen Eigenschaften der Bahnen benutzte. In den intermediären Bahnen der THÜRINGschen Theorie (die ja von den wahren nur um Größen von der Ordnung der Jupitermasse abweichen) ist nach (XIX; 17) $d\varrho/dt \approx 0$ bis auf Terme von der Ordnung $m_1\,\varrho$, wenn $\alpha = 60°$ ist, d.h., wenn der Planetoid, von der Sonne aus gesehen, vor oder hinter dem Librationszentrum L_4 vorübergeht. Mit geringfügigen Abweichungen wird also an diesen Punkten die Bewegung des Trojaners im rotierenden System senkrecht zu seiner Verbindungslinie mit der Sonne erfolgen. Sofern nur mäßige Genauigkeit verlangt wird, könnte man also periodische Librationsbahnen aufsuchen, indem man von gewissen Punkten (A oder B in Abb. 42) des Strahles Sonne–L_4 aus den Planetoiden senkrecht zu diesem Strahl in der durch Pfeile angedeuteten Richtung starten läßt und die Startgeschwindigkeit variiert, bis sich periodische Lösungen ergeben. Bei vielstelliger Rechnung wird man allerdings auf diese Weise zu strengen periodischen Lösungen nicht gelangen, sondern man wird auch die Start*richtung* ein wenig variieren müssen. RABE zeigt, wie man diese kleinen Änderungen der Startbedingungen durch ein Verfahren erhält, das eine gewisse Ähnlichkeit mit der in Abschnitt 86 beschriebenen Methode der Bahnverbesserung durch Variation der geozentrischen Distanzen aufweist. Man rechnet zunächst eine Bahn, die von dem gewählten, auf der Geraden SL_4 (Abb. 42) liegenden Ausgangspunkt $A\,(x_0, y_0)$ mit einer provisorischen Geschwindigkeit $(\dot{x}_0, \dot{y}_0)$ startet, die man aus genäherten theoretischen Überlegungen erhalten hat (z.B. aus der in Abschnitt 163 beschriebenen intermediären Bewegung oder nach einem genaueren Verfahren, über das man in der oben zitierten Abhandlung von E. RABE nachlesen möge). Mit dieser provisorischen Anfangsgeschwindigkeit wird man durch numerische Integration eine Bahn erhalten, die nach einer gewissen Zeit T_0 nicht zum Startpunkt A zurückführt, sondern die Gerade SL_4 in einem Punkt A_0 schneidet, der von A um eine kleine Strecke $\varDelta_0$ abweicht.

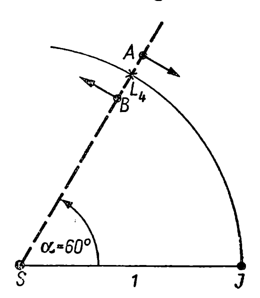


Abb. 42. Startpunkte und Startgeschwindigkeiten beim Aufsuchen periodischer Trojanerbahnen

Man wiederholt nun das gleiche Verfahren mit zwei neuen Hypothesen

$$(\dot{x}_0 + a, \dot{y}_0) \quad \text{und} \quad (\dot{x}_0, \dot{y}_0 + b),$$

wo a, b zwei kleine, willkürlich wählbare Konstanten bedeuten. Beide Hypothesen führen nach etwas anderen Umlaufszeiten T_1 bzw. T_2 auf Punkte A_1, A_2 der Geraden SL_4 mit den (positiven oder negativen) Abweichungen Δ_1, Δ_2 vom Startpunkt A. Sind die Abweichungen Δ klein, so daß man Quadrate dieser Größen vernachlässigen darf, und ist $(\dot{x}_0 + \delta\dot{x}, \dot{y}_0 + \delta\dot{y})$ diejenige Startgeschwindigkeit, die auf eine periodische Bahn führen würde, so ist

$$\text{(XIX; 33)} \qquad \Delta(\delta\dot{x}, \delta\dot{y}) = \Delta_0 + \frac{\partial\Delta}{\partial\delta\dot{x}}\delta\dot{x} + \frac{\partial\Delta}{\partial\delta\dot{y}}\delta\dot{y} + \cdots = 0.$$

Setzt man nun

$$\text{(XIX; 34)} \qquad \delta\dot{x} = \xi a; \quad \delta\dot{y} = \eta b,$$

so ist für die drei gerechneten Hypothesen

$$\Delta_0 = \Delta_0; \quad \Delta_1 = \Delta_0 + \frac{\partial\Delta}{\partial\delta\dot{x}} a; \quad \Delta_2 = \Delta_0 + \frac{\partial\Delta}{\partial\delta\dot{y}} b,$$

also wegen (XIX; 33) und (XIX; 34)

$$0 = \Delta_0 + \xi\frac{\partial\Delta}{\partial\delta\dot{x}} a + \eta\frac{\partial\Delta}{\partial\delta\dot{y}} b$$

oder

$$\text{(XIX; 35a)} \qquad 0 = \Delta_0 + \xi(\Delta_1 - \Delta_0) + \eta(\Delta_2 - \Delta_0).$$

Das ist eine lineare Gleichung für die beiden Unbekannten ξ, η, mit denen nach (XIX; 34) die Variationen $\delta\dot{x}$, $\delta\dot{y}$ zu bestimmen sind. Eine zweite Gleichung ähnlicher Form erhält man durch die Forderung, daß die Geschwindigkeit V, die nach dem Umlauf erhalten wird, mit der Ausgangsgeschwindigkeit $\sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}$ identisch sein soll. Eigentlich müßte man fordern, daß beide Koordinaten $(\dot{x}_0, \dot{y}_0)$ einzeln beim Start und nach erfolgtem Umlauf übereinstimmen. Da aber der Geschwindigkeitsvektor (bis auf sehr geringfügige Abweichungen) die Gerade SL_4 rechtwinklig schneidet, genügt praktisch die Diskussion des Geschwindigkeits*betrages*, jedenfalls, was hier angenommen werden soll, solange die höheren Potenzen der Variationen $\delta\dot{x}$, $\delta\dot{y}$ unter die Genauigkeitsschwelle der Rechnung fallen. Man erhält also, wenn V die Startgeschwindigkeit und V_0, V_1, V_2 die Wiederkehrgeschwindigkeiten der drei Hypothesen bedeuten, neben (XIX; 35a) eine zweite lineare Gleichung

$$\text{(XIX; 35b)} \qquad V = V_0 + \xi(V_1 - V_0) + \eta(V_2 - V_0),$$

so daß ξ, η und damit $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$ bestimmbar werden. Auch die Umlaufszeit T läßt sich auf Grund einer entsprechenden Formel aus T_0, T_1, T_2 ableiten.

Für das Massenverhältnis 1 : 1047.35 (Jupiter : Sonne) sind die periodischen Trojanerbahnen sehr langgestreckt und schmiegen sich eng an den Einheitskreis um die Sonne (Jupiterbahn) an. Die mit diesem Massenverhältnis errechneten Bahnen eignen sich also nicht besonders gut zur graphischen Darstellung. Immerhin illustrieren die der RABEschen Arbeit entnommenen und im rich-

tigen Maßstab gezeichneten Abbildungen 43 bis 46 diesen für die praktische Astronomie interessantesten Sonderfall des Problems hinreichend gut.

Als Scharparameter benutzt RABE den Sonnenabstand des auf SL_4 (Abb. 42) außerhalb der Jupiterbahn liegenden Startpunktes A in Einheiten des Halbmessers ($\overline{SJ} = \overline{SL_4}$) der Jupiterbahn. Die genäherte Theorie von E. W. BROWN (Abschnitt 120, S. 165) ergab für die *Grenzbahn* ($23\overset{\circ}{.}9 \leqq \alpha \leqq 180°$) als extreme Abstände von der Sonne

$$r_{\text{extr}} = 1 \pm \varepsilon = 1 + \varrho$$

mit $\varepsilon \approx \sqrt{8m_1/3} = 0.0505 \approx {}^1/_{20}$. Dieser Betrag, der sich bei Mitnahme der nächsthöheren Glieder noch auf etwa 0.051 erhöht, stellt einen mittleren Wert für die minimalen Abstände der Grenzbahn von L_4 dar. In Wirklichkeit sind diese Abstände etwas verschieden, je nachdem der Trojaner auf dem äußeren (rückläufigen) oder dem inneren (rechtläufigen) Bahnbogen am Librationszentrum vorübergeht. Entwickelt man (XIX; 18) rechts bis zu Termen von der Ordnung ϱ^2 und m_1, so erhält man, genauer als (XIX; 20), für $\alpha = 60°$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{3}{2}\varrho + \frac{15}{8}\varrho^2 + \frac{3}{2}m_1,$$

$$\varrho^2 - \frac{4}{5}\varrho = \frac{8}{15}\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{3}{2}m_1\right).$$

Setzt man rechts für $d\alpha/dt$ die Werte (s. Fußnote S. 439)

$$+0.078255 \quad \text{bzw.} \quad -0.073163$$

und $m_1 = 0.0009548$, so erhält man die quadratische Gleichung

$$\varrho^2 - \frac{4}{5}\varrho = \begin{cases} +0.040972, \\ -0.039785, \end{cases}$$

deren kleinere Wurzel

$$\varrho = \begin{cases} -0.0483 \text{ (innerer Bahnabschnitt)} \\ +0.0533 \text{ (äußerer Bahnabschnitt)} \end{cases}$$

beträgt. Diese aus den intermediären Bahnen abgeleiteten Werte enthalten noch eine Unsicherheit von der Größenordnung $m_1 \approx 10^{-3}$. RABE, der für seine numerischen Rechnungen Startpunkte auf SL_4 außerhalb des Einheitskreises mit $\varrho = +0.01, +0.02, \ldots, +0.07$ wählt, findet, daß die Grenzbahn *ungefähr* für $\varrho_0 = 0.052$ erreicht wird, ein Ergebnis, das mit dem obigen innerhalb der vermuteten Unsicherheitsschranken gut verträglich ist. Daß dieser kritische Wert auf diesem empirischen Weg nur ungenau erhalten wird, hat seinen guten Grund: Die Umlaufszeit in der Grenzbahn ist unendlich groß (s. weiter unten); man kommt daher mit numerischer Integration (wenigstens solange man die Zeit als unabhängige Variable benutzt) nur bis auf endliche Abstände an die größte (jupiterferne) Elongation heran, die den Planetoiden bis an die negative x-Achse führt. Dieser singuläre Fall würde

daher ein besonderes Verfahren erforderlich machen, ohne das der kritische Wert ϱ_0 nur interpolatorisch aus den Rechnungsergebnissen für Bahnen be-

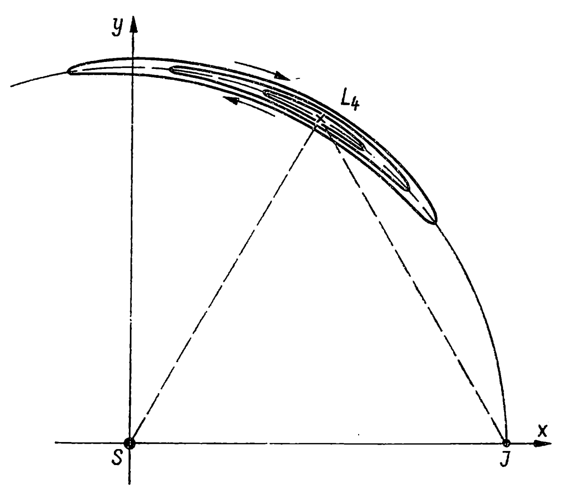


Abb. 43. Periodische Trojanerbahnen um L_4 für $\varrho = 0.01$ (innere Bahn), $\varrho = 0.02$ (mittlere Bahn) und $\varrho = 0.03$ (äußere Bahn)

stimmt werden kann, die der Grenzbahn benachbart sind, aber noch Umlaufszeiten von erträglicher Länge haben.

Die Abbildungen 43 und 44 zeigen die periodischen Trojanerbahnen um L_4 für die Parameterwerte $\varrho = 0.01, 0.02, 0.03$ bzw. $0.04, 0.05$, deren Gestalt

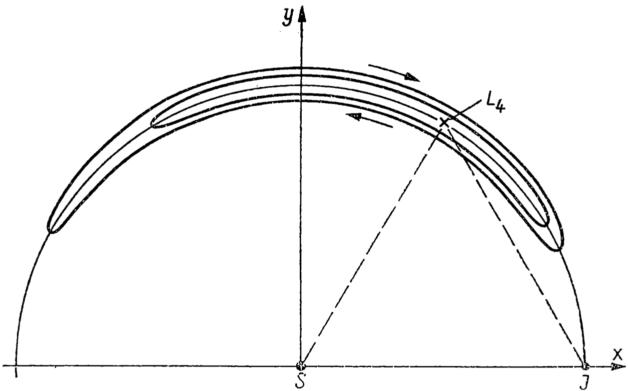


Abb. 44. Periodische Trojanerbahnen um L_4 für $\varrho = 0.04$ (innere Bahn) und $\varrho = 0.05$ (äußere Bahn)

genau den Erwartungen entspricht, die aus der genäherten Theorie folgen. Abb. 45 zeigt die Gestalt der Grenzbahn für $\varrho_0 = 0.052$, die allerdings im jupiterfernen Teil, also um den singulären Punkt herum, extrapolatorisch

ergänzt werden mußte. In den singulären Punkt, der beiden Grenzbahnen (um L_4 und L_5) gemeinsam ist, laufen die Grenzbahnen in Form von Spitzen hinein. Die Abbildung zeigt seinen Ort im Gegenpunkt des Jupiter bezüglich der Sonne ($x = -1$), doch dürfte er in Wirklichkeit mit L_3 ($x = -1 + {}^7/_{12} m_1$) zusammenfallen, einem Punkt, der so nahe bei $x = -1$ liegt, daß er im Maßstab der Zeichnung von diesem nicht unterscheidbar ist.

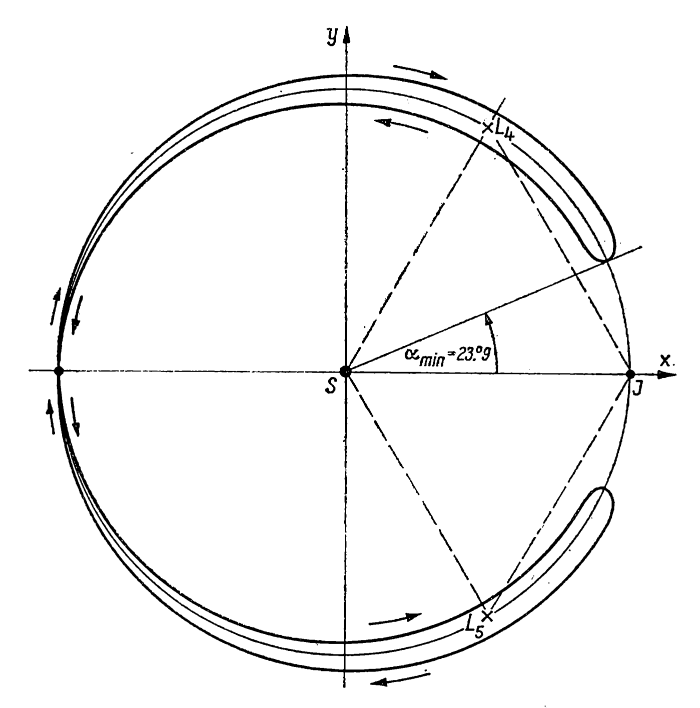


Abb. 45. Grenzbahnen der periodischen Trojaner um L_4 und L_5

Die Bahnen für $\varrho = 0.06$ und 0.07 sind (ähnlich den hufeisenförmigen HILLschen Grenzkurven, die von ihnen umschlossen werden) Bahnen um beide Librationszentren gemeinsam. Wie alle einfach-periodischen und zur Abszissenachse symmetrischen Bahnen schneiden sie diese Achse rechtwinklig. Die Übergangspunkte liegen zu beiden Seiten des singulären Punktes, mit wachsendem positivem ϱ in wachsendem Abstand. Während die Umlaufszeiten, wenn sich ϱ im Intervall $0 < \varrho < \varrho_0$ dem kritischen Wert $\varrho_0 \approx 0.052$ nähert, über alle Grenzen wachsen, nehmen sie für $\varrho > \varrho_0$ mit weiter zunehmendem ϱ wieder ab. Abb. 46 zeigt die Bahn für $\varrho = 0.06$ und den jupiternahen Teil der Bahn für $\varrho = 0.07$, um zu zeigen, daß die Schar der „Transtrojaner", wie man diese Fortsetzung der Familie der periodischen Trojanerbahnen über die Grenzbahn hinaus bezeichnen kann, sich dem Jupiter mit wachsendem Parameter noch weiter nähert.

Die zu den Parameterwerten ϱ gehörigen Umlaufszeiten $T(\varrho)$ sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

ϱ	T
0.00	$147^a.42$
0.01	148.32
0.02	151.54
0.03	158.35
0.04	173.28
0.05	222.28
...	...
0.06	346.31

Abb. 47 zeigt den Verlauf $T(\varrho)$ in graphischer Darstellung. Man erkennt deutlich, daß die Umläufe für kleine Parameterwerte tautochron sind, für größere aber rasch über alle Grenzen wachsen, wenn sich der Parameter dem

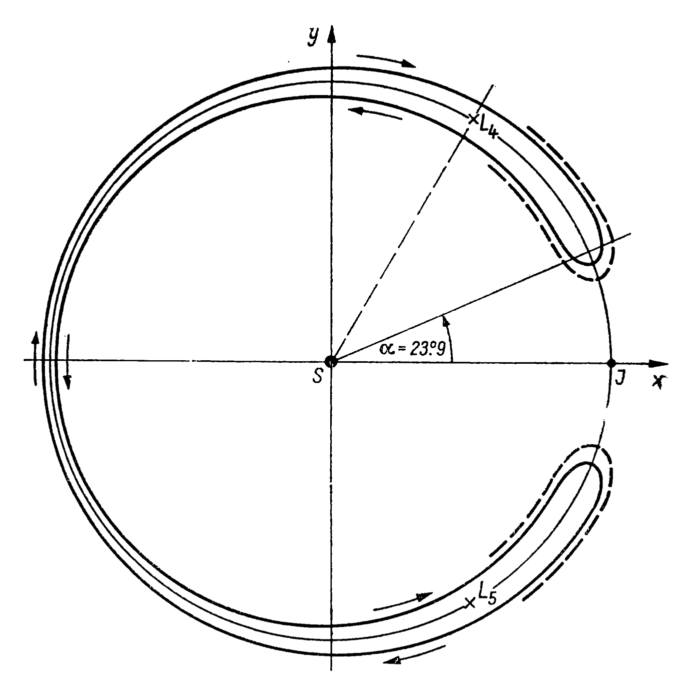


Abb. 46. Periodische Transtrojanerbahnen
—— für $\varrho = 0.06$; ---- für $\varrho = 0.07$ (jupiternaher Teil)

kritischen Wert ϱ_0 nähert. Für Transtrojanerbahnen ($\varrho > \varrho_0$) nimmt T wieder ab; der entsprechende Kurvenzug ist in Abb. 47 strichpunktiert angedeutet, da er nur auf einem einzigen Zahlenwert (für $\varrho = 0.06$) beruht. Die Abbildung

enthält auch die größten Elongationen ($\alpha_{\max}$ und $\alpha_{\min}$) in Abhängigkeit von ϱ (vgl. auch Abb. 41, S. 438).

Unsicher und, wie schon oben bemerkt, durch numerische Integration nicht voll erfaßbar, ist der Bereich um die Grenzbahn herum. Exakte theoretische Untersuchungen hierzu fehlen noch, doch kann über das qualitative Verhalten der periodischen Bahnen in der Nähe dieser Singularität kaum noch ein Zweifel

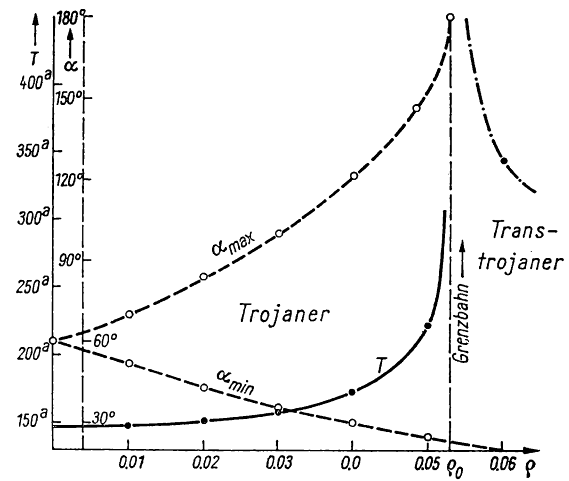


Abb. 47. Umlaufsperioden $T(\varrho)$ und Elongationen $\alpha(\varrho)$ der periodischen Trojaner und Transtrojaner

bestehen. Aus der genäherten Theorie (Abschnitt 163) läßt sich die genaue Lage des singulären Punktes auf der negativen x-Achse, in dem die Grenzbahnen um L_4 und L_5 zusammenstoßen, nicht bestimmen. Die rohe Formel (XIX; 20) ergibt, für $\alpha = 180°$, $\dot{\alpha} = 0$, den Wert $\varrho = 0$, also den Punkt $(-1, 0)$ als Doppelpunkt.[1]) Die genauere Formel (XIX; 18) liefert dagegen $\varrho = -{}^4/_3 m_1$, einen Wert, der darauf hindeutet, daß sich der Doppelpunkt etwas innerhalb der Jupiterbahn befindet. Da aber die Theorie Abweichungen von der Größenordnung m_1 zuläßt, kann auch dieser Wert nicht als zuverlässig gelten. Das Librationszentrum L_3 liegt mit $\varrho = -{}^7/_{12} m_1$ ungefähr in der Mitte zwischen diesen beiden Näherungen und bietet sich schon deswegen als wahrscheinlichste Lage des singulären Punktes an, weil die enge Verknüpfung der Hillschen Grenzkurven mit den Librationszentren darauf hinweist. In der Tat darf man erwarten, daß der steile Anstieg der Kurve der Umlaufszeiten T (Abb. 47) nach der Grenzbahn zu auf $T \to \infty$ für die Grenzbahn selbst führt. Das ist aber nur möglich, wenn die Geschwindigkeit im Umkehrpunkt ($\alpha = 180°$) Null wird, die periodische Bahn also dort die zugehörige Hillsche Grenzkurve (Nullgeschwindigkeitskurve) in einer Spitze berührt. Das führt aber zwangs-

[1]) Hier bezeichnet $\varrho = \varrho(\alpha)$ wieder, wie in Abschnitt 163, die Größe $r - 1$ (und zwar speziell für $\alpha = 180°$), ist also nicht mit dem Scharparameter $\varrho = \varrho(60°)$ zu verwechseln, den wir oben benutzt hatten.

läufig auf L_3 als singulären Punkt, da die HILLschen Grenzkurven, die die negative x-Achse in der *Umgebung* von L_3 treffen, sämtlich dem hufeisenförmigen Typ angehören, also als Nullgeschwindigkeitskurven nur den sie umschließenden Transtrojanerbahnen zugeordnet sein können. Ein Blick auf Abb. 22, S. 147, in der die Form der infinitesimalen CHARLIERschen Librationsbahnen vom hyperbolischen Typ um L_3 gezeichnet ist, spricht für die Richtigkeit dieser Schlußweise. Die hyperbolischen Bahnen vom spitzen Typ, deren große Achse in die y-Richtung fällt, würden demnach die äußersten Spitzen derjenigen Trojanerbahnen darstellen, die der Grenzbahn unmittelbar benachbart sind, während die Schar der flachen Hyperbeln, die Schnittpunkte mit der x-Achse haben, den Bahnen der „Transtrojaner" angehören. Die Asymptoten der Schar, deren Kreuzungspunkt in L_3 liegt, versinnbildlichen die Grenzbahn, die sie in L_3 berühren. Die Bewegungsrichtungen in den periodischen Trojaner- und Transtrojanerbahnen stimmen mit denen in den infinitesimalen Hyperbelbahnen der CHARLIERschen Theorie genau überein, wie ein Vergleich zwischen Abb. 22 und den Abbildungen 44 bis 46 lehrt.

Wenn die obigen Schlüsse zutreffen, so folgt auch zwangsläufig, daß die Umlaufszeit in der Grenzbahn unendlich lang ist; denn da ein Massenpunkt, der in L_3 die Geschwindigkeit Null (im rotierenden System) hat, dort für alle Zeiten ruht, wenn auch in labilem Gleichgewicht, so verschwinden dort sämtliche Ableitungen seines Ortsvektors nach der Zeit. Soll sich also ein Körper diesem Punkt mit der Endgeschwindigkeit Null nähern, so kann er diesen in endlicher Zeit nicht erreichen. Ebensowenig könnte er, einmal in L_3 ruhend, diesen Platz nach endlicher Zeit verlassen, sofern nicht störende Kräfte ihn dazu zwingen.

Über die periodischen Transtrojanerbahnen liegen bisher eingehendere Untersuchungen nicht vor, doch hat schon E. W. BROWN vermutet, daß ihre Schar mit wachsendem Parameter (als den man übrigens auch die JACOBIsche Konstante wählen könnte) auf der jupiternahen Seite schließlich in die engere Umgebung des Jupiter und in den Bereich seiner Satelliten eindringt. Sehr wahrscheinlich wird die Familie der periodischen Transtrojanerbahnen auch dort von einer Grenzbahn mit unendlicher Umlaufszeit abgeschlossen, und zwar wird diese in L_2 einmünden, und ihre äußersten Spitzen werden durch die infinitesimalen Hyperbeln der CHARLIERschen Theorie in der Umgebung dieses Librationszentrums dargestellt werden. Irgendwo zwischen den beiden Grenzfällen, die diese Schar periodischer Lösungen einschließen, wird es eine Bahn mit minimaler Umlaufszeit geben, deren Daten durch numerische Versuche zu bestimmen wären. Diese Versuche würden übrigens keine besonderen Schwierigkeiten bereiten, da die periodischen Transtrojanerbahnen die x-Achse senkrecht überschreiten und daher durch Variation eines einzigen Parameters ($\dot{y}_0$) gefunden werden können.

165. *Ejektionsbahnen. Die THIELEsche Transformation*

Wir haben festgestellt, daß die Familie der langperiodischen Trojanerbahnen, die, aus L_4 und L_5 hervorquellend, durch eine in L_3 einmündende und in unendlich langer Zeit durchlaufene Grenzbahn abgeschlossen wird, über diese

Grenzbahn hinaus durch die Familie der periodischen Transtrojanerbahnen fortsetzbar ist. Diese führen (wie die HILLschen Nullgeschwindigkeitskurven gleichen Typs) hufeisenförmig um beide LAGRANGEschen Dreieckspunkte herum und werden wiederum aller Wahrscheinlichkeit nach durch eine singuläre, in L_2 einmündende Grenzbahn mit unendlicher Umlaufszeit abgeschlossen. Es ist unschwer einzusehen, daß auch diese Schar über die neue Grenzbahn hinaus fortgesetzt werden könnte: Sie zerfiele dann in zwei getrennte Scharen von geschlossenen Kurven, deren korrespondierende Mitglieder einander umschließen und in entgegengesetztem Sinne durchlaufen werden. Alle diese periodischen Bahnen verlaufen in verhältnismäßig geringem Abstand von denjenigen HILLschen Grenzkurven, die dem ihnen zugeordneten Wert der JACOBIschen Konstante entsprechen. Sie haben daher durchweg kleine Bahngeschwindigkeiten und lange Umlaufszeiten, die bei Annäherung an den Grenzfall, in dem die Nullgeschwindigkeitskurve in eines der kollinearen Librationszentren einmündet, über alle Grenzen wachsen.

Daneben gibt es zahllose Scharen (Familien) von periodischen Bahnen mit verhältnismäßig großen Bahngeschwindigkeiten und verhältnismäßig kurzen Umlaufszeiten, die nirgends in der Nähe der HILLschen Grenzkurven verlaufen oder gar Punkte (Spitzen oder Berührungspunkte) mit ihr gemeinsam haben. Eine Klassifikation der einfachsten Bahntypen dieser Art wird in Abschnitt 166 ff. nach den Ergebnissen der Kopenhagener Untersuchungen gegeben werden. Auch diese Scharen von periodischen Lösungen des „problème restreint" werden durchweg durch „Quellpunkte" bzw. „Grenzbahnen" abgeschlossen und können über die Grenzbahnen hinaus fortgesetzt werden, wobei sich ihre charakteristische Form ändert.

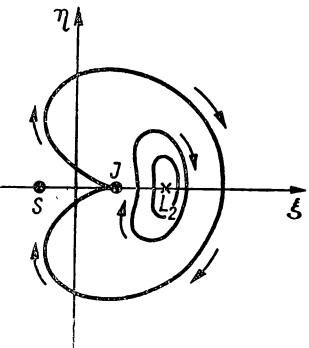


Abb. 48. Familie der Librationsbahnen um L_2 für gleiche endliche Massen ($m = \mu$), abgeschlossen durch eine in J einmündende Aufsturzbahn (Ejektionsbahn)

Zwei einfache Beispiele hierfür mögen das illustrieren: Das erste betrifft die Schar der periodischen Librationsbahnen um L_2, das außerhalb der Jupiterbahn (auf der der Sonne gegenüberliegenden Seite vom Jupiterort aus) gelegene Librationszentrum. Der Punkt L_2 selbst ist Quellpunkt der Schar, die im infinitesimalen Bereich um L_2 die ähnlichen, konzentrischen und koaxialen Ellipsen der CHARLIERschen Familie b liefert. Durch numerische Integration der Differentialgleichungen des eingeschränkten Dreikörperproblems gelingt es, wenn $\xi = X$ die heliozentrische Abszisse von L_2 bedeutet, von verschiedenen Punkten $(X + \varrho, 0)$ der ξ-Achse $(\varrho > 0)$ aus mit Startgeschwindigkeiten $(0, \dot{\eta}_0 < 0)$ durch Variation von $\dot{\eta}_0$ diese periodischen, retrograd durchlaufenen Bahnen zu erzeugen. Die infinitesimalen Ellipsen, deren große Achsen in die η-Richtung fallen, deformieren sich mit wachsendem Parameter ϱ in bohnenförmig nach der Jupiterseite zu gekrümmte Figuren, wie Abb. 48 zeigt. Der jupiternahe der beiden Übergangspunkte über die ξ-Achse rückt mit

wachsendem ϱ immer näher an Jupiter heran, bis er schließlich mit diesem zusammenfällt. Die Schar der einfach-periodischen Librationsbahnen um L_2 wird also für $\varrho = 0$ durch den Quellpunkt L_2, für ein maximales $\varrho = \varrho_0$ durch eine Grenzbahn abgeschlossen, in der der Planetoid in den Jupiterort einstürzt. Diese zur ξ-Achse symmetrische Bahn beginnt mit einem Ausstoß des Planetoiden aus Jupiter und wird daher als *Ejektionsbahn* bezeichnet. Nach der Ejektion beschreibt der Körper im rotierenden System einen weiten Bogen oberhalb der ξ-Achse, durchstößt jenseits L_2 die ξ-Achse bei $\varrho = \varrho_0$ rechtwinklig und nähert sich dann von der unteren Hälfte der Ebene her wieder dem Jupiterort bis zum Einsturz. Ein zweites Beispiel für eine Schar von periodischen Bahnen, die nach einmaligem Umlauf in sich zurückkehren und von einem Quellpunkt und einer Ejektionsbahn abgeschlossen werden, betrifft die (im rotierenden System) retrograden (rückläufigen) periodischen Satellitenbahnen um Jupiter (siehe Abb. 49). Ihr Quellpunkt ist der Ort des Jupiter selbst. Im infinitesimalen Bereich um J sind die Bahnen gleichförmig durchlaufene Kreise; denn in dieser unmittelbaren Nähe des Jupiter sind die Störungen durch die (im Vergleich zum Abstand Jupiter–Satellit unendlich weit entfernte) Sonne verschwindend klein; die Bahnen sind also KEPLERsche Ellipsen. Von diesen aber sind (von diskreten Kommensurabilitätsfällen abgesehen) nur *Kreise* auch im rotierenden System periodisch. Mit wachsendem Parameter ϱ (Startpunkt $\xi = 1 + \varrho$, $\eta = 0$) nehmen diese Bahnen wiederum ovale und nun bohnenförmig nach dem Sonnenort zu gekrümmte Gestalt an und werden durch eine Ejektionsbahn abgeschlossen, deren singulärer Punkt (Ausschleuderungs- und Einsturzort) diesmal in der Sonne liegt.

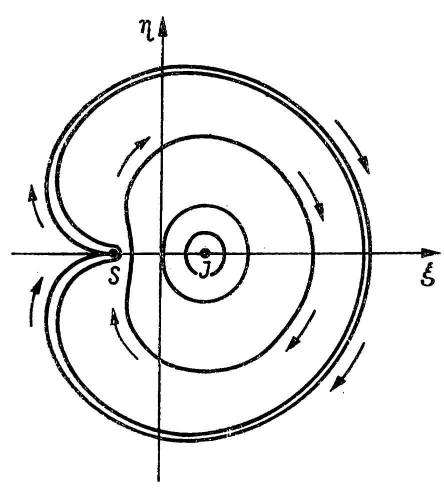


Abb. 49. Familie der retrograden Satellitenbahnen um Jupiter für gleiche endliche Massen ($m = \mu$), abgeschlossen durch eine in die Sonne einmündende Aufsturzbahn (Ejektionsbahn)

In beiden Fällen läßt sich die Gestalt der Bahnen durch numerische Integration nur bis in eine gewisse Nähe der Ejektionsbahn verfolgen; diese selbst kann man auf diese Weise nicht genau ermitteln, da es unmöglich ist, die Rechnung bis in den singulären Punkt hinein durchzuführen. Anders als im Falle der Trojanergrenzbahn ist der Grund hierfür nicht ein Anwachsen der Umlaufszeit T über alle Grenzen (denn es zeigt sich, daß T bei Annäherung an den Grenzfall einem endlichen Wert zustrebt), sondern das Unendlichwerden der Bahngeschwindigkeit beim Aufsturz. Das ist begreiflich; denn die singulären Punkte (Jupiter im Fall der Librationsbahnen um L_2, Sonne im Fall der retrograden Satelliten) sind ja mit endlicher Masse belegte Punkte im

Sinne der mathematischen Theorie. Tritt also eine Kollision des Planetoiden mit einem dieser Massenpunkte ein, so findet in dessen nächster Umgebung (in der die Störung durch die andere endliche Masse belanglos wird) eine Fallbewegung statt, wie wir sie in Abschnitt 26 und 64 als singulären Sonderfall des Zweikörperproblems behandelt haben. Wir haben dort (Abschnitt 64) bemerkt, daß es gelingt, die Bewegung in der Umgebung der Singularität mathematisch zu beherrschen, wenn man statt der Zeit t eine andere unabhängige Variable Θ einführt, für die die Bewegung auch im kritischen Bereich regulär verläuft.

Eine entsprechende „Regularisierung" läßt sich auch im Falle der Ejektionsbahnen des „problème restreint" durchführen, und zwar auf zwei ganz verschiedenen Wegen. Einmal kann man sich darauf beschränken, die Bewegung in einem engen Bereich um den Zeitpunkt und den Ort der Ejektion herum zu betrachten. Durch Einführung einer neuen unabhängigen Variablen $\Theta(t, m)$ an Stelle der Zeit, die auch von der störenden Masse (m) als Parameter abhängen möge und die für den Zeitpunkt $t = 0$ der Ejektion verschwindet, läßt sich die Lösung der Bewegungsgleichungen in der Umgebung der Ejektionszeit durch Potenzreihen nach Θ darstellen, die für kleine Θ hinreichend rasch konvergieren und die, wenn man die störende Masse m gegen Null abnehmen läßt, in die entsprechenden Reihen (Band I, S. 344) für den Zusammenstoß im Zweikörperproblem übergehen.

Während aber diese von C. BURRAU[1]) gegebene Lösung des Problems nur für die Ejektionsbahn selbst und nur für die unmittelbare Nachbarschaft des Ejektionsortes brauchbar ist, hat T. N. THIELE[2]) ein Verfahren entwickelt, das eine numerische und von Singularitäten freie Lösung des Problems ermöglicht. Es besteht darin, daß die Differentialgleichungen des Problems durch Übergang auf andere unabhängige *und* abhängige Variable so umgeformt werden, daß ihre Lösungen keine Singularitäten aufweisen. Während wir hier, um uns nicht in Einzelheiten zu verlieren, auf die Wiedergabe der BURRAUschen Lösung verzichten und den Leser auf die leicht zugängliche Originalarbeit verweisen müssen, verdient die THIELEsche Transformation, die bei der Kopenhagener Durchmusterung der periodischen Lösungen entscheidende Dienste geleistet hat, ausführliche Würdigung.

Die Differentialgleichungen für die Bewegung des Planetoiden im rotierenden $\xi\,\eta$-System, dessen Koordinatenanfang im Massenmittelpunkt O zwischen den endlichen Massen m (S = Sonne) und μ (J = Jupiter) liege (Abb. 50), schreiben wir in der Form (XIII; 1):

$$\text{(XIX; 36)} \qquad \begin{cases} \ddot{\xi} - 2n\,\dot{\eta} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial \xi}, \\ \ddot{\eta} + 2n\,\dot{\xi} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial \eta}. \end{cases}$$

[1]) C. BURRAU, A.N. *136*, 161 (1894).
[2]) T. N. THIELE, A.N. *138*, 1 (1895).

Hierin ist für die Winkelgeschwindigkeit des Systems

$$n = \sqrt{\frac{m+\mu}{a^3}}$$

zu setzen, wenn m (Sonne) und μ (Jupiter) die Massen der beiden endlichen Körper und a deren Abstand bedeuten und wenn die Zeiteinheit so gewählt wird, daß die Gravitationskonstante den Wert $k = 1$ annimmt. Sind nun (Abb. 50) r, ϱ die Abstände des Planeten $P(\xi, \eta)$ von den endlichen Massen und α, β die beiden Abschnitte, die der Massenmittelpunkt O auf der Strecke $\overline{SJ}$ abteilt, so ist

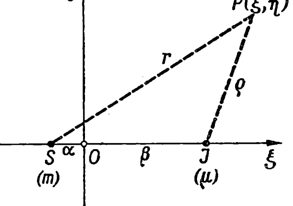


Abb. 50. Eingeschränktes Dreikörperproblem, $\xi\,\eta$-System

(XIX; 37) $$\begin{cases} m\alpha - \mu\beta = 0; \quad \alpha + \beta = a, \quad \text{also} \\ \alpha = a\dfrac{\mu}{m+\mu}; \quad \beta = a\dfrac{m}{m+\mu}. \end{cases}$$

Das Potential Ω ist durch (XIII; 2)

(XIX; 38) $$\begin{cases} 2\Omega = 2\left(\dfrac{m}{r} + \dfrac{\mu}{\varrho}\right) + n^2(\xi^2 + \eta^2), \\ r^2 = (\xi + \alpha)^2 + \eta^2; \quad \varrho^2 = (\xi - \beta)^2 + \eta^2 \end{cases}$$

gegeben, und die Gleichungen (XIX; 36) haben das JACOBIsche Integral (XIII; 3):

(XIX; 39) $$2\Omega - (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) = C.$$

Im Inertialsystem (d.h. bezogen auf feste Achsen) sind, ausgedrückt durch die Koordinaten des rotierenden Systems, nach S. 53—54

(XIX; 40) $$\begin{cases} T = \dfrac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + n(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) + \dfrac{1}{2}n^2(\xi^2 + \eta^2), \\ U = \dfrac{m}{r} + \dfrac{\mu}{\varrho} \end{cases}$$

kinetische Energie und Potential der Bewegung. Man schreibe nun die Bewegungsgleichungen in der LAGRANGEschen Form (XIV; 20) mit $S = T + U$

(XIX; 41) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}}\right) = \frac{\partial(T+U)}{\partial u}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{v}}\right) = \frac{\partial(T+U)}{\partial v},$$

wo u, v irgendwelche Koordinaten des Planetoiden sind, die aus ξ, η durch die Transformation

(XIX; 42) $$\xi = \xi(u, v); \quad \eta = \eta(u, v)$$

hervorgehen, deren Funktionaldeterminante

(XIX; 43) $$J(u, v) = \left|\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(u, v)}\right| = \frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial v} - \frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v}$$

im allgemeinen (d.h. abgesehen von etwaigen singulären Punkten) von Null verschieden sein möge. Setzt man

$$\zeta = \xi + i\,\eta; \quad w = u + i\,v,$$

so läßt sich die Transformation (XIX; 42) auch in der Form

$$\zeta = f(w)$$

schreiben, wo f eine analytische Funktion der komplexen Variablen w sein möge. Es ist dann

$$\dot\xi = \frac{\partial \xi}{\partial u}\dot u + \frac{\partial \xi}{\partial v}\dot v; \quad \dot\eta = \frac{\partial \eta}{\partial u}\dot u + \frac{\partial \eta}{\partial v}\dot v,$$

und es gelten die CAUCHY-RIEMANNschen partiellen Differentialgleichungen

$$\text{(XIX; 44)} \qquad \frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{\partial \eta}{\partial v}; \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = -\frac{\partial \eta}{\partial u}.$$

Wegen (XIX;43) und (XIX;44) ist dann, wenn wir die Abkürzung $\partial y/\partial x = y_x$ benutzen,

$$\xi_u^2 + \eta_u^2 = \xi_v^2 + \eta_v^2 = \xi_u\,\eta_v - \eta_u\,\xi_v = J,$$
$$\xi_u\,\xi_v + \eta_u\,\eta_v = -\xi_u\,\eta_u + \eta_u\,\xi_u = 0$$

und daher

$$\dot\xi^2 + \dot\eta^2 = \dot u^2(\xi_u^2 + \eta_u^2) + 2\dot u\,\dot v\,(\xi_u\,\xi_v + \eta_u\,\eta_v) + \dot v^2(\xi_v^2 + \eta_v^2) = J(\dot u^2 + \dot v^2),$$
$$\xi\,\dot\eta - \eta\,\dot\xi = \dot u\,(\xi\,\eta_u - \eta\,\xi_u) + \dot v\,(\xi\,\eta_v - \eta\,\xi_v).$$

Für die kinetische Energie (XIX; 40) kann man daher auch schreiben

$$T = T_0 + T_1 + T_2,$$

wenn mit T_n diejenigen Summanden von T bezeichnet werden, die in $\dot u, \dot v$ vom n-ten Grade sind, und es ist

$$T_0 = \frac{1}{2} n^2(\xi^2 + \eta^2),$$
$$T_1 = n[\dot u\,(\xi\,\eta_u - \eta\,\xi_u) + \dot v\,(\xi\,\eta_v - \eta\,\xi_v)],$$
$$T_2 = \frac{1}{2} J(\dot u^2 + \dot v^2).$$

Die LAGRANGEschen Gleichungen (XIX; 41) lauten dann

$$\text{(XIX; 45)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T_2}{\partial \dot u}\right) + \left\{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T_1}{\partial \dot u}\right) - \dfrac{\partial T_1}{\partial u}\right\} = \dfrac{\partial}{\partial u}(T_0 + T_2 + U), \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot v}\right) + \left\{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T_1}{\partial \dot v}\right) - \dfrac{\partial T_1}{\partial v}\right\} = \dfrac{\partial}{\partial v}(T_0 + T_2 + U). \end{cases}$$

Hierin ist

$$\frac{\partial T_2}{\partial \dot u} = J\,\dot u; \quad \frac{\partial T_2}{\partial \dot v} = J\,\dot v,$$

ferner

$$\frac{1}{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot u}\right)-\frac{\partial T_1}{\partial u}\right]=\frac{d}{dt}(\xi\,\eta_u-\eta\,\xi_u)-\dot u\,(\xi\,\eta_{uu}-\eta\,\xi_{uu})-$$

$$-\dot v\,(J+\xi\,\eta_{uv}-\eta\,\xi_{uv})=$$

$$=\eta_u(\xi_u\,\dot u+\xi_v\dot v)+\xi(\eta_{uu}\dot u+\eta_{uv}\dot v)-\xi_u(\eta_u\,\dot u+\eta_v\,\dot v)-$$

$$-\eta\,(\xi_{uu}\dot u+\xi_{uv}\dot v)-\dot u\,(\xi\eta_{uu}-\eta\xi_{uu})-$$

$$-\dot v\,(J+\xi\,\eta_{uv}-\eta\,\xi_{uv})=-2J\,\dot v\,,$$

ebenso

$$\frac{1}{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot v}\right)-\frac{\partial T_1}{\partial v}\right]=+2J\dot u\,.$$

Schließlich gilt

$$\frac{\partial T_2}{\partial u}=\frac{1}{2}(\dot u^2+\dot v^2)\frac{\partial J}{\partial u}\,;\quad \frac{\partial T_2}{\partial v}=\frac{1}{2}(\dot u^2+\dot v^2)\frac{\partial J}{\partial v}\,,$$

und da man aus dieser Gleichung mit Hilfe des JACOBIschen Integrals (XIX; 39)

$$2\Omega-C=\dot\xi^2+\dot\eta^2=J(\dot u^2+\dot v^2) \tag{XIX; 46}$$

$\dot u^2+\dot v^2$ eliminieren kann,

$$\frac{\partial T_2}{\partial u}=\frac{1}{2J}\frac{\partial J}{\partial u}(2\Omega-C)\,;\quad \frac{\partial T_2}{\partial v}=\frac{1}{2J}\frac{\partial J}{\partial v}(2\Omega-C)\,.$$

Andererseits ist aber

$$2\Omega=2U+n^2(\xi^2+\eta^2)=2(U+T_0)\,, \tag{XIX; 47}$$

also

$$\frac{\partial T_2}{\partial u}=\frac{1}{J}\frac{\partial J}{\partial u}\left(U+T_0-\frac{C}{2}\right);\quad \frac{\partial T_2}{\partial v}=\frac{1}{J}\frac{\partial J}{\partial v}\left(U+T_0-\frac{C}{2}\right),$$

und man kann daher auch schreiben

$$\frac{\partial}{\partial u}(T_0+T_2+U)=\frac{1}{J}\left\{\frac{\partial J}{\partial u}\left(U+T_0-\frac{C}{2}\right)+J\frac{\partial}{\partial u}\left(U+T_0-\frac{C}{2}\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial u}\left[J\left(U+T_0-\frac{C}{2}\right)\right]\text{ usw.}$$

Die Differentialgleichungen (XIX; 45) erhalten also die Form

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d}{dt}(J\dot u)-2n(J\dot v)&=\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial u}\left[J\left(U+T_0-\frac{C}{2}\right)\right],\\ \frac{d}{dt}(J\dot v)+2n(J\dot u)&=\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial v}\left[J\left(U+T_0-\frac{C}{2}\right)\right].\end{aligned}\right. \tag{XIX; 48}$$

Führt man nun anstatt der Zeit t eine neue unabhängige Variable, die „Pseudozeit" ψ, durch

$$dt=J\,d\psi$$

ein, so ist allgemein

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{d\psi}\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{J} f',$$

wenn man die Ableitungen nach ψ durch Striche bezeichnet. Es ist also

$$J\,\dot{u} = u'; \quad \frac{d}{dt}(J\,\dot{u}) = \frac{du'}{dt} = \frac{1}{J} u''; \quad \ldots,$$

und man erhält, wenn man diese Ausdrücke in (XIX; 48) einsetzt und die Gleichungen mit J multipliziert,

$$\text{(XIX; 49)} \qquad \begin{cases} u'' - 2nJ\,v' = \dfrac{\partial\Phi}{\partial u}, \\[2mm] v'' + 2nJ\,u' = \dfrac{\partial\Phi}{\partial v} \end{cases}$$

als Differentialgleichungen für $u(\psi)$ und $v(\psi)$, und es ist nach (XIX; 47) und (XIX; 48)

$$\text{(XIX; 50)} \qquad \Phi = J\left(U + T_0 - \frac{C}{2}\right) = J\left(\Omega - \frac{C}{2}\right).$$

Die Gleichungen (XIX; 49), deren Form genau derjenigen von (XIX; 36) entspricht, haben das JACOBIsche Integral

$$2\Phi - (u'^2 + v'^2) = 0.$$

In der Tat ist ja nach (XIX; 46), (XIX; 50) und (XIX; 39)

$$\text{(XIX; 51)} \qquad u'^2 + v'^2 = J^2(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) = J(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) = J(2\Omega - C) = 2\Phi.$$

Singularitäten treten in der Bewegung (XIX; 36) nur dort auf (wenn dies überhaupt geschieht), wo die Bahn des infinitesimalen Körpers in den Ort einer der beiden endlichen Massen einmündet; denn dort wird nach (XIX; 39) die Geschwindigkeit $\sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2} = \sqrt{2\Omega - C}$ unendlich groß, weil die Potentialfunktion Ω nach (XIX; 38) an den Stellen $r = 0$ und $\varrho = 0$ Unendlichkeitsstellen besitzt. Dagegen ist die Bewegung $u(\psi)$, $v(\psi)$, die als Lösung der Differentialgleichungen (XIX; 49) erhalten wird, überall regulär, wenn die transformierte und auf die Pseudozeit bezogene Geschwindigkeit, die durch (XIX; 51) gegeben ist, überall endlich bleibt. Das wird aber zutreffen, wenn die Transformation (XIX; 42) so gewählt wird, daß ihre Funktionaldeterminante J proportional $r\varrho$ ist; denn dann verschwinden aus (XIX; 51) die Nenner r und ϱ, die im Ausdruck (XIX; 38) für Ω vorkommen.

Setzt man

$$a = 2; \quad x = \xi - (1 - \alpha) = \xi - \gamma, \quad y = \eta,$$

so beziehen sich die Koordinaten x, y, die man statt ξ, η einführen kann, auf ein System, das man durch Parallelverschiebung in der Abszissenrichtung erhält und dessen Ursprung nun in der Mitte zwischen den endlichen Massen

liegt. Sonne und Jupiter haben in diesem System die Abszissen -1 bzw. $+1$, und es ist

$$\gamma = 1 - \alpha = 1 - a \frac{\mu}{m+\mu} = 1 - 2 \frac{\mu}{m+\mu} = \frac{m-\mu}{m+\mu}.$$

Ferner ergibt sich aus

$$\text{(XIX; 52)} \qquad \left\{ \begin{array}{l|l} & \text{(I)} \\ r^2 = (x+1)^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2 + 2\alpha\,\xi + \alpha^2, & m \\ \varrho^2 = (x-1)^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2 - 2\beta\,\xi + \beta^2, & \mu \end{array} \right.$$

wenn man mit den Faktoren (I) multipliziert, addiert und (XIX; 37) berücksichtigt,

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{m\,r^2 + \mu\,\varrho^2}{m+\mu} - \text{const.}$$

Setzt man dies in den Ausdruck (XIX; 38) für 2Ω ein und unterdrückt die überflüssige Konstante, so folgt

$$2\Omega = 2\left(\frac{m}{r} + \frac{\mu}{\varrho}\right) + n^2 \frac{m\,r^2 + \mu\,\varrho^2}{m+\mu},$$

und es gelten die Differentialgleichungen

$$\text{(XIX; 53)} \qquad \ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial\Omega}{\partial x}; \quad \ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial\Omega}{\partial y}.$$

Im System (XIX; 53) treten Singularitäten (Ejektionen bzw. Aufstürze) nur in den Punkten $x = \pm 1$, $y = 0$ bzw., wenn $z = x + i\,y$ gesetzt wird, in den Punkten $z = \pm 1$ der komplexen z-Ebene auf. Die Transformation

$$z = f(w),$$

die z als reguläre Funktion der komplexen Variablen $w = u + i\,v$ ausdrückt, bildet also außerhalb der singulären Stellen $z = \pm 1$ eine Bahnbewegung $z(t)$ konform auf die w-Ebene ab. Die Bedingung dafür ist, daß außerhalb dieser Stellen überall

$$\frac{dz}{dw} \neq 0$$

sein muß. Thiele zeigt, daß die Transformation

$$z = \cos w; \quad x = \cos u \cosh v, \quad y = -\sin u \sinh v$$

dieser Bedingung genügt; denn es ist, wenn $\bar{z} = x - i\,y$ die zu $z = x + i\,y$ konjugiert komplexe Zahl bedeutet,

$$\left|\frac{dz}{dw}\right|^2 = \frac{dz}{dw}\left(\overline{\frac{dz}{dw}}\right) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)} = J,$$

da ja wegen (XIX; 44)

$$J = x_u\,y_v - y_u\,x_v = x_u^2 + y_u^2 = (x_u + i\,y_u)\,(x_u - i\,y_u)$$

und andererseits wegen $w_u = 1$

$$\frac{dz}{dw} = \frac{dz}{dw}\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial u} = x_u + i\,y_u; \quad \overline{\left(\frac{dz}{dw}\right)} = x_u - i\,y_u$$

ist. Es verschwindet aber

$$\frac{dz}{dw} = -\sin w = -(\sin u \cosh v + i \cos u \sinh v)$$

in der ganzen komplexen $u\,v$-Ebene nur für $v = 0$ und $u = k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Diese Punkte entsprechen aber in der $x\,y$-Ebene den Punkten $x = \pm 1$, $y = 0$, also wegen (XIX; 52) $\varrho = 0$ oder $r = 0$. Andererseits wird nach (XIX; 52)

$$r^2 = \cos^2 u \cosh^2 v + 2\cos u \cosh v + 1 + \sin^2 u(\cosh^2 v - 1) =$$
$$= \cosh^2 v + 2\cos u \cosh v + \cos^2 u = (\cosh v + \cos u)^2,$$

ebenso

$$\varrho^2 = (\cosh v - \cos u)^2,$$

also, da r, $\varrho \geqq 0$ und $\cosh v \geqq \cos u$ ist,

$$\text{(XIX; 54)} \quad \begin{cases} r = \cosh v + \cos u; \quad \varrho = \cosh v - \cos u, \\ r\,\varrho = \cosh^2 v - \cos^2 u = \dfrac{1}{2}(\cosh 2v - \cos 2u) \end{cases}$$

und

$$\text{(XIX; 55)} \quad J = x_u^2 + y_u^2 = \sin^2 u \cosh^2 v + \cos^2 u \sinh^2 v =$$
$$= (1 - \cos^2 u)\cosh^2 v + \cos^2 u(\cosh^2 v - 1) = \cosh^2 v - \cos^2 u = r\,\varrho.$$

Die Differentialgleichungen (XIX; 49) lauten also

$$u'' - n(\cosh 2v - \cos 2u)\,v' = \frac{\partial \Phi}{\partial u},$$
$$v'' + n(\cosh 2v - \cos 2u)\,u' = \frac{\partial \Phi}{\partial v}$$

mit

$$2\Phi = J(2\Omega - C) = r\,\varrho\left\{2\left(\frac{m}{r} + \frac{\mu}{\varrho}\right) + n^2\,\frac{m\,r^2 + \mu\,\varrho^2}{m + \mu} - C\right\} =$$
$$= 2(m\,\varrho + \mu\,r) + \frac{n^2}{m + \mu}\,r\,\varrho\,(m\,r^2 + \mu\,\varrho^2) - C\,r\,\varrho,$$

also, nach Einsetzen von (XIX; 54) und (XIX; 55),

$$\Phi = m(\cosh v - \cos u) + \mu(\cosh v + \cos u) - \frac{1}{4}C\,(\cosh 2v - \cos 2u) +$$
$$+ \frac{1}{4}\,\frac{n^2}{m + \mu}\,(\cosh 2v - \cos 2u)\,[m(\cosh v + \cos u)^2 + \mu(\cosh v - \cos u)^2].$$

Da aber

$$\cosh^2 v + \cos^2 u = 1 + \frac{1}{2}(\cosh 2v + \cos 2u),$$

$$\begin{aligned}(\cosh 2v + \cos 2u)(\cosh 2v - \cos 2u) &= \\ &= \cosh^2 2v - \cos^2 2u = \\ &= \frac{1}{2}(\cosh 4v - \cos 4u),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&2\cosh v \cos u(\cosh 2v - \cos 2u) = \\ &= \cos u(\cosh 3v + \cosh v) - \cosh v(\cos 3u + \cos u) = \\ &= \cosh 3v \cos u - \cosh v \cos 3u\end{aligned}$$

ist, erhält man schließlich, mit $\gamma = \dfrac{m-\mu}{m+\mu}$,

$$\begin{aligned}\Phi = (m+\mu)(\cosh v - \gamma\cos u) + \frac{1}{4}(n^2 - C)(\cosh 2v - \cos 2u) + \\ + \frac{1}{4}n^2\gamma(\cosh 3v\cos u - \cosh v\cos 3u) + \frac{1}{16}n^2(\cosh 4v - \cos 4u)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial u} &= \gamma(m+\mu)\sin u + \frac{1}{2}(n^2 - C)\sin 2u + \\ &\quad + \frac{1}{4}n^2\gamma(3\cosh v\sin 3u - \cosh 3v\sin u) + \frac{1}{4}n^2\sin 4u,\\ \frac{\partial\Phi}{\partial v} &= (m+\mu)\sinh v + \frac{1}{2}(n^2 - C)\sinh 2v + \\ &\quad + \frac{1}{4}n^2\gamma(3\sinh 3v\cos u - \sinh v\cos 3u) + \frac{1}{4}n^2\sinh 4v.\end{aligned}$$

In den Kopenhagener Untersuchungen, über deren Ergebnisse in den nächsten Abschnitten das Wichtigste berichtet werden soll, ist speziell $m = \mu$ gesetzt worden. Es wird also $\gamma = 0$, und wählt man die Masseneinheit so, daß $n = 1$ wird, setzt man also $m + \mu = 2m = 8$,[1]) so ergibt sich einfacher

$$\text{(XIX; 56)}\qquad \left\{\begin{aligned} u'' - (\cosh 2v - \cos 2u)\, v' &= \frac{\partial\Phi}{\partial u},\\ v'' + (\cosh 2v - \cos 2u)\, u' &= \frac{\partial\Phi}{\partial v}\end{aligned}\right.$$

mit

$$\Phi = 8\cosh v - \frac{1}{4}K(\cosh 2v - \cos 2u) + \frac{1}{16}(\cosh 4v - \cos 4u),$$

---

[1]) Statt dessen kann man auch Zeit- und Masseneinheit so festsetzen, daß $k = 2$, $m = \mu = 1$ ist.

wenn noch $C - 1 = K = \text{const}$ gesetzt wird. Diese Größe entspricht der JACOBIschen Konstante und die Gleichung (XIX; 51) dem JACOBIschen Integral. Die rechten Seiten von (XIX; 56) erhalten dann die einfache Form

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = -\frac{1}{2} K \sin 2u + \frac{1}{4} \sin 4u,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = 8 \sinh v - \frac{1}{2} K \sinh 2v + \frac{1}{4} \sinh 4v.$$

Die periodischen Lösungen dieses speziellen Problems, das sich von dem allgemeineren ($m \neq \mu$) durch wesentlich einfachere Formeln auszeichnet, können ziemlich weitgehend als repräsentativ für eine Klassifizierung der periodischen Bahnen verwendet werden, da die Bahnen beim Übergang von gleichen zu verschiedenen Massen m, μ zwar ihre Form durch Verzerrung ändern, ohne aber im allgemeinen jene für die Klassifizierung benutzbaren charakteristischen geometrischen Eigenschaften einzubüßen.

Setzt man in den Formeln $n = 0$, d.h., betrachtet man das System der x, y bzw. u, v als nichtrotierend, so kommt man auf das in Abschnitt 103 behandelte Problem der Bewegung eines von zwei festen Zentren angezogenen Körpers zurück. Die Bewegungsgleichungen nehmen mit $n = 0$ die Form

$$\text{(XIX; 57)} \qquad \begin{cases} u'' = (m - \mu) \sin u - \dfrac{1}{2} C \sin 2u, \\[2ex] v'' = (m + \mu) \sinh v - \dfrac{1}{2} C \sinh 2v \end{cases}$$

an. Diese Gleichungen sind den in Abschnitt 103 diskutierten Differentialgleichungen (XI; 110) äquivalent und lassen sich, wie diese, durch elliptische Funktionen lösen. Die Gleichungen (XIX; 57), die sich hier auf einfachste Weise aus den THIELEschen Differentialgleichungen des „problème restreint“ ergeben haben, erweisen sich nicht nur als einfach und formschön, sondern sind auch bereits nach Variablen getrennt. Selbstverständlich sind auch die Lösungen dieses Problems durch Einführung der Pseudozeit ψ regularisiert.

Sind die Probleme (XIX; 56) bzw. (XIX; 57) gelöst, so kann die zu bestimmten Bahnpunkten der Lösungskurve

$$r(\psi), \varrho(\psi) \quad \text{bzw.} \quad u(\psi), v(\psi)$$

gehörende Zeit t durch Quadratur wiedergewonnen werden; denn es ist ja

$$t = t_0 + \int_{\psi_0}^{\psi} r \varrho \, d\psi = t_0 + \frac{1}{2} \int_{\psi_0}^{\psi} (\cosh 2v - \cos 2u) \, d\psi.$$

Als instruktives Beispiel für die THIELEsche Transformation und ihre regularisierenden Eigenschaften möge der Fall der Ejektionsbahn dienen, die als

Abschluß der periodischen Librationsbahnen um L_2 erhalten wird (Abb. 48). Durch die Transformation

$$x = \cosh v \cos u, \quad y = -\sinh v \sin u$$

wird die xy-Ebene unendlich oft und, abgesehen von den singulären Punkten, konform auf die uv-Ebene abgebildet, und zwar so, daß die vier [mit (I), (II), (III), (IV) bezeichneten] Quadranten der xy-Ebene in Streifen der oberen bzw. unteren uv-Halbebene übergehen, die von den Strahlen $u = \pm k\pi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ begrenzt werden (siehe Abb. 51a, b). Je vier zusammenhängende Streifen der uv-Ebene bilden also die gesamte xy-Ebene ab, und

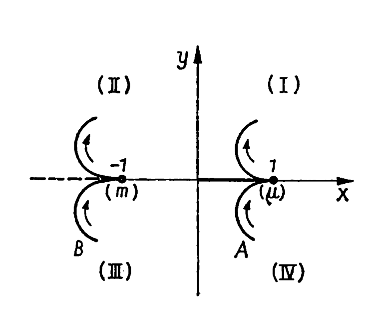


Abb. 51a
xy-Ebene des rotierenden Systems mit Ejektionen (schematisch) A (aus μ) und B (aus m)

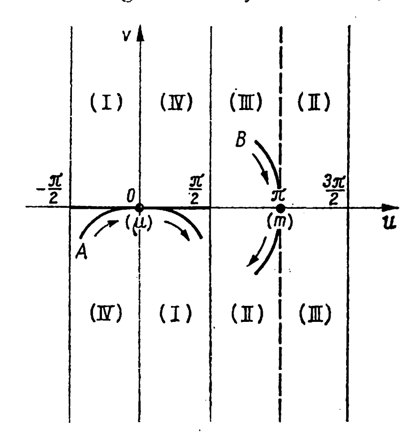


Abb. 51b. Ejektionen aus μ und m in Thieleschen Koordinaten

zwar genügt es, entweder die vier zwischen den Geraden $u = 0$ und $u = \pi$ liegenden Gebiete *oder* die vier unterhalb der u-Achse und zwischen den Strahlen $u = -\pi/2$ und $u = +3\pi/2$ liegenden Gebiete (I) bis (IV) zusammenzufassen.

Im Falle der Ejektionsbahn Abb. 48, S. 449, wählt man zweckmäßig die letztgenannte Möglichkeit. Der singuläre Punkt $(x = +1, y = 0)$ der Bahn A (Abb. 51a) geht in $u = v = 0$ über, und die zwischen μ und dem Koordinatenursprung liegende, fett ausgezogene Strecke wird in Abb. 51b *zweimal* abgebildet: 1. durch die Strecke $0 < u < \pi/2$ der u-Achse, 2. durch die Strecke $0 > u > -\pi/2$. Der obere [in (I) liegende] Zweig der Ejektionsbahn (dessen Verlauf in Abb. 51a angedeutet ist) wird also in der Bildebene die positive u-Achse berühren, da auch sein Bild in (I) liegt. Der untere, in (IV) liegende Zweig wird dagegen in der Bildebene die negative u-Achse berühren. Damit ist die „Spitze“ der Ejektionsbahn in der uv-Ebene verschwunden; die Bahn durchläuft die singuläre Stelle ohne Knick, und überdies sorgt die Transformation $\psi = \psi(t)$ dafür, daß die Bewegung an dieser Stelle mit endlicher und stetiger Geschwindigkeit $d/d\psi$ vor sich geht. Abb. 52 zeigt das Bild der Ejektionsbahn exakt.

Im Falle der Ejektionsbahn B, die als Abschluß der einfach-periodischen und (im rotierenden System) rückläufigen Satellitenbahnen um μ gilt und deren Form Abb. 49, S. 450, für $m = \mu$ zeigt, wählt man als Bild der xy-Ebene die zwischen $u = 0$ und $u = \pi$ liegenden Streifen, in denen nun die Abbildungen der beiden Strahlen $y = 0, x > 1$ und $y = 0, x < -1$ in je zwei Zweige aufgespalten erscheinen. Der in Abb. 51a, b gestrichelt gezeichnete Strahl $x < -1$, der in der Ejektionsbahn als gemeinsame Tangente der beiden im singulären Punkt $(-1, 0)$ in einer Spitze zusammenlaufenden Kurventeile auftritt, wird also in der uv-Ebene zweifach abgebildet, nämlich als Begrenzung von (III) durch den Strahl $u = \pi, v > 0$ und als Begrenzung von (II) durch den Strahl $u = \pi, v < 0$. Das Bild der Ejektionsbahn berührt also in $u = \pi, v = 0$ die Gerade $u = \pi$ ohne Spitze und verläuft im übrigen ganz links von ihr.

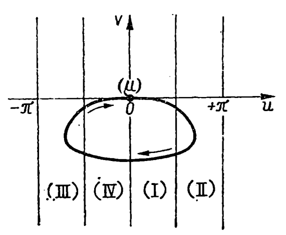


Abb. 52. Ejektionsbahn der Klasse a (Librationen um L_2) in THIELEschen Koordinaten

166. *Die Kopenhagener Durchmusterung*

Die Kopenhagener Durchmusterungsarbeiten zur Ermittlung und Klassifizierung der periodischen Bahnen des „problème restreint" sind ab 1913 systematisch durchgeführt worden, nachdem Einzeluntersuchungen schon seit 1894 gezeigt hatten, wie aufschlußreich solche numerischen Rechnungen für die Erforschung dieses theoretisch kaum erschließbaren Gebietes sein können. E. STRÖMGREN[1]) hat eine erste Übersicht über die Ergebnisse dieser Untersuchungen 1922 auf dem interskandinavischen Mathematikerkongreß zu Helsinki bekanntgegeben, eine zweite, vollständigere 1935 veröffentlicht.[2]) Dabei beschränkt er sich zunächst auf einfach-periodische Bahnen, d. h. solche, die nach einmaliger Umrundung eines abgeschlossenen, zusammenhängenden Gebietes in sich zurücklaufen, sowie auf Bahntypen, deren Existenz man a priori auf Grund allgemeiner Überlegungen vermuten konnte. Die hierbei zutage tretenden Klassen von Bahnen sind einparametrige Scharen geschlossener Kurven, die zwischen „Grenzbahnen" singulären Charakters eingeschlossen sind. Durchweg besteht die eine dieser Grenzbahnen aus einem singulären Punkt[3]), auf den sich die Folge der Bahnkurven mit abnehmenden, zuletzt infinitesimalen Amplituden zusammenzieht. Die andere Grenzbahn ist durchweg eine Ejektionsbahn, deren Ejektionspunkt in einer der beiden Massen liegt, oder eine Bahn, die Ejektionspunkte in beiden Massen besitzt.

Die Ejektionsbahnen bilden den natürlichen Abschluß einer Bahnklasse, doch ist grundsätzlich auch eine analytische Fortsetzung der Schar über diese Grenz-

[1]) E. STRÖMGREN, P.o.m.M. Nr. 39, 1922.
[2]) E. STRÖMGREN, B.A. (2) 9, 87 (1935).
[3]) Solche Punkte sind die fünf Librationszentren und die drei Unendlichkeitsstellen der Potentialfunktion (die Örter der endlichen Massen und der unendlich ferne Punkt der Ebene).

bahn hinaus möglich, wobei sich der geometrische Charakter der Kurven irgendwie ändert. In den meisten Fällen führt die konsequente Fortsetzung der Folge über immer neue Grenzbahnen zu immer verwickelteren Formen von periodischen Lösungen und findet schließlich irgendwo eine praktisch nicht mehr überschreitbare Grenze, weil sie, wie STRÖMGREN sich an anderer Stelle ausgedrückt hat, „in das trostlose, weil endlose, Gebiet der komplizierten Bahnformen führt". Andererseits gibt es aber auch Klassen von periodischen Bahnen, die zwar vorübergehend in dieses weitläufige Gebiet hinein fortsetzbar sind, aber dann wieder in sich zurückkehren, also eine ringförmig in sich geschlossene Folge bilden. Diese Fälle verdienen natürlich besondere Beachtung.

Die Mehrzahl der einfach-periodischen Bahnen, deren Existenz a priori auf Grund allgemeiner Erfahrungen vorausgesagt werden konnte, lassen sich nach STRÖMGREN in zwölf Klassen unterbringen, die er mit den Buchstaben a, $b, \ldots, m$ bezeichnet. Diese Klassen sind

a: periodische Bahnen um L_2 (sie stellen historisch das älteste Problem dieser Art dar, das mathematisch und numerisch behandelt worden ist),
b: periodische Bahnen um L_3,
c: periodische Bahnen um L_1,
d: periodische Bahnen um L_4,
e: periodische Bahnen um L_5,
f: rückläufige periodische Bahnen um die Masse μ („Jupiter"),
g: rechtläufige periodische Bahnen um die Masse μ,
h: rückläufige periodische Bahnen um die Masse m („Sonne"),
i: rechtläufige periodische Bahnen um die Masse m,
k: rechtläufige periodische Bahnen um beide endlichen Massen,
l: rückläufige periodische Bahnen um beide Massen, deren Bewegung im ruhenden System aber rechtläufig ist,
m: rückläufige periodische Bahnen um beide Massen, deren Bewegung auch im ruhenden System rückläufig ist.

Einige weitere periodische Bahnklassen, die im Laufe der Untersuchung entdeckt wurden, deren Existenz aber a priori nicht vermutet werden konnte, werden in weiteren Klassen ($n, o, p, \ldots, s$) untergebracht.

Wir müssen uns hier darauf beschränken, einige besonders charakteristische Typen von periodischen Bahnen und ihre Fortsetzungen etwas eingehender zu beschreiben. Im übrigen sei der Leser auf die zahlreichen, meist in den Publikationen der Kopenhagener Sternwarte veröffentlichten Arbeiten über diesen Gegenstand verwiesen, in denen er nicht nur eine Fülle von numerischem Material vorfindet, sondern auch Versuche, diese numerischen Ergebnisse im Lichte analytischer Überlegungen zu verstehen. Es würde aber zu weit führen, diese weniger den Astronomen als den reinen Mathematiker angehenden Dinge hier eingehender zu behandeln.

Die Klassen a bis e der STRÖMGRENschen Einteilung umfassen die aus den fünf CHARLIERschen Familien a bis e der infinitesimalen Librationen hervorgehenden periodischen Bahnen, doch ist hier die Bezeichnung etwas abweichend.

Die STRÖMGRENschen Klassen a, b, c entsprechen den CHARLIERschen Familien c, a, b. Die STRÖMGRENschen Klassen d und e decken sich ebenfalls nicht genau mit den CHARLIERschen Familien gleicher Bezeichnung. Wir erinnern uns, daß nach CHARLIER die kurzperiodischen Librationen um L_4 und L_5 die Bezeichnung e, die langperiodischen die Bezeichnung d tragen, während STRÖMGREN beide Librationsarten zusammenfaßt und die Klassen nach den Librationszentren trennt, um die sich die Kurven scharen. Die STRÖMGRENsche Nomenklatur erscheint hier nicht besonders zweckmäßig, da sich ja die Bewegungen um L_4 und L_5 nicht wesentlich unterscheiden und (sogar bei beliebigem Verhältnis der endlichen Massen) immer spiegelbildlich-kongruent sind. Für das Massenverhältnis $\mu : m = 1$, das allen numerischen Rechnungen der Kopenhagener Versuchsreihe zugrunde liegt, sind ferner, wie in Abschnitt 116 gezeigt worden ist, periodische Bahnen um L_4 oder L_5 nicht möglich, da deren reelle Existenz auf Massenverhältnisse $\mu : m$ beschränkt ist, die kleiner als etwa $1 : 25$ sind. Das gilt allerdings zunächst nur für den infinitesimalen Bereich um die beiden LAGRANGEschen Dreieckspunkte. Eine Untersuchung über das Verhalten der Bahnklasse im endlichen Bereich, wenn das Massenverhältnis diesen zulässigen Maximalwert überschreitet, ist erst später (1929) bekanntgegeben worden: Sie führt in das weitschichtige Gebiet der „asymptotischen Lösungen" des „problème restreint" hinein, über das wir weiter unten (Abschnitt 169) noch berichten werden.

Die spezielle Wahl des Verhältnisses $\mu : m = 1$ bedeutet, wie schon im vorigen Abschnitt hervorgehoben wurde, im allgemeinen keine wesentliche Einschränkung bei der Klassifizierung der periodischen Bahnen, da eine Variation dieses Verhältnisses zwar eine Deformation, also eine quantitative Veränderung der Bahnformen, aber keine (qualitative) Änderung ihrer typischen geometrischen Eigenschaften mit sich bringt. Mit anderen Worten: Wenn das Verhältnis $\mu : m$ sich ändert, wird die ganze xy-Ebene durch eine in allen Teilen eineindeutige Transformation auf eine andere ($x'y'$-) Ebene abgebildet. Die einzige Ausnahme von dieser Regel scheinen die Librationsbahnen um L_4 und L_5 zu bilden, bei denen auch eine qualitative Umwandlung der Bahnformen eintritt, wenn das Massenverhältnis die kritische Grenze überschreitet. Die Klassen d und e erweisen sich also als besonders problematisch, und diese Probleme sind nicht nur von mathematischem Interesse, weil sie immer irgendwie Bezug auf das astronomische Problem der Trojanerbewegung haben. Wenn wir uns an die Ergebnisse des Abschnitts 164 erinnern, so erkennen wir, daß in der STRÖMGRENschen Klasseneinteilung eine Lücke vorhanden ist: Es fehlen die periodischen „Transtrojanerbahnen", die gleichzeitig L_3, L_4 und L_5 umschließen und zu den einfach-periodischen Bahnen gehören.

Infolge der Gleichheit der endlichen Massen, die nun, von den eben genannten Ausnahmefällen abgesehen, immer angenommen werden darf, ohne daß dadurch die Allgemeinheit der Klassifizierung wesentlich eingeschränkt wird, sind die Bahnen der Klassen a und b (Librationen um L_2 und L_3) spiegelbildlich-symmetrisch zueinander in bezug auf die y-Achse, da ja bei gleichen Massen diese beiden Librationszentren symmetrisch zum Koordinatenanfang liegen. Das gleiche gilt für die Klassen f und h sowie für die Klassen g und i. Da für

$\mu = m$ das Librationszentrum L_1 mit dem Koordinatenanfang zusammenfällt, ist a priori zu erwarten, daß die periodischen Bahnen der Klasse c zur y-Achse symmetrisch verlaufen. Sie werden also im allgemeinen symmetrisch zu beiden Achsen sein. Ebenso wie aber (s. Schluß von Abschnitt 162) periodische Bahnen denkbar sind, die zur x-Achse unsymmetrisch liegen, sind auch Librationsbahnen um L_1 denkbar, die auch im Falle gleicher Massen unsymmetrisch zur y-Achse verlaufen, diese also schiefwinklig schneiden. Es müssen solche Bahnen dann aber immer in Paaren auftreten, die zur y-Achse spiegelbildlich liegen und mit dieser Achse gemeinsame Schnittpunkte haben. Die numerischen Versuche haben die Existenz solcher Bahnen tatsächlich ergeben. Obwohl sie eigentlich auch in die Klasse c gehören, hat STRÖMGREN sie, weil sie ja besondere Scharen mit abweichenden geometrischen Eigenschaften bilden, den Sonderklassen n und o zugeteilt.

167. *Periodische Bahnen um die kollinearen Librationszentren*

Die einfach-periodischen Bahnen der Klasse a, von denen einige in Abb. 48 dargestellt sind, werden durch eine Ejektionsbahn abgeschlossen, die den Planetoiden aus der Masse μ (Jupiter) hervorschießen und nach vollendetem Umlauf wieder in sie einstürzen läßt. Die Fortsetzung dieser Schar über die Ejektionsbahn hinaus ergibt ein besonders einfaches und schönes Beispiel einer ringartig in sich geschlossenen Folge von periodischen Bahnen. In Abb. 53a–e ist der Ablauf dieses Vorgangs dargestellt. Die aus L_2 hervorquellenden Librationsbahnen werden zunächst durch die Ejektionsbahn (siehe Abb. 53a = = Abb. 48) abgeschlossen. Die unmittelbare Fortsetzung (Abb. 53b) ergibt

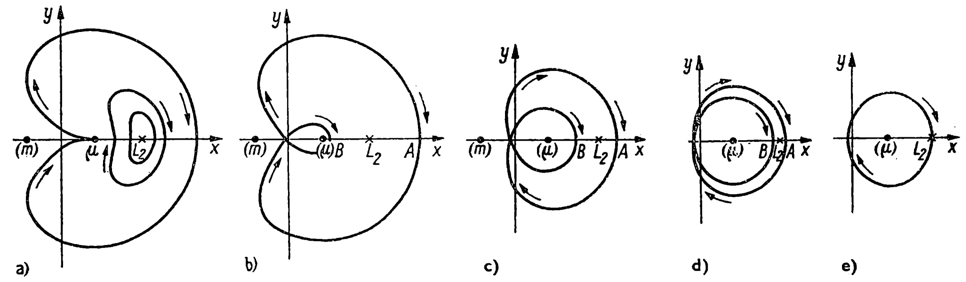


Abb. 53. Entwicklung der Klasse a der periodischen Librationsbahnen um L_2 über die Ejektionsbahn (a) hinaus

an Stelle der Ejektion eine vom Planetoiden mit großer Geschwindigkeit durchlaufene kleine Schleife um μ. Die weitere Entwicklung führt auf eine Ausweitung der engen Bahn (der Schleife) und eine gleichzeitige Schrumpfung der weiten Bahn (Abb. 53c). Die beiden rechtwinkligen Übergänge über die x-Achse (A und B), die zu beiden Seiten von L_2 liegen, rücken (Abb. 53d) immer näher an L_2 heran. Gleichzeitig rücken auch der innere und der äußere Teil der Bahn immer näher zusammen, bis sie schließlich ganz zusammenfallen. Diese fast kreisförmige Grenzbahn (Abb. 53e) geht durch L_2 hindurch. Von diesem Halb-

zeitstadium der Entwicklung an verläuft alles in umgekehrter Folge: Die ursprüngliche Schleife wird bei weiterer Ausdehnung zur Bahn, die ursprüngliche Bahn zur Schleife; die letztere zieht sich auf einen Punkt zusammen, womit wieder die Ejektionsbahn hergestellt ist; schließlich wird die Phase der einfach-periodischen Librationen erneut, aber mit abnehmender Amplitude durchlaufen, und diese Schar verschwindet schließlich im Librationszentrum, aus dem sie hervorgegangen ist.

Während die Bahnen der Klasse b (für $m = \mu$) genau spiegelbildlich zu denen der Klasse a (bezüglich der y-Achse) verlaufen, verhalten sich diejenigen der Klasse c (periodische Librationen um L_1) ganz anders und bedeutend komplizierter. Im infinitesimalen Bereich um L_1 sind die Bahnen nach Abschnitt 118 Ellipsen mit dem Achsenverhältnis

$$\gamma = \sqrt{\frac{\Omega_{aa} + \nu^2}{\Omega_{bb} + \nu^2}}$$

mit

$$f = \frac{m}{r^3} + \frac{\mu}{\varrho^3}; \quad \nu^2 = 1 - f + \sqrt{9f^2 - 4f}; \quad \Omega_{aa} = 1 + 4f; \quad \Omega_{bb} = 1 - 2f.$$

Da in diesen Formeln, der in ihnen benutzten Definition der Massen- und Längeneinheit zufolge, $m = \mu = {}^1/_2$, $r = \varrho = {}^1/_2$ (in L_1) gesetzt werden muß, ist hier

$$f = 4; \quad \nu^2 = \sqrt{128} - 3 = 8.314; \quad \Omega_{aa} = 17; \quad \Omega_{bb} = -7$$

und daher

$$\gamma = 4.3893,$$

d.h., die großen Achsen der infinitesimalen Ellipsen, die in die y-Richtung fallen, sind etwa 4.4mal länger als die kleinen Achsen, was der Exzentrizität 0.9737 entspricht.

Da L_1 (für $\mu = m$) im Koordinatenanfang liegt, sind diese Bahnen zu beiden Achsen symmetrisch, und diese Eigenschaft bleibt auch den endlichen Bahnen dieser Klasse erhalten. Während die infinitesimalen Bahnen an den Schnittpunkten mit der x-Achse gegen das Librationszentrum gekrümmt sind, wird bei wachsender Amplitude, wenn diese Schnittpunkte immer weiter von L_1 fort und gegen die endlichen Massen hin rücken, diese Krümmung immer geringer werden und schließlich, wenn die Schnittpunkte sich den Massen genügend genähert haben, ihr Vorzeichen umkehren. In den weiter ausladenden Bahnen dieser Klasse nähert sich also der Planetoid abwechselnd beiden Massen und umläuft sie mit großer Geschwindigkeit in hyperbelartig gekrümmten Kurven mit dem Perizentrum auf der x-Achse, verläßt dann ihren Anziehungsbereich, um sich in weitem Bogen der anderen Masse zuzuwenden. Die Klasse mündet, wie Abb. 54a zeigt, schließlich in eine Doppelejektionsbahn, die als (vorläufiger) Abschluß der Klasse gelten kann. In ihr wird der Planetoid aus der einen Masse herausgeschleudert werden und in die andere hineinstürzen, worauf sich dasselbe Spiel in umgekehrtem Sinne wiederholt.

Versucht man, die Schar der periodischen Lösungen dieser Klasse über die Doppelejektionsbahn hinaus fortzusetzen, d. h., ändert man die auf periodische Lösungen führenden Anfangsbedingungen stetig, so erhält man offenbar Kurven, die um beide Massen spiegelbildlich kongruente Schleifen bilden. Diese Schleifen dehnen sich aus, durchdringen sich (mit Doppelpunkten auf der

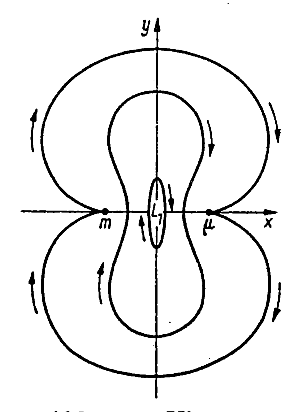


Abb. 54a. Klasse *c*
Erste Phase, 1. Ejektionsbahn als Abschluß

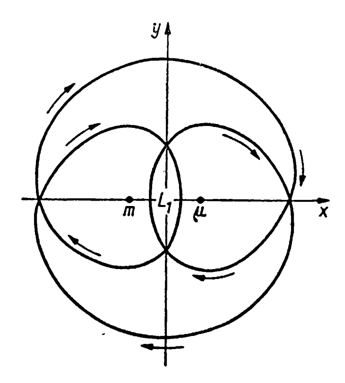


Abb. 54b. Klasse *c*
Zweite Phase, 1 Schleifenpaar

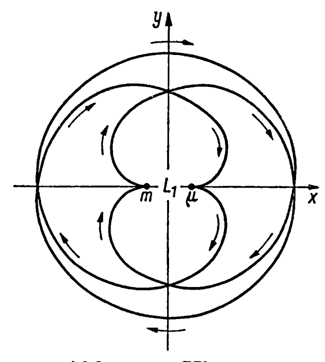


Abb. 54c. Klasse *c*
Zweite Phase, 2. Ejektionsbahn als Abschluß

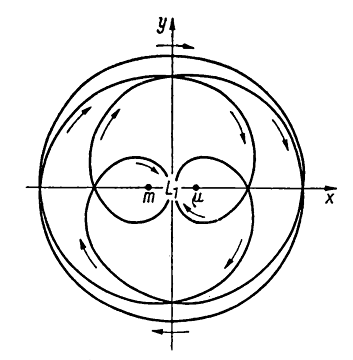


Abb. 54d. Klasse *c*
Dritte Phase, 2 Schleifenpaare

y-Achse) und münden schließlich wiederum in Ejektionsbahnen ein, aber auch die weit ausschwingenden, die Schleifen verbindenden Teile der Bahnkurve dehnen sich nach allen Richtungen weiter aus. Diese Entwicklung ist in ihren Anfangsphasen in Abb. 54a–d dargestellt: Sie führt auf immer neue Ejektionsbahnen, die eine Phase der Entwicklung abschließen und den Übergang zur nächsten bilden; nach jedem Übergang entsteht ein neues Schleifenpaar, während sich die alten weiter ausdehnen. Der gesamte Bereich, in dem die Bewegung stattfindet, wird durch eine etwa kreisförmige Umrandung abgeschlossen, die sich im Laufe der Entwicklung ständig ausdehnt und die schließlich in den un-

endlich fernen Punkt der Ebene einmündet, nachdem die Entwicklung der Bahnen selbst unendlich viele Phasen zwischen Ejektionsbahnen als Übergängen und mit ständig zunehmender Zahl von Schleifenpaaren durchgemacht hat. Die immer kompliziertere Formen annehmenden Bahnen dieser Klasse nähern sich also *asymptotisch* einer Folge von periodischen Bahnen um den unendlich fernen Punkt, die ihrerseits ebenfalls eine Klasse periodischer Bahnen bilden, nämlich rückläufige Bahnen um beide Massen, die (bei über alle Grenzen wachsendem Radius) schließlich in Kreise übergehen, die sich um den unendlich fernen Punkt zusammenziehen. Man könnte aus diesen Erfahrungen die Vermutung ableiten, daß *jede* Entwicklung irgendeiner Klasse von periodischen Bahnen aus irgendeinem der acht singulären Punkte der xy-Ebene (den fünf Librationszentren, den beiden Massen und dem unendlich fernen Punkt) ihren Anfang nimmt und nach Durchlaufen endlich oder unendlich vieler Phasen in irgendeinen anderen dieser Punkte einmündet, sich ihm asymptotisch nähert oder in den Ausgangspunkt zurückführt. Jedenfalls ist dies für viele Bahnklassen sicher der Fall.

168. *Periodische Bahnen um die endlichen Massen*

Alle übrigen der zwölf ersten STRÖMGRENschen Klassen beginnen mit periodischen Bewegungen um einen der drei Pole der Potentialfunktion, also mit Bahnen um eine der beiden endlichen Massen oder um den unendlich fernen Punkt als Quellpunkt. Die letzteren, die in den Klassen k, l und m zusammengefaßt sind, beginnen also mit sehr weiten Kreisen, die beide Massen einschließen und sich im Laufe der Entwicklung um sie zusammenziehen. Die Bahnklassen f bis i, von denen wir aus Symmetriegründen nur f und g (die rückläufigen und rechtläufigen Bahnen um den Ort $x = 1$, $y = 0$ von μ) zu diskutieren brauchen, gehören auch zu dem für die Himmelsmechanik so wichtigen Thema des nächsten Kapitels und verdienen daher besonderes Interesse.

Die erste Entwicklungsphase der rückläufigen Satellitenbahnen (Klasse f) mit dem Quellpunkt in μ und über die infinitesimalen Kreisbahnen bis zu der Ejektionsbahn mit dem singulären Punkt in m ist bereits in Abschnitt 165 (Abb. 49, S. 450) dargestellt worden. Die Entwicklung über die Ejektionsbahn hinaus verläuft, ähnlich wie die der Klasse c, über unendlich viele, durch immer neue Ejektionsbahnen getrennte Phasen, bis ihre äußere Umrandung sich um den unendlich fernen Punkt zusammenzieht. Aber diese Folge von Bahnformen ist insofern etwas einfacher, als nur *einfache* Ejektionen (abwechselnd aus m und μ) auftreten und zu Beginn jeder neuen Phase nur je *eine* neue Schleife (wiederum abwechselnd um m und μ) erscheint. Die ersten beiden Phasen dieser Entwicklung und ihr Abschluß sind in Abb. 55a–c dargestellt: Nach Überschreiten der ersten Ejektionsbahn (mit dem Ejektionspunkt in m) bildet sich eine Schleife um m. Bahn und Schleife weiten sich aus, bis die Schleife die Masse μ in einer zweiten Ejektionsbahn erreicht. Der weitere Verlauf ist leicht zu übersehen: Es bildet sich um μ eine zweite (innere) Schleife, die bei weiterer Ausdehnung zu einer dritten Ejektionsbahn (nun wieder aus m) führt. Dieses Spiel wiederholt sich unendlich oft, der Punkt A (der am weitesten rechts auf der

x-Achse liegende Bahnpunkt, den man immer als das Apozentrum der Bewegung betrachten kann, da er stets von beiden Massen maximal entfernt ist) rückt dabei stetig ins Unendliche.

Zwei Bemerkungen verdienen es noch, an diese Betrachtungen geknüpft zu werden:

1. Unter den rückläufigen periodischen Bahnen um μ (Klasse f) gibt es eine (H in Abb. 55a), die mit einer periodischen Bahn der Klasse a (nämlich der

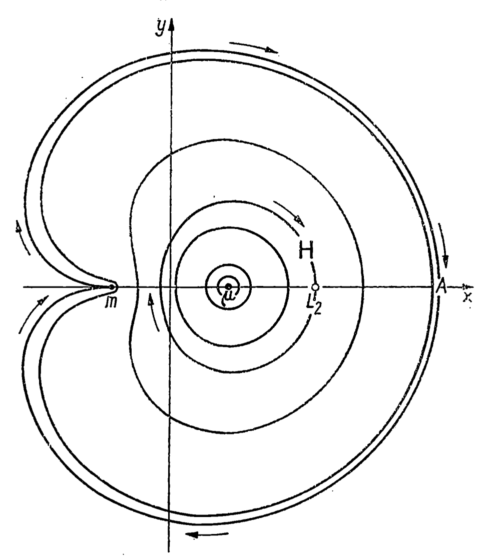


Abb. 55a. Periodische Bahnen der Klasse f

Erste Phase, rückläufige Satelliten um μ mit abschließender Ejektionsbahn. Die Bahn H, die durch L_2 geht, ist identisch mit der Bahn Abb. 53e der Klasse a

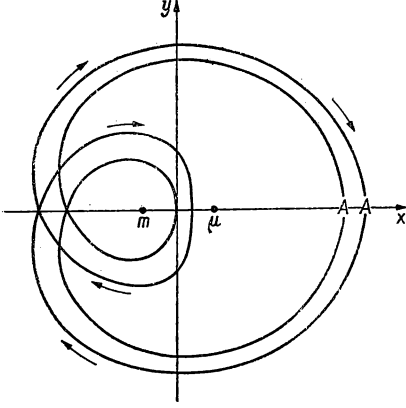


Abb. 55b. Klasse f

Zwei Bahnen der zweiten Phase, Schleifen um m

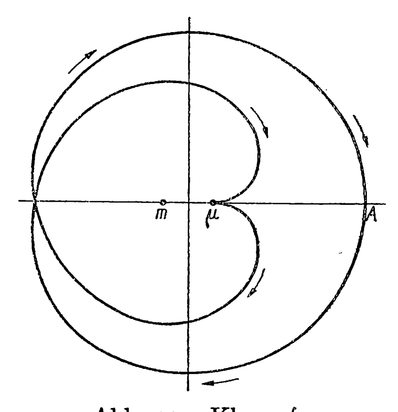


Abb. 55c. Klasse f

2. Ejektionsbahn als Abschluß der zweiten Phase

Bahn Abb. 53e) identisch ist, jener Bahn, die als „Halbzeitkurve" der ringförmig abgeschlossenen Entwicklung dieser Klasse angesehen werden kann. Es ist dies nicht der einzige Fall, in dem spezielle Bahnen einer Klasse mit speziellen Bahnen einer anderen Klasse zusammenfallen. Diese gemeinsamen Bahnen sind – meist durch auffallende Eigenschaften – besonders ausgezeichnet. Hier sind dies die folgenden Kennzeichen: in der Klasse a die doppelt durchlaufene Halbzeitbahn, in beiden Klassen diejenige Bahn, die durch L_2 hindurchgeht.

Man kann solche Bahnen, die gleichzeitig zwei Klassen angehören, leicht aufsuchen, indem man die zu jeder Klasse gehörenden *charakteristischen Kurven* aufzeichnet. Diese Kurven geben den Zusammenhang zwischen den Bahnparametern und den JACOBIschen Konstanten für die einzelnen zu einer Klasse gehörenden periodischen Bahnen wieder (oder auch den für die Klasse charakteristischen Zusammenhang zwischen den Anfangsbedingungen). Wenn man von irgendeinem Punkt x_0 der x-Achse rechtwinklig zu dieser Achse startet, gibt es gewisse Anfangsgeschwindigkeiten $\dot{y}_0$, die auf periodische Bahnen führen, und für jede Klasse von periodischen Bahnen wird also $\dot{y}_0 = f(x_0)$ eine stetige und (gegebenenfalls gewisse diskrete Stellen ausgenommen) beliebig oft differenzierbare Funktion darstellen. Statt der Anfangsgeschwindigkeit kann man aber auch die JACOBIsche Konstante C setzen; denn da $C = 2\Omega - V^2$ und für den Start (an dem $y_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$ ist) $\Omega = \Omega(x_0)$ und $V = |\dot{y}_0|$ gesetzt werden kann, so ist auch C eine Funktion der Abszisse des Startpunktes und $C(x_0)$ eine stetige und eindeutige Funktion für die ganze Klasse. Haben nun die Charakteristiken zweier Bahnklassen einen Punkt gemeinsam, in dem sie sich schneiden oder berühren, dann sind auch die diesem Punkt entsprechenden periodischen Lösungen der beiden Klassen identisch, da sie den gleichen Anfangsbedingungen entstammen.

Im Falle der Kopenhagener Untersuchungen, wo $k = 1$, $m = \mu = 4$, $a = 2$ und daher $n = 1$ gesetzt war, lautet das JACOBIsche Integral[1]) nach (XIII; 2) und (XIII; 3)

$$V^2 = 2\Omega - C = 2k^2\left(\frac{m}{r} + \frac{\mu}{\varrho}\right) + n^2(x^2 + y^2) - C =$$

$$= 8\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\varrho}\right) + x^2 + y^2 - C.$$

Für die Anfangsbedingungen $x = x_0$, $\dot{x} = y = 0$, $\dot{y} = \dot{y}_0$, $r = x + 1$, $\varrho = x - 1$ (Startpunkt rechts von μ) wird also

$$C = 8\left(\frac{1}{x_0 + 1} + \frac{1}{x_0 - 1}\right) + x_0^2 - \dot{y}_0^2; \quad \dot{y}_0 = f(x_0) \tag{XIX; 58}$$

den Zusammenhang zwischen C und x_0 für eine gegebene Klasse darstellen.

[1]) Für einen in den LAGRANGEschen Dreieckspunkten ruhenden Körper wird bei dieser Wahl der Zeiteinheiten (wegen $r = \varrho = 2$, $x = 0$, $y^2 = 3$) $C = 11$ oder, wenn man

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}(r^2 + \varrho^2) - 1$$

setzt und die Konstante -1 mit $-C$ vereinigt, $C = 12$. Dieser Wert entspricht dem früher (mit anderen Längen- und Masseneinheiten) erhaltenen Wert $C = 3$.

In Abb. 56 sind für die Bahnklasse a und den Beginn der Bahnklasse f die charakteristischen Kurven $C = C(x_0)$ aufgezeichnet, soweit die nicht sehr dicht liegenden, aus den Kopenhagener Untersuchungen bekannt gewordenen Daten dies gestatten. Sie haben den zur Halbzeitbahn der Klasse a gehörenden Punkt H gemeinsam. Während die charakteristische Kurve der Klasse a, die bei der Entwicklung der Klasse pendelartig hin und her durchlaufen wird,

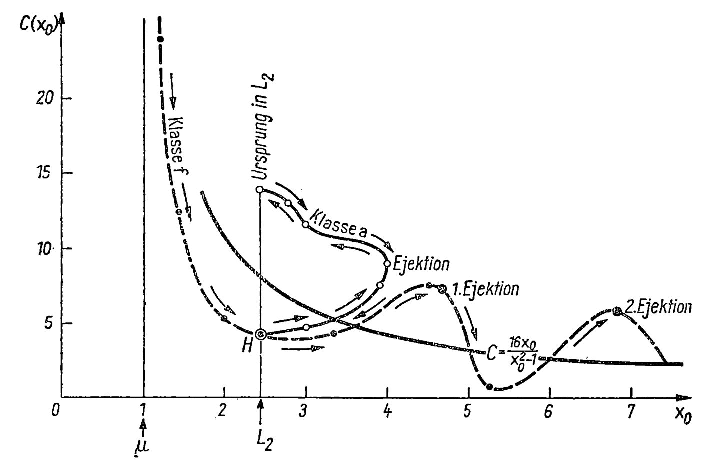


Abb. 56. Charakteristische Kurven der Klassen a (o—o) und f (⊙— — —⊙)

endlich begrenzt ist, setzt sich die Charakteristik der Klasse f nach rechts hin ad infinitum fort und schmiegt sich dabei unter wellenartigen Schwankungen an einen asymptotisch gegen $C = 0$ abnehmenden hyperbelartigen Ast an.

2. Es ist wohl zuerst von JENS P. MÖLLER[1]) ausdrücklich auf den Zusammenhang aufmerksam gemacht worden, der zwischen den Ejektionsbahnen im rotierenden System und den Bahnen des freien Falls im festen (absoluten) System besteht und der auf die Bedeutung der Ejektionsbahnen als himmelsmechanisches Problem hinweist. Man muß hierbei auch an die in der Literatur vielfach anzutreffende Bemerkung erinnern, daß der Begriff der periodischen Bahn (d.h. einer nach endlich vielen Umläufen in sich zurücklaufenden Bahn) in jedem der beiden Systeme einen verschiedenen Inhalt hat: Eine periodische Bahn im rotierenden System ist im absoluten System dann und nur dann periodisch, wenn ihre Periode mit der Umlaufszeit der endlichen Massen kommensurabel ist. Nur die Ejektionsbahnen nehmen eine Sonderstellung ein: Ejektionsbahnen im rotierenden System bleiben auch im festen System Ejektionsbahnen. J.P. MÖLLER schreibt loc.cit.:

„Untersucht man die Bewegung (auf einer Ejektionsbahn der Klasse f) im absoluten Koordinatensystem, so stellt sich heraus, daß sie sehr nahe geradlinig ist, und da ein großer Teil jeder Bahn in ziemlich großer Entfernung von den beiden Massen verläuft, wird man jedenfalls für diesen Teil der Bahn eine

[1]) J. P. MÖLLER, A.N. *233*, 81 (1928).

gute Annäherung bekommen, indem man die beiden Massen durch eine doppelt so große im Koordinatenursprung befindliche Masse ersetzt. Die unendlich kleine Masse fängt ihre Bewegung mit unendlich großer Geschwindigkeit im Koordinatenursprung an und bewegt sich, während die Geschwindigkeit bis zu Null abnimmt, geradlinig nach außen, danach stürzt sie in die anziehende Masse wieder hinein usf."

In der Tat läßt sich folgendes zeigen: Wenn man eine elliptische Bewegung nach den KEPLERschen Gesetzen in einem Koordinatensystem darstellt, das um den Ort des Zentralkörpers rotiert, und wenn die Umlaufszeit in der Ellipse ein ganzes Vielfaches der Rotationszeit des Systems beträgt, so erhält man Bahnkurven, die denen der Klasse f (bzw. h) der periodischen Bahnen des „problème restreint" zum Verwechseln ähnlich sehen. Insbesondere werden die geradlinigen Bahnen des elliptischen Typs (Steig- und Fallbewegung mit endlicher Fallstrecke) zu Ejektionsbahnen, die sich der geometrischen Form nach von den Ejektionsbahnen der Klassen f und h nur unbedeutend unterscheiden. Überträgt man umgekehrt eine der Ejektionsbahnen dieser Klassen auf das absolute System (und Entsprechendes gilt mehr oder weniger auch für viele andere Typen von Ejektionsbahnen), so erhält man Fallbewegungen, die von einem Apozentrum in eine der beiden Massen führen und deren Bahnen von einer geraden Linie nur wenig abweichen.

Betrachten wir etwa die in Abb. 55a, S. 468, dargestellte Ejektionsbahn. Im nichtrotierenden System würde sich diese Bewegung als Fallbewegung folgender Art darstellen: Im Apozentrum A befindet sich der infinitesimale Körper auf der Apsidenlinie (der Verbindungslinie der beiden Massen) auf der μ zugewandten Seite in Ruhe. Läßt man ihn von dort aus fallen (eventuell mit einem kleinen Korrektionsimpuls in der y-Richtung), so wird er in die Masse m einstürzen, wenn die Fallzeit T gleich der halben Umlaufszeit der endlichen Massen in ihrer Kreisbewegung ist; denn dann ist ja die Masse m an der Stelle angelangt, die zu Beginn des Fallens von μ eingenommen wurde. Läßt man ihn aus weiterem Abstand fallen, so daß die Fallzeit gleich einem ganzen Umlauf ist, so wird er die Masse μ treffen. Allgemein wird, wenn T die Fallzeit und 2π die Umlaufszeit der Massen ist, bei Ejektionsbahnen $T = \nu\,\pi$ sein müssen ($\nu = 1, 2, \ldots$), und der Ejektionsort wird in m liegen, wenn ν ungerade, in μ, wenn ν gerade ist (das Umgekehrte gilt für Klasse g, in der m und μ ihre Rollen vertauschen). Nun ist aber nach Abschnitt 26 die Fallzeit in der geradlinigen Bewegung zweier Körper

$$T = \frac{\pi \sqrt{a^3}}{k \sqrt{M}},$$

wenn a die halbe Fallstrecke, M die attrahierende Masse und k die Gravitationskonstante ist. Ist nun wie oben x_0 die Abszisse des Apozentrums und nehmen wir an (um eine gewisse Annäherung an die hier zu erwartenden Verhältnisse zu erreichen), daß die beiden Massen im Koordinatenursprung vereinigt wären, so dürfen wir (mit den bei den Kopenhagener Rechnungen benutzten Einheiten)

$$a = \frac{1}{2} x_0; \quad k = 1; \quad M = m + \mu = 8$$

setzen, und es wird $T = {}^1/_8\,\pi\sqrt{x_0^3}$. Da aber andererseits $T = \nu\,\pi$ sein soll, ist

$$x_0^3 = 64\,\nu^2;\quad x_0 = 4\sqrt[3]{\nu^2} \tag{XIX; 59}$$

angenähert die Distanz im Apozentrum, die den Ejektionsbahnen ν-ter Ordnung entspricht. Natürlich bedeutet diese Rechnung nicht mehr und nicht weniger als eine Abschätzung, die aber um so genauer ausfallen wird, je größer ν ist; denn um so länger ist dann die Zeit, in der sich der Körper in sehr großer Entfernung von den attrahierenden Massen befindet und in der es daher ohne großen Fehler erlaubt sein wird, diese Massen als im Koordinatenanfang vereinigt anzusehen. In der Tat erhält man für $\nu = 1, 2, \ldots$

nach der Abschätzung (XIX; 59) $x_0 = 4.00;\ 6.35;\ \ldots,$

durch strenge Rechnung $x_0 = 4.65;\ 6.85;\ \ldots$

Schon in diesen ersten Zahlen tritt die Abnahme der Differenz zwischen strenger Rechnung und Abschätzung mit wachsendem ν zutage. Um auch den Zusammenhang zwischen C und x_0 abzuschätzen, benutzen wir Gleichung (XIX; 58):

$$C = 8\left(\frac{1}{x_0+1} + \frac{1}{x_0-1}\right) + x_0^2 - \dot{y}_0^2.$$

Für große x_0 wird

$$\frac{1}{x_0+1} + \frac{1}{x_0-1} = \frac{2x_0}{x_0^2-1} \approx \frac{2}{x_0}$$

und $\dot{y}_0 = -x_0$ (falls wir annehmen, daß im festen System der Planetoid im Apozentrum ruht). Es ist also für die Ejektionsbahnen genähert

$$C \approx \frac{16x_0}{x_0^2-1} \approx \frac{16}{x_0}, \tag{XIX; 60}$$

d.h., die charakteristische Kurve der Klasse f nähert sich mit wachsender Apozentrumsdistanz asymptotisch dem Grenzwert $C = 0$. Der Vergleich zwischen Rechnung und Abschätzung ergibt allerdings für kleine ν erhebliche Differenzen: Für $\nu = 1, 2, \ldots$ ist

abgeschätzt: $C = 3.61;\ 2.39;\ \ldots,$

streng: $C = 7.18;\ 5.96;\ \ldots$

Das liegt aber daran, daß (siehe Abb. 56) die Kurve $C(x_0)$ um die genäherte Kurve (XIX; 60) wellenartig schwankt und daß die den Ejektionsbahnen entsprechenden Punkte von der genäherten (nahezu hyperbelartigen) Kurve maximal nach oben abweichen, während die dazwischenliegenden Minima tief darunter liegen.

Auch die Doppelejektionsbahnen der Klasse c (Abschnitt 167, Abb. 54a–d) lassen sich auf fast geradlinige Fallbewegungen im absoluten Koordinatensystem zurückführen. Man sieht auch ohne Rechnung ein, daß die 1. Ejektionsbahn dieser Klasse (Abb. 54a) zustande kommt, wenn der infinitesimale Körper aus μ (in die m entgegengesetzte Richtung) ausgestoßen und (nach

Erreichen des Apozentrums) nach einem *halben* Umlauf der endlichen Massen auf m (das inzwischen dort angelangt ist, wo sich bei der Ejektion μ befunden hat) abstürzt. Danach wiederholt sich dasselbe Spiel mit vertauschten Massen, so daß der Planetoid abwechselnd von m und μ aufgefangen und der jeweils anderen Masse wieder zugespielt wird. Die Fallzeit beträgt also hier den vierten Teil der Umlaufsperiode 2π der endlichen Massen. Die 2. Ejektionsbahn (Abb. 54c) entsteht, wenn die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ejektionen anderthalb, die „Fallzeit" also dreiviertel Umlaufsperioden der endlichen Massen beträgt. Allgemein ist die Fallzeit $T = (\nu - {}^1/_2)\,\pi$ für die ν-te Ejektion.

Die periodischen Bahnen der Klassen f und h lassen sich in ihrer Entwicklung noch bequem überschauen und zeigen, wie die obige Zwischenbemerkung beweist, in dieser Hinsicht ein Verhalten, das dem der periodischen Bahnen der sonst ganz andersartigen Klasse c eng verwandt ist. Viel komplizierter und unübersichtlicher ist dagegen die Entwicklung der *rechtläufigen* Satellitenbahnen um eine der beiden endlichen Massen, also etwa um μ (der Klasse g, zu der die Klasse i der rechtläufigen Bahnen um m spiegelbildlich kongruent ist).

Die periodischen Bahnen der Klasse g haben schon sehr frühzeitig Beachtung gefunden, da ja gerade sie auch denjenigen Bahntyp einschließen, der bei den Satelliten der großen Planeten auftritt und daher in der Himmelsmechanik nicht nur rein mathematisches Interesse beansprucht. G. H. DARWIN[1]) hat bereits die erste Phase der Entwicklung dieser Klasse aus den infinitesimalen rechtläufigen Kreisbahnen um μ heraus durch numerische Integration verfolgt, allerdings für das Massenverhältnis $\mu : m = 1 : 10$, und er konnte die Rechnung bis in die Nähe einer Ejektionsbahn fortsetzen, ohne diese allerdings zu erreichen, da er die Möglichkeit der Regularisierung durch die THIELEsche Transformation nicht kannte. Ein merkwürdiges Nebenergebnis dieser Arbeit war die Entdeckung der Existenz zweier verschiedener „Familien" von rechtläufigen periodischen Satellitenbahnen, deren Mitglieder von gleicher Größenordnung der Ausdehnung, aber verschiedener Form und Periode waren. Die Kopenhagener, mit dem Massenverhältnis $1 : 1$ durchgeführten Untersuchungen haben dann gezeigt, daß diese „Familien" in Wirklichkeit der gleichen Klasse (g), aber verschiedenen Entwicklungsphasen angehören.

Die Entwicklung dieser Klasse selbst erwies sich als schwierig und mußte nach ziemlich weit vorgetriebenen Versuchen abgebrochen werden, da sich kein Gesetz abzeichnete, nach dem sie entweder asymptotisch einem erkennbaren Ziel zustrebt oder eventuell nach endlich vielen Phasen wieder in den Ausgangszustand zurückkehrt. Man muß also (bis diese Frage vielleicht einmal mit Hilfe der schnellen elektronischen Rechenverfahren auch numerisch entschieden werden kann) mit den Ergebnissen der funktionentheoretischen Untersuchungen von A. WINTNER[2]) zufrieden sein, der den mathematischen Beweis erbracht hat, daß jede Klasse (oder „Gruppe", wie WINTNER sie zu bezeichnen

---

[1]) G. H. DARWIN, On periodic orbits, Acta math. *21*, 101 (1897).
[2]) A. WINTNER, Math. Zeitschrift *34*, 321 (1931).

vorzieht) von periodischen Bahnen notwendig einen asymptotischen oder ringförmig-endlichen Abschluß haben muß. Es ist natürlich trotzdem möglich, daß ein solcher Abschluß, wenn auch vorhanden, doch nur über das „trostlose, weil endlose, Gebiet komplizierter Bahnen" erreichbar ist, ohne daß deutlich erkennbare Regeln als Wegweiser oder weithin sichtbare Landmarken die Orientierung erleichtern.

Abb. 57a zeigt die erste Entwicklungsphase der Klasse g, die vom Quellpunkt (dem Ort der Masse μ) aus über die kreisförmigen engen und mit großer Geschwindigkeit durchlaufenen Satellitenbahnen zu merkwürdig geformten

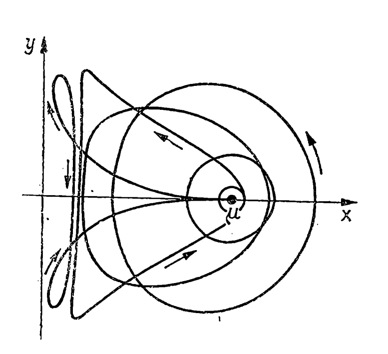


Abb. 57a. Periodische Bahnen der Klasse g

Erste Phase, rechtläufige Satelliten um μ mit abschließender Ejektionsbahn

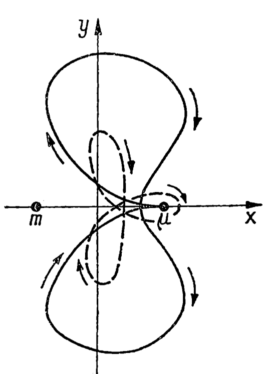


Abb. 57b. Klasse g

Zweite Phase, Dreischleifenbahnen (- - -) und abschließende Ejektionsbahn (——)

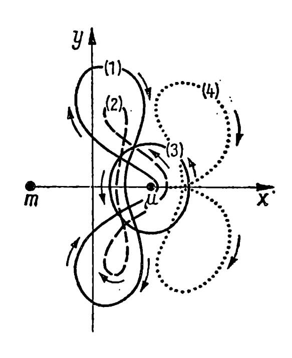


Abb. 57c. Klasse g

Dritte Phase, Bahnen mit zwei Schleifen (*1*, *2*) und Übergang zu einfach-periodischen Bahnen (*3*), Abschluß durch Ejektionsbahn (*4*) mit zwei Schleifen (punktiert)

Bahnen führen, die zunächst wie asymmetrische, auf der m zugewandten Seite abgeflachte Ovale gestaltet sind, dann aber an den Enden der Abflachung Spitzen (mit Nullgeschwindigkeit) bilden, um deren Örter bei fortschreitender Phase Schleifen entstehen. Inzwischen hat sich die Bahn auf der m abgewandten Seite eng um μ zusammengezogen, und es wird schließlich, als Abschluß der ersten Entwicklungsphase, eine Ejektionsbahn erreicht, in der die infinitesimale Masse aus μ in die Richtung auf m geschleudert wird und nach Durchlaufen der beiden Schleifen in μ zurückkehrt. In der zweiten Phase (Abb. 57b) bildet sich zunächst eine (nun retrograd durchlaufene) Schleife um μ, so daß nun eine Bahn mit drei Schleifen entstanden ist. Die beiden alten Schleifen lösen sich auf, die dritte um μ zieht sich zu einer zweiten Ejektionsbahn zusammen; danach entsteht erneut eine Zweischleifenbahn, bei der aber μ nun wieder in rechtläufigem Sinne umlaufen wird. Nach Auflösung dieser Schleifen (Abb. 57c) entsteht sodann eine Folge einfacher, ovalartiger, rechtläufiger Satellitenbahnen, die offenbar die zweite der DARWINschen „Familien" repräsentiert, aber bald erneut in Schleifenbahnen übergeht, die gegen eine dritte Ejektionsbahn (mit Ausstoß in Richtung der positiven x-Achse) streben. Die weitere Entwicklung der Klasse g führt erneut auf kompliziertere Bahnen und

läßt, wie gesagt, soweit sie bisher verfolgt werden konnte, keine einfachen Regeln erkennen.

Noch deutlicher als bei den Klassen f und g (bzw. h und i) ist der tiefgreifende Unterschied zwischen recht- und rückläufigen Bahnen bei denjenigen periodischen Bahnen ausgeprägt, die *beide* endlichen Massen umschließen. Die rückläufigen periodischen Bahnen (Klassen l und m) beginnen mit kreisförmigen Bahnen von sehr großem Radius, d.h. mit rechtläufigen Bewegungen um den unendlich fernen Punkt, die sich schließlich unter Deformation immer enger um die beiden Massen zusammenziehen. Alle diese Bahnen sind (für $\mu = m$) zu beiden Koordinatenachsen symmetrisch. Am einfachsten gestaltet ist die Klasse m (rückläufige Bahnen, die auch im festen System rückläufig sind). Die weiten Kreise ziehen sich zu ellipsenartigen Kurven mit gegen Null abnehmenden Achsenverhältnissen zusammen (Abb. 58). Die einzige Phase dieser Entwicklung schließt mit einer Doppelejektionsbahn ab, bei der die Bewegung auf der Strecke zwischen den beiden endlichen Massen vor sich geht. Diese Strecke wird, da sie im rotierenden System keinerlei Krümmung aufweist, in ihrer ganzen Ausdehnung mit unendlicher Geschwindigkeit hin und her durchlaufen; diese Abschlußbahn stellt daher trotz ihrer einfachen geometrischen Gestalt eine besonders tiefgreifende Singularität dar, über die hinaus keine analytische Fortsetzung mehr möglich ist.

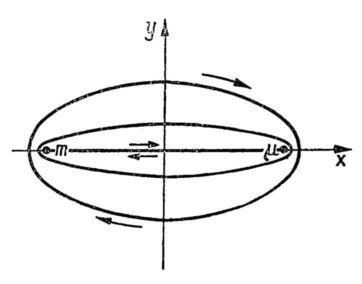


Abb. 58. Periodische Bahnen der Klasse m

Komplizierter sind die im festen System rechtläufigen Bahnen um beide Massen, also die Bahnen der Klassen k und l. Sie bilden auf der y-Achse (symmetrisch zur x-Achse) Spitzen und Schleifen, die schließlich mit immer zahlreicheren Verschachtelungen asymptotisch in L_4 und L_5 einmünden. Die Bahnen der Klasse l (rückläufig im rotierenden System) entquellen dem unendlich fernen Punkt und entwickeln sich, ähnlich wie die der Klasse m, über Kreisbahnen von sehr großem, aber stetig abnehmendem Radius zu engeren Bahnen von komplizierterer Form. Die auch im rotierenden System rechtläufigen Bahnen sind dagegen in ihrem Umfang beschränkt; denn da ihre Winkelgeschwindigkeit, bezogen auf das feste System, größer ist als die der endlichen Massen in ihrer Kreisbewegung, würde ja sonst die absolute Geschwindigkeit mit dem mittleren Abstand vom Koordinatenursprung über alle Grenzen wachsen. Wir erwähnen diese Klassen, deren weitere Entwicklung noch unübersichtlich geblieben ist, nur am Rande.

Wie schon weiter oben bemerkt, ist die Zahl der möglichen Klassen oder Gruppen periodischer Bahnen weit größer, als Überlegungen a priori, wie sie zu der STRÖMGRENschen Klassifizierung geführt haben, zunächst vermuten lassen. Die Tatsache, daß die charakteristischen Kurven mancher Klassen gemeinsame Schnitt-, Berührungs- oder Verzweigungspunkte haben, deutet schon darauf hin, daß es in der Umgebung solcher Stellen schwierig ist, die Zugehörig-

keit gewisser Bahnen zu der einen oder der anderen Klasse zu entscheiden. So gibt es periodische Bahnen, die gewissen Bahnen der Klasse c (den hantel- oder sanduhrförmigen Kurven der Abb. 54a, S. 466) sehr ähnlich sehen, aber ganz anderen Klassen angehören. Zum Beispiel gibt es innerhalb der Sonderklasse r eine Folge von symmetrisch zu beiden Achsen liegenden Bahnen, die in einem gewissen Entwicklungsstadium den hantelförmigen Kurven der Klasse c ähneln (ohne allerdings mit dieser Klasse auch tatsächlich eine spezielle Bahn gemeinsam zu haben), obwohl sie genealogisch einem ganz anderen Typ angehören. Auch die zur y-Achse unsymmetrische Bahnklasse n hat in einem gewissen Entwicklungsstadium große Ähnlichkeit mit jenen hantelförmigen Bahnen der Klasse c, aber ihre einzige symmetrische Bahn (in bezug auf die die ganze Gruppe spiegelbildlich-symmetrisch angeordnet ist) ist mit einer der c-Bahnen identisch. Die Klasse n gehört übrigens, ebenso wie die Klasse a, zu den ringförmig geschlossenen. Die Entwicklung pendelt zwischen zwei Grenzbahnen hin und her, die mit gewissen retrograden Satellitenbahnen um m bzw. μ identisch sind, und zwar mit denjenigen, die auch durch L_1 (den Koordinatenursprung) hindurchgehen. Die charakteristische Kurve der Klasse n hat also gemeinsame Punkte mit den charakteristischen Kurven der Klassen c, f und h.

169. *Asymptotische Bahnen*

In den vorigen Abschnitten haben wir über die hauptsächlichsten Typen periodischer Bahnen nach der STRÖMGRENschen Klassifizierung mehr oder weniger ausführlich berichtet. Nur die Klassen d und e fehlen in dieser Übersicht. Die Theorie der infinitesimalen Librationen um L_4 und L_5 (Abschnitt 116), mit denen ja jede Entwicklung dieser Klassen beginnen müßte, hat gelehrt, daß periodische Librationen dieser Art nur existieren, wenn das Verhältnis der endlichen Massen $\mu : m < 0.040064 \approx 1 : 25$ ist. Dann allerdings gibt es sogar zwei verschiedene Gruppen periodischer Bahnen, von denen die interessantere (die Familie d nach CHARLIER) sich bis zu einer asymptotisch in L_3 mündenden Grenzbahn verfolgen läßt und ihre analytische Fortsetzung in den L_3, L_4 und L_5 umschließenden „Transtrojanerbahnen" findet (Bahnen, die – obwohl einfach-periodisch – in der Kopenhagener Klassifizierung noch nicht berücksichtigt worden sind und deren inzwischen durch die Rechnungen von E. RABE gesicherte Existenz als ein Anzeichen dafür gelten kann, daß die Zahl der Klassen oder Gruppen periodischer Lösungen sehr viel größer ist, als Überlegungen a priori zunächst vermuten lassen).

Für das in den Kopenhagener Untersuchungen benutzte Massenverhältnis 1 : 1 ist die Existenzbedingung für periodische Librationen um die LAGRANGEschen Dreieckspunkte nicht erfüllt, gibt es also solche Bahngruppen wenigstens in der infinitesimalen Nachbarschaft dieser Punkte nicht. Ob dies allerdings auch für Bewegungen in ihrer weiteren Umgebung gültig ist, läßt sich hieraus kaum folgern. Erste Aufschlüsse, die zu einer Entscheidung dieser Frage führen könnten, dürfen wir erwarten, wenn wir untersuchen, was in unmittelbarer Nachbarschaft von L_4 geschieht, wenn das Massenverhältnis den kritischen Wert überschreitet.

Dort haben die Differentialgleichungen der Bewegung des Planetoiden (s. Abschnitt 116) die partikulären Lösungen $\xi = A\,e^{\lambda t}$, $\eta = B\,e^{\lambda t}$, wenn ξ, η die auf L_4 bezogenen rechtwinkligen Koordinaten im rotierenden System bedeuten und auf so kleine Beträge beschränkt bleiben, daß ihre Quadrate vernachlässigt werden dürfen. Die Eigenwerte λ, für die solche Lösungen existieren, ergeben sich als Wurzeln der biquadratischen Gleichung (XIII; 27) in der Form

$$\lambda^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-k},$$

wo $0 < k = 27\mu(1-\mu) \leqq {}^{27}/_4$ und $\mu, m = 1 - \mu$ die beiden endlichen Massen ($\mu \leqq {}^1/_2$) bedeuten. Es gibt also nur für $0 < k < 1$ ($\mu < \mu_0 \approx {}^1/_{26}$) reelle und dann immer negative λ^2, also rein imaginäre $\lambda = \pm i\,\nu$, die auf die infinitesimalen periodischen Lösungen der CHARLIERschen „Familien“ d und e (bzw. der STRÖMGRENschen Klasse d) führen. Für $k = 1$ ($\mu = \mu_0$) fallen diese beiden Familien (die kurz- und langperiodischen Librationen) zusammen, indem sich die lange Periode abnehmend, die kurze wachsend einem gemeinsamen Grenzwert $2\pi\sqrt{2}$ nähert. Ist schließlich $k > 1$, so wird

$$\lambda^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{k-1} = a(\cos\varphi \pm i\sin\varphi) = a\,e^{\pm i\varphi}$$

komplex, und es ist dann

$$\lambda = \pm\sqrt{a}\,e^{\pm i\varphi/2} = \pm\sqrt{a}\left(\cos\frac{\varphi}{2} \pm i\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \pm(\alpha \pm i\beta),$$

also

$$\alpha = \sqrt{a}\cos\frac{\varphi}{2}; \quad \beta = \sqrt{a}\sin\frac{\varphi}{2},$$

wo a und φ aus $a\cos\varphi = -{}^1/_2$, $a\sin\varphi = {}^1/_2\sqrt{k-1}$ folgen, d.h., es ist

$$a^2 = \frac{k}{4}, \quad a = \frac{1}{2}\sqrt{k}; \quad \tan\varphi = -\sqrt{k-1}.$$

Es gibt also im infinitesimalen Raum um L_4 nur Lösungen mit komplexen Eigenwerten λ, da für $1 < k < {}^{27}/_4$, d.h. $56°19'.1 \leqq \varphi/2 < 90°$, die Größen α und β stets positiv sind. Die allgemeine Lösung des Problems setzt sich also linear aus vier partikulären Lösungen zusammen, in denen λ je einen der vier komplexen Werte

$$-\alpha + i\beta; \quad -\alpha - i\beta; \quad \alpha + i\beta; \quad \alpha - i\beta$$

annimmt, hat also die Gestalt

$$\xi = e^{-\alpha t}(A_1\,e^{i\beta t} + A_2\,e^{-i\beta t}) + e^{\alpha t}(A_3\,e^{i\beta t} + A_4\,e^{-i\beta t}),$$
$$\eta = e^{-\alpha t}(B_1\,e^{i\beta t} + B_2\,e^{-i\beta t}) + e^{\alpha t}(B_3\,e^{i\beta t} + B_4\,e^{-i\beta t}).$$

Die Koeffizienten A_i, B_i sind im allgemeinen komplexe Größen, und die B_i werden durch die A_i (die als willkürliche Integrationskonstanten angesehen werden dürfen) durch die Beziehungen (XIII; 32)

$$B_i = A_i \frac{\lambda_i^2 - \Omega_{aa}}{2\lambda_i + \Omega_{ab}} \tag{XIX; 61}$$

mitbestimmt, wo (für L_4) $\Omega_{aa} = {}^3/_4$, $\Omega_{ab} = {}^3/_4 \sqrt{3}(1 - 2\mu)$ zu setzen ist.

Für $A_3 = A_4 = B_3 = B_4 = 0$ ergibt sich die spezielle Lösungsschar

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= e^{-\alpha t}[(A_1 + A_2)\cos\beta t + i(A_1 - A_2)\sin\beta t], \\ \eta &= e^{-\alpha t}[(B_1 + B_2)\cos\beta t + i(B_1 - B_2)\sin\beta t], \end{aligned}\right. \tag{XIX; 62}$$

woraus folgt, daß A_1 und A_2, ebenso B_1 und B_2, konjugiert komplex sein müssen, damit ξ, η reell sind.

Ist für $t = 0$, als Startzeit der numerischen Integration, $\xi = \xi_0, \eta = \eta_0$, so folgt aus (XIX; 62)

$$\xi_0 = A_1 + A_2; \quad \eta_0 = B_1 + B_2. \tag{XIX; 63}$$

Beschränken wir uns im folgenden auf das Massenverhältnis 1 : 1, d.h. setzen wir $\mu = {}^1/_2$, $k = {}^{27}/_4$, so wird $\Omega_{ab} = 0$, und man erhält aus (XIX; 61) mit $\lambda_1 = -\alpha + i\beta$, $\lambda_2 = -\alpha - i\beta$, $\lambda_1\lambda_2 = \alpha^2 + \beta^2 = a$

$$\left\{\begin{aligned} B_1 &= A_1 \frac{\lambda_1^2 - \frac{3}{4}}{2\lambda_1} = \frac{A_1}{2}\,\frac{a\lambda_1 - \frac{3}{4}\lambda_2}{a} = \\ &= \frac{A_1}{8a}[4a(-\alpha + i\beta) + 3(\alpha + i\beta)] = \\ &= \frac{A_1}{8a}[\alpha(3 - 4a) + i\beta(3 + 4a)] = A_1(u + iv), \\ B_2 &= A_2 \frac{\lambda_2^2 - \frac{3}{4}}{2\lambda_2} = \frac{A_2}{2}\,\frac{a\lambda_2 - \frac{3}{4}\lambda_1}{a} = \\ &= \frac{A_1}{8a}[-4a(\alpha + i\beta) + 3(\alpha - i\beta)] = \\ &= \frac{A_2}{8a}[\alpha(3 - 4a) - i\beta(3 + 4a)] = A_2(u - iv). \end{aligned}\right. \tag{XIX; 64}$$

Sind also A_1, A_2 konjugiert komplex, so folgt dasselbe für B_1, B_2.

Aus (XIX; 63) und (XIX; 64) bestimmt man A_1 und A_2 durch die Koordinaten ξ_0, η_0 des Startpunktes:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= A_1 + A_2, \\ \eta_0 &= (A_1 + A_2)\,u + (A_1 - A_2)\,i\,v \end{aligned}$$

und daher

$$2A_1 = \xi_0 + \frac{i}{v}(u\,\xi_0 - \eta_0),$$

$$2A_2 = \xi_0 - \frac{i}{v}(u\,\xi_0 - \eta_0),$$

$$2B_1 = \eta_0 + \frac{i}{v}[(u^2 + v^2)\,\xi_0 - u\,\eta_0],$$

$$2B_2 = \eta_0 - \frac{i}{v}[(u^2 + v^2)\,\xi_0 - u\,\eta_0].$$

Wählt man als Startpunkt der numerischen Integration einen Punkt $(0, \eta_0)$ auf der η-Achse nahe L_4, so erhält man als Lösungsschar mit der Zeit t als Parameter

$$\text{(XIX; 65)} \quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= e^{-\alpha t} \frac{\eta_0}{v} \sin\beta\, t \\ \eta &= e^{-\alpha t} \eta_0 \left(\cos\beta\, t + \frac{u}{v} \sin\beta\, t\right) \end{aligned} \right. \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} u &= \frac{\alpha}{8a}(3 - 4a), \\ v &= \frac{\beta}{8a}(3 + 4a). \end{aligned}$$

Mit $k = {}^{27}/_4$ erhält man für die numerischen Werte der Konstanten $\varphi, a, \alpha, \beta, u, v$

$$\varphi = 112^\circ\, 38'.2; \quad a = 1.2990,$$
$$\alpha = 0.62661; \quad \beta = 0.94842,$$
$$u = 0.13357; \quad v = 0.74800.$$

Die Bewegung führt spiralförmig in unendlich vielen Windungen in L_4 hinein. Die Zeit, in der eine Windung durchlaufen wird, ist konstant

$$T = \frac{2\pi}{\beta} = 6.625,$$

also etwas länger als die Umlaufszeit 2π der endlichen Massen. Nach jeder Spiralwindung verkürzt sich der Abstand von L_4 um den Faktor

$$e^{-\alpha T} = \frac{1}{65.86}.$$

Der Planetoid nähert sich also, wenn auch die Windungen langsam durchlaufen werden, dem Librationszentrum sehr rasch, ohne ihn aber in endlicher Zeit zu erreichen.

Eine zweite Schar infinitesimaler asymptotischer Bahnen erhält man, wenn man $A_1 = A_2 = 0$ setzt. Die Koordinaten ξ, η sind dann mit dem Faktor $e^{\alpha t}$ behaftet, die Bewegung führt also auf Spiralen aus L_4 heraus. Diese Bahnen sind zu den in L_4 hineinlaufenden spiegelbildlich-symmetrisch in bezug auf die η-Achse.

Alle nachstehenden Überlegungen gelten streng nur in der unmittelbaren Umgebung der Librationszentren. Ausgehend von Anfangsstücken nach

(XIX; 65) mit genügend kleinem η_0, lassen sich aber diese Bahnen durch numerische Integration beliebig weit ins Großräumige fortsetzen. Abb. 59 zeigt die Anfänge einer solchen aus L_4 herausführenden Schar von asymptotischen Bahnen. Die Kopenhagener Versuche haben gezeigt, daß es unter den

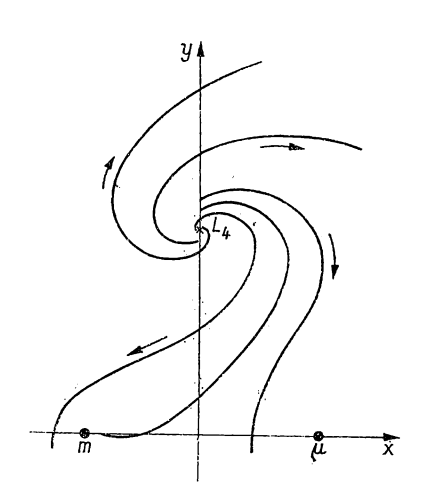


Abb. 59. Spiralförmig aus L_4 hervorgehende asymptotische Bahnen

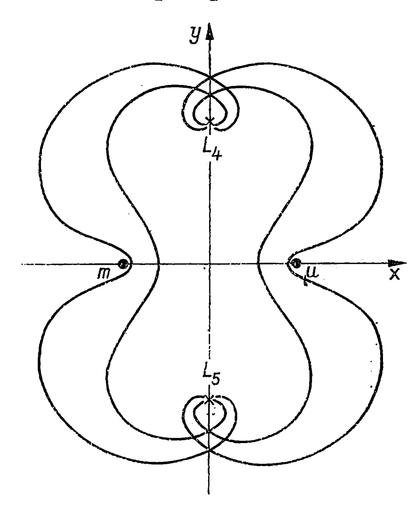


Abb. 60. Periodisch-asymptotische Bahnen (innere und äußere Grenzbahn der Klasse *r* periodischer Bahnen)

zahllosen asymptotischen Bahnen dieser Art auch *periodische* gibt, die schließlich wieder in L_4 zurückkehren, und andere, die L_4 und L_5 miteinander verbinden. Es gibt eine unübersehbare Anzahl solcher „periodisch-asymptotischen Bahnen". Diese sind teils symmetrisch zur y-Achse, zur x-Achse oder zu beiden Achsen, es gibt aber auch solche von ganz unsymmetrischer Gestalt. Diese periodisch-asymptotischen Bahnen lassen sich sehr häufig, wenn nicht immer, als Grenzbahnen gewisser Klassen von periodischen Bahnen auffassen. Als ein besonders eindrucksvolles Beispiel hierfür dient Abb. 60, in der zwei zu beiden Achsen symmetrische asymptotisch-periodische Bahnen gezeichnet sind, die L_4 und L_5 miteinander verbinden. Diese beiden Bahnen sind zugleich die Grenzbahnen, zwischen denen die rückläufigen und zu beiden Achsen symmetrisch verlaufenden periodischen Bahnen der Klasse *r* eingeschlossen sind, jene Bahnen, die (wie in Abschnitt 168 erwähnt wurde) große Ähnlichkeit mit den hantelförmigen Librationen um L_1 zeigen, ohne mit ihnen in Beziehung zu stehen.

Es gibt auch asymptotisch-periodische Bahnen, die in die kollinearen Librationszentren L_1, L_2, L_3 einmünden, nämlich die Grenzbahnen der Trojaner, der Transtrojaner und ihrer analytischen Fortsetzungen. Aber diese asymptotischen Bahnen nähern sich den Librationszentren nicht spiralförmig, sondern direkt mit gegen Null abnehmenden Ableitungen aller Ordnungen nach der Zeit.

Ihre Gleichungen im infinitesimalen Bereich haben also nicht exponentiell-periodische, sondern rein exponentielle Form, wie auch die CHARLIERsche Theorie lehrt.

170. *POINCARÉS Untersuchungen über periodische Bahnen*

Die Ergebnisse der Kopenhagener Untersuchungen über periodische und asymptotische Bahnen im eingeschränkten Dreikörperproblem haben durch mühsame systematisch durchgeführte Rechnungen ein vorher noch so gut wie unerforschtes Gebiet erschlossen und zu Einsichten geführt, die mit Hilfe mathematischer Analyse allein niemals hätten gewonnen werden können, jedenfalls nicht mit den Hilfsmitteln, die dem Mathematiker heute zur Verfügung stehen. Das Äußerste, was mit diesen Mitteln angestrebt werden kann, dürfte HENRI POINCARÉ in seinen berühmten Arbeiten über die periodischen und asymptotischen Lösungen des Dreikörperproblems erreicht haben, die einen breiten Raum in den „Méthodes nouvelles de la mécanique céleste" einnehmen. Während aber die Initiatoren der Kopenhagener Arbeiten sich bewußt (durch Wahl des Verhältnisses 1 : 1 der endlichen Massen) von jeder Beschränkung auf die im Planetensystem herrschenden besonders günstigen Verhältnisse distanziert haben, kann die theoretische Analyse sich von diesen die Allgemeinheit stark einschränkenden Voraussetzungen kaum frei machen: Auch ein so glänzender Mathematiker wie POINCARÉ konnte das Problem der periodischen Lösungen nur als *Störungsproblem* angreifen, d.h., er mußte sich auf den (für den praktischen Astronomen allerdings auch interessantesten, wenn nicht allein interessanten) Spezialfall beschränken, daß die Massen der beteiligten Planeten klein gegen die des Zentralkörpers (Sonne) sind.

Das Problem, das hier zu lösen ist, beschränkt sich also auch in seiner größten Allgemeinheit auf die Beantwortung spezieller Fragen wie diese: Ein System von Differentialgleichungen

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) = f_{i0} + \varepsilon f_{i1} + \varepsilon^2 f_{i2} + \cdots, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

das einen kleinen Parameter ε enthält, habe für $\varepsilon = 0$ eine partikuläre periodische Lösung mit der Periode T. *Gibt es dann auch für genügend kleine $\varepsilon > 0$ periodische Lösungen mit der gleichen Periode?* Diese Frage läßt sich bejahend beantworten, falls gewisse Voraussetzungen über die Form der Funktionen f_i sowie über die partikulären Anfangsbedingungen der Ausgangslösung ($\varepsilon = 0$) erfüllt sind. POINCARÉ unterscheidet dabei nach dem Grad der Schwierigkeit drei Gattungen solcher Lösungen:

a) Periodische Lösungen erster Gattung: Die Bahnen verlaufen in einer Ebene, und die ungestörten Bahnen sind Kreise.

b) Periodische Bahnen zweiter Gattung: Die Bahnen verlaufen in einer Ebene, die ungestörten Bahnen sind elliptisch.

c) Periodische Bahnen dritter Gattung: Die ungestörten Ausgangsbahnen sind elliptisch, ihre Ebenen sind gegeneinander geneigt.

Weitere Fragen tauchen auf, wenn man die Bedingung fallen läßt, daß die Periode T beim Übergang von $\varepsilon = 0$ auf $\varepsilon > 0$ unverändert bleiben soll.

POINCARÉ konnte zeigen, daß auch solche periodische Bahnen existieren, bei denen T in $T(1 + \nu)$ übergeht, wo ν eine Größe von der Ordnung ε ist.

Um möglichst allgemeine Bedingungen festzulegen, die bei himmelsmechanischen Problemen dieser Art erfüllbar sind, nehmen wir an, daß ein System von kanonischen Differentialgleichungen

$$\text{(XIX; 66)} \qquad \dot{x}_i = \frac{\partial F}{\partial y_i}; \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial F}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

vorliegt, daß die HAMILTONsche Funktion

$$\text{(XIX; 67)} \qquad F = F_0 + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \cdots$$

nach Potenzen eines Parameters ε in eine für genügend kleines ε rasch konvergente Potenzreihe entwickelbar ist und daß F_0 nur von den x_i abhängt, während die übrigen F_i auch die y_i enthalten, und zwar in Form periodischer Funktionen der y_i mit der Periode 2π. Diese letztere Bedingung bedeutet, daß die y_i Winkelgrößen sind, die als Argumente trigonometrischer Funktionen auftreten.

Wenn diese Voraussetzungen erfüllt sind, lassen sich die Gleichungen (XIX; 66) für $\varepsilon = 0$ sofort integrieren. Sie gehen dann ja in

$$\text{(XIX; 68)} \qquad \dot{x}_i = \frac{\partial F_0}{\partial y_i} = 0; \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial F_0}{\partial x_0}$$

über. Diese ergeben aber

$$\text{(XIX; 69)} \qquad \begin{cases} x_i = a_i = \text{const} \quad \text{und daher auch} \\ \dfrac{\partial F_0}{\partial x_i} = -n_i = \text{const}, \quad \text{woraus mit } b_i = \text{const auch} \\ y_i = n_i t + b_i \end{cases}$$

folgt. Da die n_i Funktionen der a_i sind, liefert die Mannigfaltigkeit der a_i, b_i alle partikulären Lösungen des „ungestörten" Problems (XIX; 68).

In dieses Schema lassen sich, durch geeignete Wahl des Koordinatensystems und der Variablen, alle speziellen Vorgänge, auf die sich die POINCARÉschen Untersuchungen über die periodischen Lösungen des Dreikörperproblems beziehen, bequem einordnen. So könnte man z.B. das kanonische System (XIX; 66) speziell durch die Differentialgleichungen für die gestörten DELAUNAYschen Elemente in einem JACOBIschen Koordinatensystem ersetzen. Beschränken wir uns in der Folge auf das *ebene* Dreikörperproblem, was bei den Untersuchungen über die periodischen Lösungen erster und zweiter Gattung genügen würde, so erhält man nach (XVI; 6) ein kanonisches System achter Ordnung:

$$\text{(XIX; 70)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial l}, \quad \dfrac{dG}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial g}; \quad \dfrac{dL'}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial l'}, \quad \dfrac{dG'}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial g'}, \\ \dfrac{dl}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial L}, \quad \dfrac{dg}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial G}; \quad \dfrac{dl'}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial L'}, \quad \dfrac{dg'}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial G'}. \end{cases}$$

Hierin sind, wenn

$$a, \; p = a(1 - e^2), \; M = n(t - t_0), \; \omega; \quad a', p', M', \omega'$$

die ebenen Bahnelemente der beiden Planeten mit den Massen m und m' bedeuten, nach (XVI; 7)

$$\text{(XIX; 71)} \quad \begin{cases} L = \sigma\sqrt{a}, & G = \sigma\sqrt{p}; \quad L' = \sigma'\sqrt{a'}, \quad G' = \sigma'\sqrt{p'}, \\ l = M, & g = \omega; \quad l' = M', \quad g' = \omega' \end{cases}$$

die DELAUNAYschen Elemente, und es ist, wenn die Zeiteinheit so gewählt wird, daß die Gravitationskonstante $k = 1$ ist,

$$\text{(XIX; 71a)} \quad F = \frac{\sigma^4}{2\mu L^2} + \frac{\sigma'^4}{2\mu' L'^2} + m\,m'\left\{\frac{1}{\varrho} - \frac{x\,x' + y\,y'}{r'^3}\right\} + \cdots$$

bis auf Glieder von höherer als zweiter Ordnung in den kleinen Massen m und m' die HAMILTONsche Funktion des Systems. Dabei ist, wenn die Sonnenmasse gleich 1 gesetzt wird, nach (XV; 60a)

$$\mu = \frac{m}{1 + m}; \quad \mu' = \frac{m'(1 + m)}{1 + m + m'},$$

$$\varkappa^2 = 1 + m; \quad \varkappa'^2 = \frac{1 + m + m'}{1 + m}$$

und [siehe S. 248 und (XVI; 9)]

$$\sigma = \mu\varkappa = \frac{m}{\sqrt{1 + m}}; \quad \sigma' = \mu'\varkappa' = m'\sqrt{\frac{1 + m}{1 + m + m'}}.$$

Setzt man $m = \gamma\,\varepsilon$, $m' = \gamma'\varepsilon$, wo γ, γ' zwei Zahlen kleiner oder gleich 1 sind, so kann man (s. auch Abschnitt 130) den Faktor ε aus $\sigma, \sigma', \mu, \mu'$ (und damit aus den Variablen L, L', G, G') und aus F herausdividieren. Dadurch erhält man auch hier F in der Form (XIX; 67) als eine Potenzreihe nach ε.

Da

$$F_0 = \frac{\sigma^4}{2\mu L^2} + \frac{\sigma'^4}{2\mu' L'^2}$$

nur von L, L' abhängt, gehen für $\varepsilon \to 0$ die Variablen L, G, g und L', G', g' in die konstanten Elemente der ungestörten Bahnen über, die zwei masselose Planeten um die Sonne beschreiben würden, wenn keine weiteren Körper störende Kräfte ausüben. Für die mittleren Anomalien l, l' ergibt sich dagegen in den ungestörten Bahnen

$$\text{(XIX; 71b)} \quad \begin{cases} n = \dfrac{dl}{dt} = -\dfrac{\partial F_0}{\partial L} = \dfrac{\sigma^4}{\mu L^3} = \dfrac{\sigma}{\mu} a^{-3/2} = a^{-3/2}\sqrt{1 + m} = \varkappa a^{-3/2}, \\ n' = \dfrac{dl'}{dt} = -\dfrac{\partial F_0}{\partial L'} = \dfrac{\sigma'^4}{\mu L'^3} = \dfrac{\sigma'}{\mu'} a'^{-3/2} = \\ \quad = a'^{-3/2}\sqrt{\dfrac{1 + m + m'}{1 + m}} = \varkappa' a'^{-3/2}. \end{cases}$$

Das sind die mittleren Bewegungen in JACOBIschen Koordinaten, wenn die Masse m sich in einer Ellipse um die Sonne als Brennpunkt, die Masse m' aber um den Schwerpunkt m–Sonne bewegt.

Die Lösungen für $\varepsilon = 0$ haben also genau die Form (XIX; 69), wenn die x_i die DELAUNAYschen Elemente der ersten Zeile (XIX; 71), die y_i die Winkelgrößen der zweiten Zeile bezeichnen; nur sind auch die g, g' konstant, d.h., für sie ist $n_i = 0$. Würde man aber auf ein Koordinatensystem übergehen, das sich gegen das absolute System mit konstanter Winkelgeschwindigkeit dreht, so würden auch dg/dt und dg'/dt von Null verschiedene Konstanten sein, und man erhielte, wie in (XIX; 69), für alle Winkelgrößen y_i lineare Funktionen der Zeit.

In Abschnitt 134 haben wir gezeigt, daß die Terme höherer Ordnung der HAMILTONschen Funktion F, die Störungsglieder $F_1, F_2, \ldots$ erster, zweiter und höherer Ordnung, periodische Funktionen der mittleren Anomalien l, l' mit der Periode 2π sind. Auch hierin erfüllt also das durch (XIX; 70) gegebene Problem der (ebenen) Dreikörperbewegung die Bedingungen, die wir oben allgemeiner formuliert hatten. Wir dürfen also diese Ansätze weiter benutzen und sicher sein, daß alle daraus abgeleiteten Folgerungen auch für das Dreikörperproblem verbindlich sind.

Es sei also für $\varepsilon = 0$

$$x_i = a_i; \quad y_i = n_i t + b_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{XIX; 72}$$

eine partikuläre periodische Lösung der Gleichungen (XIX; 66) mit der Periode T, was immer der Fall ist, wenn

$$n_i T = 2\pi k_i \quad (k_i \text{ ganz}) \text{ für alle } i$$

ist; denn dann wachsen ja alle y_i um ganze Vielfache von 2π, wenn t um T (oder ganze Vielfache von T) wächst.

Wir fragen nun, ob und unter welchen Bedingungen auch für genügend kleines $\varepsilon > 0$ periodische Lösungen von der Periode T existieren. Diese Lösungen werden voraussichtlich Anfangsbedingungen (für $t = 0$) haben, die von den Anfangsbedingungen des ungestörten Problems,

$$x_i(0) = a_i; \quad y_i(0) = b_i$$

ein wenig verschieden sind, für $\varepsilon \to 0$ aber in diese übergehen. Es ist daher vernünftig, für die Lösung von (XIX; 66) den Ansatz

$$x_i = a_i + \alpha_i + \varphi_i(t); \quad y_i = n_i t + b_i + \beta_i + \psi_i(t) \tag{XIX; 73}$$

zu versuchen, wo α_i, β_i neue Konstante von der Ordnung ε sind, die für $\varepsilon \to 0$ verschwinden, und wo $\varphi_i(t), \psi_i(t)$ Funktionen von ε und der Zeit t bedeuten, die für $t \to 0, \varepsilon \to 0$ verschwinden. Dann sind also

$$x_i(0) = a_i + \alpha_i; \quad y_i(0) = b_i + \beta_i \tag{XIX; 74}$$

die neuen Anfangsbedingungen, die offenbar dann und nur dann auf eine periodische Lösung der verlangten Art führen, wenn die Funktionen φ_i, ψ_i periodisch mit der Periode T sind, wenn also insbesondere die Bedingungen

$$\text{(XIX; 75)} \qquad \varphi_i(T) = \varphi_i(0) = 0; \quad \psi_i(T) = \psi_i(0) = 0$$

erfüllt sind. Offenbar gelten, wie Differentiation von (XIX; 73) nach der Zeit beweist, für diese Funktionen die Differentialgleichungen

$$\dot{\varphi}_i = \dot{x}_i = \frac{\partial F}{\partial y_i}; \quad \dot{\psi}_i = \dot{y}_i - n_i = -\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + n_i\right),$$

so daß man, da φ_i und ψ_i für $t = 0$ verschwinden, auch

$$\text{(XIX; 76)} \qquad \varphi_i = \int_0^t \frac{\partial F}{\partial y_i} dt; \quad \psi_i = -\int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i} dt - n_i t$$

schreiben kann.

Entwickelt man nun die Integranden von (XIX; 76) in Potenzreihen nach ε, so ergibt sich zunächst, da F_0 von den y_i nicht abhängt,

$$\text{(XIX; 77)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_i} &= \frac{\partial F_0}{\partial x_i} + \varepsilon \frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \varepsilon^2 \frac{\partial F_2}{\partial x_i} + \cdots, \\ \frac{\partial F}{\partial y_i} &= \qquad\quad \varepsilon \left[\frac{\partial F_1}{\partial y_i} + \varepsilon \frac{\partial F_2}{\partial y_i} + \cdots\right]. \end{aligned} \right.$$

Entwickelt man ferner die partiellen Ableitungen auf den rechten Seiten von (XIX; 77) von dem ungestörten Zustand ($t = 0, \varepsilon = 0$) aus in TAYLORsche Reihen, die nach Potenzen der Zusätze $\alpha_i + \varphi_i$ bzw. $\beta_i + \psi_i$ (die ja von der Ordnung ε sind) fortschreiten, so erhält man, bis zu Gliedern von der Ordnung ε,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0}{\partial x_i} &= \left(\frac{\partial F_0}{\partial x_i}\right)_0 + \sum_{j=1}^n [\alpha_j + \varphi_j(t)] \left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 + \cdots, \\ \varepsilon \frac{\partial F_1}{\partial x_i} &= \varepsilon \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}\right)_0 + \cdots, \\ \frac{\partial F_1}{\partial y_i} &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_i}\right)_0 + \sum_{j=1}^n [\alpha_j + \varphi_j(t)] \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_i \partial x_j}\right)_0 + \\ &\quad + \sum_{j=1}^n [\beta_j + \psi_j(t)] \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_i \partial y_j}\right)_0 + \cdots, \\ \varepsilon \frac{\partial F_2}{\partial y_i} &= \varepsilon \left(\frac{\partial F_2}{\partial y_i}\right)_0 + \cdots. \end{aligned}$$

Integriert man nun zwischen 0 und T und bedenkt, daß wegen (XIX; 75)

$$\varphi_i(T) = \int_0^T \frac{\partial F}{\partial y_i} dt = 0; \quad -\psi_i(T) = \int_0^T \frac{\partial F}{\partial x_i} dt + n_i T = 0$$

und gemäß (XIX; 69)

$$\left(\frac{\partial F_0}{\partial x_i}\right)_0 = -n_i$$

ist und auch die zweiten partiellen Ableitungen $(\partial^2 F_0/\partial x_i\, \partial x_j)_0$ Konstante sind, so folgt, bis auf Glieder höherer Ordnung in ε,

(XIX; 78) $$-\psi_i(T) = 0 = \sum_{j=1}^{n} \left[\alpha_j T + \int_0^T \varphi_j(t)\, dt\right] \left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial x_i\, \partial x_j}\right)_0 + \varepsilon \int_0^T \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}\right) dt,$$

(XIX; 79)

$$\frac{1}{\varepsilon}\varphi_i(T) = 0 = \int_0^T \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_i}\right)_0 dt + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_0^T \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_i\, \partial x_j}\right)_0 dt + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \int_0^T \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_i\, \partial y_j}\right)_0 dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_0^T \left[\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_i\, \partial x_j}\right)_0 \varphi_j(t) + \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_i\, \partial y_j}\right)_0 \psi_j(t)\right] dt + \varepsilon \int_0^T \left(\frac{\partial F_2}{\partial y_i}\right)_0 dt.$$

Das sind, wenn wir die Glieder höherer Ordnung in $\varepsilon, \alpha_i, \beta_i$ vernachlässigen dürfen, $2n$ lineare Gleichungen für die $2n$ Größen $\alpha_i(\varepsilon), \beta_i(\varepsilon)$, durch welche die Anfangsbedingungen für eine periodische Lösung festgelegt werden. Die Gleichungen (XIX; 78) ($\psi_i = 0$) ergeben die α_i als Funktionen von ε und den über Ausdrücke der ungestörten Bewegung erstreckten Integralen. In den Gleichungen (XIX; 79) ($\varphi_i/\varepsilon = 0$) ist dann unter dem vierten Integralzeichen rechts genau genug

$$\varphi_i(t) = \varepsilon \int_0^t \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_i}\right)_0 dt,$$

$$\psi_i(t) = -\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial x_i\, \partial x_j}\right)_0 \left[\alpha_j(t) + \varepsilon \int_0^t\!\!\int_0^t \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_i}\right)_0 dt^2\right] - \varepsilon \int_0^t \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}\right)_0 dt$$

zu setzen. Hat man also die α_i aus dem System (XIX; 78) bestimmt, so kann man die Ergebnisse in (XIX; 79) verwerten und erhält dann lineare Gleichungen für die β_i.

Das System (XIX; 78) ist immer und eindeutig lösbar, wenn die Funktionaldeterminante

(XIX; 80) $$\left|\left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial x_i\, \partial x_j}\right)_0\right| \neq 0$$

ist. Damit das System (XIX; 79) lösbar ist, muß auch die Funktionaldeterminante

(XIX; 81) $$\left|\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_i\, \partial y_j}\right)_0\right| \neq 0$$

sein. Das genügt aber noch nicht. Es wird ja verlangt, daß die β_i Funktionen von ε sind und mit ε verschwinden. Das ist aber offensichtlich nur dann der Fall, wenn auch

$$\int_0^T \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_i}\right)_0 dt$$

von der Ordnung ε ist und daher für $\varepsilon \to 0$ verschwindet. Da aber der Integrand nur von den Elementen der ungestörten Bewegung abhängt, also weder ε noch mit ε verschwindende Größen enthält, bleibt nichts anderes übrig als zu fordern, daß diese Integrale identisch verschwinden. Neben den Ungleichungen (XIX; 80) und (XIX; 81) müssen also als Bedingungen für die Existenz periodischer Lösungen auch die Gleichungen

$$\text{(XIX; 82)} \qquad \int_0^T \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_i}\right)_0 dt = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllt sein. Ist dies der Fall, so liefern die Gleichungen (XIX; 78) und (XIX; 79) eindeutig die Anfangsbedingungen (XIX; 74) einer periodischen Lösung, die für $\varepsilon \to 0$ in die periodische Lösung (XIX; 72) des ungestörten Problems übergeht und mit ihr tautochron ist.

Die Gleichungen (XIX; 82) enthalten lediglich Elemente der ungestörten Ausgangsbahnen. Sie bedeuten also, daß diese Elemente nicht beliebig gewählt werden dürfen, sondern daß gewisse Bedingungen zwischen ihnen erfüllt sein müssen, damit die Ausgangsbahnen als Grenzfälle $\varepsilon \to 0$ periodischer Lösungen des Systems (XIX; 66) gelten können. Man kann diesen Bedingungen auch noch eine andere Form geben, die ihnen eine interessante geometrische Bedeutung verleiht. Es sei

$$J = \frac{1}{T} \int_0^T (F_1)_0 \, dt$$

der zeitliche Mittelwert der für $\varepsilon = 0$ genommenen Funktion F_1. Dann lassen sich die Gleichungen (XIX; 82) auch

$$\text{(XIX; 83)} \qquad \frac{\partial J}{\partial y_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

schreiben, d.h., sie bedeuten, daß J als Funktion der y_i ein Extremum (Maximum oder Minimum) sein muß.

Zum Abschluß dieser allgemeinen, die periodischen Lösungen eines Systems kanonischer Differentialgleichungen betreffenden Überlegungen müssen noch zwei zusätzliche Bemerkungen gemacht werden, die bei der Anwendung auf das Dreikörperproblem Beachtung verlangen:

1. Es ist möglich, daß das System (XIX; 66) allgemeine Integrale besitzt, d.h., daß es Beziehungen in geschlossener, meist algebraischer Form

$$\Phi_k(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n) = C_k = \text{const} \tag{XIX; 84}$$

gibt, die für alle Zeiten gelten. So hat z.B. das kanonische System (XIX; 66) immer das Integral

$$F = C,$$

wenn die HAMILTONsche Funktion F die Zeit t nicht explizite enthält. Im ebenen Dreikörperproblem existiert als weiteres Integral der Impulsmomentensatz, und im räumlichen Dreikörperproblem gibt es deren sogar drei, also insgesamt vier allgemeine Integrale. Schließlich kennt man im „problème restreint", das als Sonderfall des ebenen Problems wichtig ist, als einzige Beziehung dieser Art das JACOBIsche Integral, wenn wir von den beiden (trivialen) Integralen absehen, die die Kreisbewegung der beiden endlichen Massen bestimmen.

Angenommen nun, es bestehen s Beziehungen (XIX; 84), so liefert jede von ihnen eine für jeden Wert von t erfüllte Gleichung zwischen den φ_i und ψ_i. Setzen wir also für $t = 0$ und $t = T$

$$\varphi_i(0) = \psi_i(0) = 0; \quad \varphi_i(T) = \varphi_i, \quad \psi_i(T) = \psi_i,$$

so liefert das System

$$\Phi_k(T) - \Phi_k(0) = 0 \tag{XIX; 85}$$

s Beziehungen zwischen den $2n$ Größen $\varphi_i(T), \psi_i(T)$, mit deren Hilfe s von ihnen durch die übrigen ausgedrückt werden können. Sind etwa

$$\chi_i(T) = \chi_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

diese s Größen, so lassen sich diese als Funktionen von $\chi_{s+1}, \ldots, \chi_{2n}$ bestimmen, sofern nur die Funktionaldeterminante

$$\left|\frac{\partial \Phi_i}{\partial \chi_j}\right|, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, s)$$

nicht verschwindet. Insbesondere wird es möglich sein, wenn (wie im Falle des ebenen Dreikörperproblems) zwei Integrale $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2$ existieren, die beiden Größen φ_1, φ_2 zu eliminieren, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_1} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_2} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi_1} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi_2} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Die Bedingungen (XIX; 75) reduzieren sich dann auf die sechs Gleichungen

$$\varphi_3(T) = \varphi_4(T) = \psi_1(T) = \psi_2(T) = \psi_3(T) = \psi_4(T) = 0,$$

die an Stelle der ursprünglichen acht Beziehungen dieses Problems treten. Auch jetzt wird die vierreihige Determinante (XIX; 80), die eine Funktion

der vier Variablen $x_1, \ldots, x_4$ ist, von Null verschieden sein müssen, doch genügt es jetzt, dies für die zweireihige Determinante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F_0}{\partial x_3^2} & \dfrac{\partial^2 F_0}{\partial x_3 \partial x_4} \\ \dfrac{\partial^2 F_0}{\partial x_4 \partial x_3} & \dfrac{\partial^2 F_0}{\partial x_4^2} \end{vmatrix} (\varepsilon = 0)$$

nachzuweisen; denn wenn diese nicht verschwindet, folgen α_3, α_4 aus den Gleichungen $\varphi_3 = \varphi_4 = 0$, während α_1, α_2 dann aus den beiden bekannten Integralen folgen.

2. Die bisherigen Überlegungen bedürfen unter Umständen einer Modifikation. Es wurde oben angenommen, daß F_0 eine Funktion der n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ sei. Es kommt aber vor, daß F_0 einige der x_i (etwa $x_{r+1}, \ldots, x_n$) nicht enthält. Das ist z.B. im Dreikörperproblem der Fall. Sind etwa, wie in (XIX; 71),

$$x_1 = L; \quad x_2 = L'; \quad x_3 = G; \quad x_4 = G'$$

die vier x-Variablen des ebenen Dreikörperproblems (XIX; 70), so ist $F_0 = F_0(x_1, x_2)$ von x_3 und x_4 unabhängig. In diesem Fall haben von den Entwicklungen (XIX; 77) nur die für x_1, x_2 ein von ε freies Glied, und die beiden Gleichungen für die partiellen Ableitungen von F nach x_3, x_4 haben demnach die gleiche Form wie die für die Ableitungen nach den y_i. Alle Überlegungen, die für diese gelten, müssen also auch auf jene übertragen werden. Insbesondere treten anstatt $\psi_3(T) = \psi_4(T) = 0$ die Bedingungen

$$\frac{1}{\varepsilon}\psi_3(T) = \frac{1}{\varepsilon}\psi_4(T) = 0$$

auf, und außer den Gleichungen (XIX; 82) müssen daher auch die Gleichungen

$$\int_0^T \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3}\right)_0 dt = \int_0^T \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_4}\right)_0 dt = 0$$

bzw. außer (XIX; 83) die weiteren

$$\frac{\partial J}{\partial x_3} = \frac{\partial J}{\partial x_4} = 0$$

erfüllt sein.

171. *Periodische Lösungen erster Gattung*

Um die Anwendung der im vorigen Abschnitt entwickelten Theorie wenigstens an einem konkreten Beispiel zu zeigen, wählen wir den einfachsten Fall: die periodischen Lösungen erster Gattung, d. h. periodische Lösungen des ebenen planetaren Dreikörperproblems (Sonne und zwei Planeten mit den kleinen Massen $m = \gamma\,\varepsilon$, $m' = \gamma'\varepsilon$), die für $\varepsilon \to 0$ in Kreisbahnen übergehen und deren

Periode T gleich der synodischen Umlaufszeit jenes Paares von Kreisbewegungen ist. Wir fragen also: Gibt es für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ solche Lösungen? An welche Voraussetzungen ist ihre Existenz gebunden? Welche Anfangsbedingungen führen auf solche Lösungen?

Im Abschnitt 162 haben wir gezeigt, daß zwei ungestörte Kreisbahnen, die in der gleichen Ebene verlaufen, immer ein periodisches System darstellen. Sind, wenn die Gravitationskonstante $k = 1$ gesetzt wird,

$$n = a^{-3/2}; \quad n' = a'^{-3/2}$$

die mittleren (und wahren) Winkelgeschwindigkeiten der beiden Kreisbewegungen, a und a' die Halbmesser der Kreisbahnen von m und m' und nehmen wir noch an, daß die Kreisbahn von m' diejenige von m umschließt, also $a < a'$, $n > n'$ ist, so hat die Bewegung des ungestörten Systems die Periode (synodische Umlaufszeit)

$$T = \frac{2\pi}{n - n'}.$$

Wenn wir außerdem noch fordern, daß $n - n'$ eine Größe nullter Ordnung, also nicht klein von der Ordnung ε ist, dann ist T beschränkt und der Fall einer sehr nahen Begegnung der beiden Planeten ausgeschlossen.

Nach Ablauf der Periode T ist die Längendifferenz $\lambda - \lambda'$ der beiden Planeten um 2π angewachsen. Wir können die Zeitskala und die Anfangsrichtung der Längenzählung immer so wählen, daß für $t = 0$ auch $\lambda(0) = \lambda'(0) = 0$ ist, d.h. für $t = 0$ eine Konjunktion der beiden Planeten bei der Länge $\lambda = 0$ stattfindet. Zur Zeit $t = T$ wird sich dann, im allgemeinen bei einer anderen Länge, wiederum eine Konjunktion ereignen.

Wir betrachten nun benachbarte Lösungen, für die $\varepsilon > 0$ ist, d.h. die Massen $m = \gamma\,\varepsilon$, $m' = \gamma'\varepsilon$ von der Ordnung ε sind, und die für $\varepsilon \to 0$ in die oben definierten Kreisbahnlösungen übergehen. Die oskulierenden Bahnen dieser „gestörten" Bewegungen werden dann Ellipsen sein, deren Elemente mit der Zeit t der Oskulation schwach veränderlich sind und deren Exzentrizitäten e, e' klein von der Ordnung ε sein werden. Diese Lösungen sind dann und nur dann periodisch mit der Periode T, wenn die Konfiguration der drei Körper und deren zeitliche Änderung für $t = 0$ und $t = T$ dieselben sind. Das ist aber immer der Fall, wenn die drei Seiten r, r' und ϱ des Massendreiecks und ihre Differentialquotienten nach der Zeit für $t = 0$ und $t = T$ die gleichen Werte annehmen.

In der oskulierenden Bahn von m ist nach (VII; 64)

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} P_i\, e^i \cos i M,$$

wo die P_i nach geraden Potenzen von e fortschreitende Reihen bedeuten. Außerdem kann man die Größen $e^i \cos iM$, $e^i \sin iM$ durch homogene Ausdrücke darstellen, die Potenzen von

$$p = e \cos M; \quad q = e \sin M$$

enthalten; denn es ist ja

$$\cos iM = \cos^i M - \binom{i}{2}\cos^{i-2}M\sin^2 M + \binom{i}{4}\cos^{i-4}M\sin^4 M - \cdots,$$

$$\sin iM = \binom{i}{1}\cos^{i-1}M\sin M - \binom{i}{3}\cos^{i-3}M\sin^3 M + \cdots,$$

also

$$e^i\cos iM = p^i - \binom{i}{2}p^{i-2}q^2 + \binom{i}{4}p^{i-4}q^4 - \cdots,$$

$$e^i\sin iM = \binom{i}{1}p^{i-1}q - \binom{i}{3}p^{i-3}q^3 + \binom{i}{5}p^{i-5}q^5 - \cdots.$$

Da außerdem $e^2 = p^2 + q^2$ ist, folgt unmittelbar, daß r/a in eine nach Potenzen von p und q fortschreitende Reihe entwickelt werden kann. Das gleiche gilt für r' als Funktion von a' und

$$p' = e'\cos M'; \quad q' = e'\sin M'.$$

Die dritte Seite (ϱ) des von den drei Massen gebildeten Dreiecks ist durch

$$\varrho^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi$$

gegeben, wenn $\varphi = l - l'$ den Winkel bei der Sonne, also die Differenz der wahren Längen der beiden Planeten, bedeutet. Es ist aber

$$l = \tilde{\omega} + v = \lambda + v - M,$$

wenn λ die mittlere Länge, v die wahre und M die mittlere Anomalie in der oskulierenden Bahn bezeichnet. Nun ist aber nach (VII; 66) die „Mittelpunktsgleichung" durch eine Reihenentwicklung der Form

$$v - M = \sum_{i=1}^{\infty} Q_i\, e^i \sin iM$$

darstellbar, wobei die Q_i nach geraden Potenzen von e fortschreitende Reihen bezeichnen. Man kann daher $v - M$ nach Potenzen von p und q entwickeln. Setzt man auch

$$l' = \tilde{\omega}' + v' = \lambda' + v' - M',$$

so folgt

$$\varphi = l - l' = \lambda - \lambda' + \langle\text{Potenzreihe nach } p, q, p', q'\rangle,$$

und man erkennt leicht, daß auch ϱ nach Potenzen von p, q, p' und q' entwickelbar ist, mit Koeffizienten, die Funktionen von a und a' sind und außerdem periodische Funktionen von $\lambda - \lambda'$ enthalten, deren Periode 2π ist. Da die HAMILTONsche Funktion F nur von r, r' und ϱ abhängt, gilt dasselbe auch für sie.

Schließlich kann man das gleiche auch für die Ableitungen $\dot{r}$, $\dot{r}'$, $\dot{\varrho}$ beweisen, die (s. Abschnitt 127) in der gestörten Bahn in jedem Augenblick dieselben Werte haben wie in der oskulierenden. In dieser ist aber nach (VII; 50)

$$\dot{r} = \frac{e}{\sqrt{p}}\cos v = \frac{1}{\sqrt{p}}\left\{2(1 - e^2)\sum_{i=1}^{\infty} J_i(i\,e)\cos iM - e^2\right\},$$

und da $J_i(i\,e)$ als Produkt von e^i und einer nach geraden Potenzen von e fortschreitenden Reihe geschrieben werden kann (VII; 23), kann man wie oben schließen, daß $\dot r$ nach Potenzen von p und q entwickelbar ist, ebenso $\dot r'$ nach Potenzen von p' und q'. Die Ableitung von ϱ enthält außer $r, r', \varrho, \dot r, \dot r', \varphi$ noch $\dot\varphi = \dot v - \dot v'$. Es ist aber $\dot v = \sqrt{p}/r^2$ ebenfalls nach p, q entwickelbar.

Damit ist bewiesen, daß in der ebenen Dreikörperbewegung die drei Seiten des von den drei Massen gebildeten Dreiecks (und mit ihnen alle durch die Form dieses Dreiecks mitbestimmten Größen, insbesondere die etwas anders definierten Abstände und Winkelgrößen, wenn nicht heliozentrische, sondern JACOBIsche Koordinaten benutzt werden) sowie deren Ableitungen nach der Zeit und die HAMILTONsche Funktion nebst allen partiellen Ableitungen Funktionen der für die oskulierenden Bahnen von m und m' gültigen Größen

$$\text{(XIX; 86)} \qquad \begin{cases} a \text{ (bzw. } L); \; e\cos M; \; e\sin M, \\ a' \text{ (bzw. } L'); \; e'\cos M'; \; e'\sin M' \end{cases}$$

sowie der Differenz $\lambda - \lambda'$ der mittleren Längen sind und daß sie insbesondere in Potenzreihen nach den kleinen Größen

$$e\cos M, \; e\sin M; \quad e'\cos M', \; e'\sin M'$$

entwickelt werden können, deren Koeffizienten Funktionen von a, a' bzw. L, L' sind und periodische Funktionen von $\lambda - \lambda'$ mit der Periode 2π enthalten.

Zum Nachweis, daß eine Lösung der Differentialgleichungen (XIX; 70), die der Kreisbahnlösung benachbart ist, periodisch ist und dieselbe Periode T hat, genügt es zu zeigen, daß die sechs Größen (XIX; 86) für $t = 0$ und $t = T$ dieselben Werte annehmen und daß $\lambda - \lambda'$ in der Zwischenzeit um 2π wächst.

In der ungestörten Bewegung seien für $t = 0$

$$\text{(XIX; 87)} \qquad L_0, 0, 0; \; L_0', 0, 0$$

die speziellen Werte der Größen (XIX; 86), und es sei ferner $\lambda = \lambda' = 0$ für $t = 0$. In der gestörten Bewegung seien

$$\text{(XIX; 88)} \qquad \begin{cases} L_0 + \beta; & e_0\cos M_0; & e_0\sin M_0, \\ L_0' + \beta'; & e_0'\cos M_0'; & e_0'\sin M_0' \end{cases}$$

die entsprechenden Werte der oskulierenden Ellipsen für $t = 0$, und es seien β, β', e_0, e_0' klein von der Ordnung ε, so daß sie für $\varepsilon \to 0$ in (XIX; 87) übergehen. Ferner wollen wir annehmen, daß für denselben Zeitpunkt auch in der gestörten Bewegung $\lambda = \lambda' = 0$ sei, was durch geeignete Wahl der Nullpunkte der Zeit und der Länge immer erreicht werden kann. Das bedeutet allerdings nicht, daß die beiden Körper zur Zeit $t = 0$ in Konjunktion stehen; denn Konjunktionen finden ja statt, wenn die *wahren* Längen gleich sind; die wahren und die mittleren Längen sind aber bei nichtkreisförmigen Bahnen dann und nur dann identisch, wenn die Körper gleichzeitig in den Apsiden (Perihel oder Aphel) ihrer Bahnen stehen. Wir nennen eine Konjunktion, bei der sich beide Planeten in Perihel- oder Aphelstellung befinden, eine *symmetrische Konjunktion*. Findet zur Zeit $t = 0$ eine solche symmetrische Konjunktion statt, so ver-

läuft die Bewegung symmetrisch zu der gemeinsamen Apsidenlinie der beiden oskulierenden Bahnen, und zwar gilt das nicht nur für die oskulierenden Bahnen zur Zeit $t = 0$, sondern auch für die wahren Bahnen.

Für eine beliebige Zeit t mögen die Größen (XIX; 86) die Werte

$$\text{(XIX; 89)} \quad \begin{cases} L_0 + \beta + \varphi_1(t); & e\cos M_0 + \varphi_2(t); \quad e\sin M_0 + \varphi_3(t), \\ L_0' + \beta' + \varphi_1'(t); & e'\cos M_0' + \varphi_2'(t); \quad e'\sin M_0' + \varphi_3'(t) \end{cases}$$

annehmen. Die Funktionen φ_i, φ_i' verschwinden für $t = 0$ und sind, ebenso wie β, β', e, e', von der Ordnung ε. Dann gehen für $t \to 0$ die Größen (XIX; 89) in (XIX; 88) und für $\varepsilon \to 0$ in (XIX; 87) über. Die mittleren Längen in den oskulierenden Bewegungen lassen sich in der Form

$$\lambda = n\,t + \psi(t); \quad \lambda' = n'\,t + \psi'(t)$$

schreiben, wo ψ und ψ' die von ε abhängigen und mit ε verschwindenden Störungen der mittleren Längen darstellen. Da für $t = 0$ auch $\lambda = \lambda' = 0$ sein soll, ist auch $\psi(0) = \psi'(0) = 0$. Die Größen n und n' stellen die mittleren Bewegungen in den oskulierenden Bahnen dar, die zu $t = 0$ gehören, d.h., es ist, mit den Elementen (XIX; 88),

$$\text{(XIX; 90)} \quad \left| \begin{aligned} n &= \frac{\varkappa}{(L_0 + \beta)^3} = n_0\left(1 + \frac{\beta}{L_0}\right)^{-3}, \\ n' &= \frac{\varkappa'}{(L_0' + \beta')^3} = n_0'\left(1 + \frac{\beta'}{L_0'}\right)^{-3}, \end{aligned} \right.$$

wenn wir mit

$$n_0 = \frac{\varkappa}{L_0^3}; \quad n_0' = \frac{\varkappa'}{L_0'^3}$$

die mittleren Bewegungen in den ungestörten Kreisbahnen bezeichnen. Dabei sind $\varkappa$, $\varkappa'$ gewisse Funktionen der Massen m, m', die für Jacobische Koordinaten durch (XIX; 71b) gegeben sind. Es ist aber vorteilhafter, wie auch weiter oben bei der Definition von ϱ, heliozentrische Koordinaten zu verwenden. Dann ist nämlich $\varkappa$ nur von m und $\varkappa'$ nur von m' abhängig, so daß n_0 und n_0' sich nicht ändern, wenn wir die jeweils störende Masse gegen Null abnehmen lassen.

Die Bedingung dafür, daß die gestörten Bewegungen periodisch mit der Periode T verlaufen, sind erfüllt, wenn die Größen (XIX; 89) für $t = T$ mit (XIX; 88) identisch sind und wenn $\lambda - \lambda'$ in der Zeit von $t = 0$ bis $t = T$ um 2π zunimmt. Es müssen also die sechs Gleichungen

$$\text{(XIX; 91)} \quad \varphi_1(T) = \varphi_2(T) = \varphi_3(T) = \varphi_1'(T) = \varphi_2'(T) = \varphi_3'(T) = 0$$

bestehen, außerdem aber, wenn

$$\text{(XIX; 92)} \quad \lambda(T) - \lambda'(T) = (n - n')T + \psi(T) - \psi'(T) = 2\pi + \varphi_0(T)$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$\text{(XIX; 93)} \quad \varphi_0(T) = 0.$$

Es sind also die sieben Gleichungen (XIX; 91) und (XIX; 93) zu befriedigen. Diese sind aber nicht unabhängig voneinander; denn das ebene Dreikörperproblem kennt ja zwei allgemeine Integrale, nämlich das Energieintegral

$$(\text{XIX}; 94)\quad F = C_1 = \text{const} = F_0 + \varepsilon F_1 + \cdots = \frac{\varkappa}{2L^2} + \frac{\varkappa'}{2L'^2} + \varepsilon F_1 + \cdots$$

und den Drehimpulssatz

$$(\text{XIX}; 95)\qquad G = \varkappa L\sqrt{1-e^2} + \varkappa' L'\sqrt{1-e'^2} = C_2 = \text{const}.$$

Die HAMILTONsche Funktion F, die, wie oben bewiesen, eine Funktion der sechs Größen (XIX; 89) und eine periodische Funktion von $\lambda - \lambda'$ ist, ist nach (XIX; 94) für alle t konstant, so daß man die Konstante C_1 durch $F(t = 0)$, d.h. als Funktion der Größen (XIX; 88), ausdrücken kann. Das gleiche gilt auch für das Integral $G = C_2$, und die beiden Gleichungen (XIX; 94) und (XIX; 95) lassen sich also auch in der Form

$$\Phi_1 = F(T) - F(0) = 0; \quad \Phi_2 = G(T) - G(0) = 0$$

schreiben. Das sind zwei *homogene* Gleichungen zwischen den sieben Größen $\varphi_i(T)$, $\varphi_i'(T)$; denn entwickelt man $F(T)$ nach Potenzen der kleinen Größen φ_i, φ_i', so entsprechen die von ihnen freien Glieder genau dem Ausdruck $F(0)$, so daß diese aus Φ_1 verschwinden. Dasselbe gilt auch für Φ_2. Man kann also zwei dieser sieben Größen, etwa $\varphi_1(T)$ und $\varphi_1'(T)$, als Funktionen der übrigen ausdrücken, falls die Funktionaldeterminante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_1} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_1'} \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi_1} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi_1'} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Die Beziehungen $\varphi_1(T) = \varphi_1'(T) = 0$ sind daher eo ipso erfüllt, wenn die übrigen Gleichungen (XIX; 91) und (XIX; 93) gelten. Nun ist aber, wenn wir Größen von der Ordnung ε vernachlässigen,

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial F_0}{\partial L} = -\frac{\varkappa}{L^3} \approx -\frac{\varkappa}{L_0^3} = -n_0; \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_1'} = -n_0',$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial G}{\partial L} = \varkappa\sqrt{1-e^2} \approx 1; \qquad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi_1'} = \varkappa'\sqrt{1-e'^2} \approx 1,$$

da e und e' von der Ordnung ε sind und $\varkappa, \varkappa', L/L_0$ und L'/L_0' sich von der Einheit nur um Größen von der Ordnung ε unterscheiden. Es ist daher, bis auf Größen, die mit ε verschwinden,

$$\Delta \approx n_0' - n_0 \neq 0,$$

wie weiter oben vorausgesetzt wurde.

Für die Bestimmung der Anfangsbedingungen (XIX; 88), also, falls L_0, L_0' und damit a_0, a_0' und n_0, n_0' (d.h. Halbmesser und mittlere Bewegung der kreisförmigen Ausgangsbahnen) gegeben sind, der sechs Größen

$$\beta, \beta'; \; e, e'; \; M_0, M_0', \tag{XIX; 96}$$

stehen demnach fünf unabhängige Gleichungen, nämlich

$$\varphi_0(T) = \varphi_2(T) = \varphi_3(T) = \varphi_2'(T) = \varphi_3'(T) = 0 \tag{XIX; 97}$$

zur Verfügung, deren Erfüllung notwendig und hinreichend ist, damit die Größen (XIX; 96) die Anfangsbedingungen einer periodischen Lösung definieren. Man könnte also eine dieser Größen noch willkürlich festsetzen, z.B. $\beta = 0$ wählen. Aus Symmetriegründen ist es aber vorteilhafter, nach dem Vorschlag von Poincaré den fünf Gleichungen (XIX; 97) als sechste die Energiegleichung

$$F(0) = C_1 = C \tag{XIX; 98}$$

hinzuzufügen. Es ist dann die Energiekonstante C willkürlich wählbar, wobei man sich zweckmäßigerweise auf Werte dieser Konstante beschränken wird, die in der Nachbarschaft der Energiekonstante

$$C_0 = \frac{\varkappa}{2L_0^2} + \frac{\varkappa'}{2L_0'^2}$$

der ungestörten Kreisbahnen liegen und so beschaffen sind, daß $C - C_0$ eine kleine Größe von der Ordnung ε ist. Gleichung (XIX; 98) kann dann folgendermaßen geschrieben werden:

$$C = F_0 + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \cdots = \frac{\varkappa}{2(L_0+\beta)^2} + \frac{\varkappa'}{2(L_0'+\beta')^2} + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \cdots =$$

$$= \frac{\varkappa}{2L_0^2}\left(1 + \frac{\beta}{L_0}\right)^{-2} + \frac{\varkappa'}{2L_0'}\left(1 + \frac{\beta'}{L_0'}\right)^{-2} + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \cdots =$$

$$= C_0 + \beta\left(\frac{\partial C}{\partial \beta}\right)_0 + \beta'\left(\frac{\partial C}{\partial \beta'}\right)_0 + \varepsilon F_1 + \langle \text{Größen der Ordnung } \varepsilon^2 \rangle$$

oder, da ja $C - C_0$ von der Ordnung ε sein soll,

$$\beta\left(\frac{\partial C}{\partial \beta}\right)_0 + \beta'\left(\frac{\partial C}{\partial \beta'}\right)_0 = f_1, \tag{XIX; 99}$$

wo f_1 von der Ordnung ε ist.

Ähnlich läßt sich die Gleichung $\varphi_0(T) = 0$ umformen. Es ist ja nach (XIX; 92)

$$\varphi_0(T) = \lambda(T) - \lambda'(T) - 2\pi = (n - n')T + \psi(T) - \psi'(T) - 2\pi,$$

wo $\psi - \psi'$ von der Ordnung ε ist. Nach (XIX; 90) und wegen $T = 2\pi/(n_0 - n_0')$ ist aber

$$(n - n')\,T = \left[n_0\left(1 + \frac{\beta}{L_0}\right)^{-3} - n_0'\left(1 + \frac{\beta'}{L_0'}\right)^{-3}\right]\frac{2\pi}{n_0 - n_0'},$$

d.h., es besteht die Beziehung

$$\varphi_0(T) = \frac{2\pi}{n_0 - n_0'}\left[n_0\left(1 + \frac{\beta}{L_0}\right)^{-3} - n_0'\left(1 + \frac{\beta'}{L_0'}\right)^{-3}\right] - 2\pi + \psi(T) - \psi'(T) = 0,$$

die man wiederum, wenn man nach Potenzen von β und β' entwickelt, in der Gestalt

$$\beta\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\beta}\right)_0 + \beta'\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\beta'}\right)_0 = f_2 \qquad \text{(XIX; 100)}$$

schreiben kann, wo f_2 ein Ausdruck von der Ordnung ε ist. Die Gleichungen (XIX; 99) und (XIX; 100) gestatten aber, wenn $C - C_0$ vorgegeben wird und man in f_1 und f_2 alle Terme zweiter und höherer Ordnung vernachlässigt, β und β' eindeutig zu ermitteln, wenn die Determinante

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial C}{\partial\beta}\right)_0 & \left(\frac{\partial C}{\partial\beta'}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\beta}\right)_0 & \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\beta'}\right)_0 \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet. Es ist aber

$$\left(\frac{\partial C}{\partial\beta}\right)_0 = -n_0; \quad \left(\frac{\partial C}{\partial\beta'}\right)_0 = -n_0',$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\beta}\right)_0 = -\frac{6\pi}{n_0 - n_0'}\frac{n_0}{L_0}; \quad \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\beta'}\right)_0 = +\frac{6\pi}{n_0 - n_0'}\frac{n_0'}{L_0'},$$

also

$$\Delta_1 = -\frac{6\pi\, n_0 n_0'}{n_0 - n_0'}\left(\frac{1}{L_0} + \frac{1}{L_0'}\right).$$

Da aber n_0, n_0', L_0, L_0' sowie (nach Voraussetzung) $n_0 - n_0'$ von Null verschieden und außerdem L_0 und L_0' positiv sind, ist $\Delta_1 \neq 0$. Damit sind β und β' eindeutig festgelegt.

Ferner ist, wenn e, M Exzentrizität und mittlere Anomalie in der oskulierenden Bahn von m zu einer beliebigen Zeit t bedeuten,

$$\varphi_2(t) = e\cos M - e_0\cos M_0,$$
$$\varphi_3(t) = e\sin M - e_0\sin M_0.$$

Insbesondere gilt für $t = T$

$$e = e_0 \quad \text{und} \quad M = M_0 + \Delta M,$$

wo ΔM den Zuwachs bedeutet, den in der gestörten Bewegung von m die mittlere Länge λ in der Zeit von $t = 0$ bis $t = T$ erleidet. Da aber $\lambda(0) = 0$ angenommen wurde, ist

$$\Delta M = \lambda(T) = nT + \langle\text{Größen von der Ordnung } \varepsilon\rangle,$$

also wegen (XIX; 90)

$$\varDelta M = n_0 T \left(1 + \frac{\beta}{L_0}\right)^{-3} + \cdots.$$

Da aber auch β von der Ordnung ε ist, darf man einfacher schreiben:

$$\varDelta M = n_0 T + \langle \text{Größen von der Ordnung } \varepsilon \rangle.$$

Demnach ist, wenn $\varphi_2(T) = \varphi_3(T) = 0$ sein soll,

$$e_0 \cos(M_0 + n_0 T) - e_0 \cos M_0 = f_3,$$
$$e_0 \sin(M_0 + n_0 T) - e_0 \sin M_0 = f_4.$$

In diesen Gleichungen sind in f_3 und f_4 bekannte Ausdrücke von der Ordnung ε vereinigt; denn auch die Glieder mit β, die in diesen Ausdrücken enthalten sind, dürfen ja jetzt als bekannt angesehen werden. Diese Gleichungen sind linear in den Unbekannten $e_0 \cos M_0$ und $e_0 \sin M_0$, die sich eindeutig bestimmen lassen, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} \cos n_0 T - 1 & -\sin n_0 T \\ \sin n_0 T & \cos n_0 T - 1 \end{vmatrix} = (\cos n_0 T - 1)^2 + \sin^2 n_0 T$$

nicht verschwindet. Das ist aber stets der Fall, solange nicht

$$n_0 T = \frac{2\pi n_0}{n_0 - n_0'} = 2k\pi$$

ein *ganzes* Vielfaches von 2π ist, d.h., solange nicht zwischen den mittleren Bewegungen in den ungestörten Bahnen die Beziehung

$$n_0 = k(n_0 - n_0'), \quad (k \text{ ganzzahlig})$$

besteht. Zu ganz entsprechenden Schlüssen führt auch die Diskussion der Gleichungen $\varphi_2'(T) = \varphi_3'(T) = 0$. Periodische Lösungen, die für verschwindende Massen in Kreisbahnlösungen mit n_0 und n_0' als mittlere Bewegungen übergehen und mit ihnen die gleiche (synodische) Periode T haben, existieren also immer, ausgenommen die Spezialfälle, daß

$$\frac{n_0}{n_0'} = \frac{k}{k-1}, \qquad (k = 2, 3, \ldots)$$

bzw.

$$\frac{n_0}{n_0'} = \frac{k+1}{k}, \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

ist. Besondere Bedeutung kommt dabei den Fällen niedrigzahliger Kommensurabilitäten dieser Art zu. Im System der von Jupiter (m') gestörten Planetoiden hat insbesondere das „Hecuba-Problem“ großes Interesse erweckt, so genannt nach dem Planetoiden (108) Hecuba, dessen mittlere Bewegung n mit der des Jupiter (n') fast genau das Verhältnis $n : n' = 2 : 1$ hat, dessen Umlaufszeit also nahezu einen halben Jupiterumlauf beträgt. Der nächst einfache Fall, $n : n' = 3 : 2$, ist fast genau bei dem Planetoiden (153) Hilda erfüllt. Während aber im Planetoidensystem an der Kommensurabilitätsstelle 2 : 1

eine ausgeprägte Lücke in der Häufigkeitskurve der Planetoiden vorhanden ist, ist die Stelle 3 : 2 geradezu durch eine Anhäufung von Körpern in einem sonst planetoidenfreien Gebiet ausgezeichnet, die bislang 19 bekannte Planetoiden, die sogenannte Hilda-Gruppe, umfaßt. Andererseits gibt es bei der Kommensurabilität $n : n' = 3 : 1$, die *nicht* zu den „verbotenen" gehört, wiederum eine ausgeprägte Lücke im System der Kleinen Planeten, die „Hestia-Lücke", so bezeichnet nach dem Planeten (46) Hestia, der ihr verhältnismäßig nahe kommt. Diese Erfahrungen lehren, daß die Tatsache, daß gewisse Kommensurabilitäten die Existenz periodischer Lösungen der ersten Gattung nicht zulassen, keinen eindeutigen Zusammenhang mit dem Bestehen von Lücken in der als Funktion der mittleren Bewegung aufgetragenen Häufigkeitskurve der Planetoiden zu haben scheint. Eine befriedigende Theorie, die das Vorhandensein der Kommensurabilitätslücken erklärt, steht trotz mancher inzwischen erzielter Fortschritte noch aus. Der Sachverhalt wird nicht gerade klarer, wenn man die Tatsache hinzunimmt, daß in den Satellitensystemen der großen Planeten solche „verbotenen Kommensurabilitäten" vorkommen: So verhalten sich im Saturnsystem die mittleren Bewegungen von Enceladus und Dione nahezu wie 2 : 1, die von Titan und Hyperion nahezu wie 4 : 3.

172. *Periodische Lösungen zweiter Gattung. Das Hecuba-Problem*

In Abschnitt 162 haben wir untersucht, unter welchen Umständen die Bewegung eines Systems von zwei unendlich kleinen Massen, die in Kegelschnittbahnen um die Sonne laufen, als periodisch angesehen werden kann. Dies ist immer der Fall, wenn beide Bahnen kreisförmig sind und in der gleichen Ebene verlaufen; wenn aber mindestens eine der Bahnen elliptisch ist, dann nur unter der Bedingung (XIX; 7), d.h. also, wenn die mittleren Bewegungen der beiden Körper sich wie zwei ganze Zahlen verhalten.

Nun haben wir im vorigen Abschnitt bewiesen, daß periodische Lösungen der ersten Gattung (schwach gestörte Bewegungen, die ungestörten Kreisbahnen benachbart sind) immer existieren, ausgenommen in den Fällen der Kommensurabilität der mittleren Bewegungen vom Typus $(k + 1)/k$. Andererseits sind periodische Lösungen der zweiten Gattung (die ungestörten elliptischen Bewegungen benachbart sind) gerade dann und nur dann möglich, wenn die ungestörten Bahnen kommensurabel sind. Es erhebt sich also die Frage, ob periodische Lösungen der zweiten Gattung in diesen Fällen immer existieren oder ob dies wiederum nur unter gewissen Einschränkungen gilt. Insbesondere wird es interessant sein zu untersuchen, ob hier ein Unterschied zwischen den Kommensurabilitäten vom Typ $(k + 1)/k$ (bei denen es keine periodischen Lösungen der ersten Gattung gibt) und den viel zahlreicheren Kommensurabilitäten anderer Art besteht. Der einfachste dieser Fälle, das *Hecuba-Problem* vom Typus 2 : 1, ist Gegenstand sehr vieler Untersuchungen numerischer wie theoretischer Art gewesen, auf die wir (s. Literaturverzeichnis) nur hinweisen können.

Verhältnismäßig einfach und übersichtlich gestalten sich diese Dinge noch im „problème restreint", wo die Masse des einen der beiden Planeten (Pla-

netoid) unendlich klein ist, während die andere zwar sehr kleine, aber endliche Masse eine ungestörte Kreisbahn um die Sonne beschreibt. POINCARÉ[1]) hat die naheliegende Frage untersucht, was geschieht, wenn die Anfangsbedingungen einer periodischen Lösung des „problème restreint" sich dem Fall einer Kommensurabilität vom Hecuba-Typus nähern. Seine Überlegungen machen es plausibel, daß die periodischen Lösungen der ersten Gattung analytisch in die der zweiten Gattung übergehen, wenn die Verhältnisse der mittleren Bewegungen den kritischen Werten zustreben. Es lohnt sich, aus diesen Gedankengängen POINCARÉS (die zwar den höchsten Anforderungen mathematischer Strenge kaum genügen, aber die tiefe Einsicht des großen Analytikers in das Wesen der Dinge verraten) das Wichtigste herauszugreifen und ihre Ergebnisse an numerischen Versuchen zu bestätigen.

Die Differentialgleichungen der ebenen Bewegung eines masselosen Planetoiden im Gravitationsfeld der Sonne (Masse 1) und des Jupiter (Masse m, Kreisbahn mit Halbmesser $a_1 = 1$) lauten in den DELAUNAYschen Elementen

$$\text{(XIX; 101)} \quad \frac{dL}{dt} = \frac{\partial H}{\partial l}, \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial L}; \quad \frac{dG}{dt} = \frac{\partial H}{\partial g'}, \quad \frac{dg'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial G},$$

wenn, bei geeigneter Wahl der Zeiteinheit,

$$\left\{\begin{array}{rl} & L = \sqrt{a}, \quad G = L\sqrt{1-e^2}; \quad l = M, \quad g' = \tilde{\omega}, \\ a, e, M, \tilde{\omega} = & \text{Elemente der oskulierenden Bahn des Planetoiden,} \\ & H = \dfrac{1}{2L^2} + m\left\{\dfrac{1}{\varrho} - \dfrac{x x_1 + y y_1}{r^3}\right\} = \dfrac{1}{2L^2} + m F_1, \\ \varrho, r = & \text{Abstände des Planetoiden von Jupiter bzw. Sonne,} \\ x, y; x_1, y_1 = & \text{Koordinaten von Planetoid bzw. Jupiter im festen heliozentrischen System} \end{array}\right.$$

gesetzt ist.

Zur Zeit t seien ferner

$$\lambda_1 = n_1 t = t, \quad (n_1 = 1),$$
$$\lambda' = \lambda'(t) = M + \tilde{\omega} = l + g'$$

die mittleren Längen von Jupiter bzw. Planetoid, und es sei zur Zeit $t = 0$ auch $\lambda' = \lambda_1 = 0$. Aus Abschnitt 171 ist bekannt, daß H nur von L, G, l und $\lambda' - \lambda_1 = l + g' - t$ abhängt, also auch als Funktion von

$$L, G, l, g' - t$$

geschrieben werden kann. Es ist demnach

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial g'}.$$

Setzt man

$$H = F - G,$$

[1]) H. POINCARÉ, B.A. *19*, 177 und 289 (1902).

so erhält man

$$\frac{\partial H}{\partial l} = \frac{\partial F}{\partial l}; \quad \frac{\partial H}{\partial L} = \frac{\partial F}{\partial L}; \quad \frac{\partial H}{\partial G} = \frac{\partial F}{\partial G} - 1; \quad \frac{\partial H}{\partial g'} = \frac{\partial F}{\partial g'}$$

und, wenn man $g = g' - t$ einführt,

$$\frac{\partial H}{\partial g'} = \frac{\partial H}{\partial g}; \quad \frac{\partial F}{\partial g'} = \frac{\partial F}{\partial g}; \quad \frac{dg}{dt} = \frac{dg'}{dt} - 1.$$

Anstatt (XIX; 101) gelten also auch die kanonischen Differentialgleichungen

$$\text{(XIX; 102)} \quad \frac{dL}{dt} = \frac{\partial F}{\partial l}, \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L}; \quad \frac{dG}{dt} = \frac{\partial F}{\partial g}, \quad \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial G}$$

mit der neuen HAMILTONschen Funktion

$$\text{(XIX; 103)} \qquad F = H + G = \frac{1}{2L^2} + G + mF_1.$$

Führt man nun POINCARÉsche Koordinaten durch die Transformation

$$\text{(XIX; 104)} \quad L = L, \quad \lambda = l + g; \quad \xi = \sqrt{2(L-G)}\cos g, \quad \eta = -\sqrt{2(L-G)}\sin g$$

ein, so ist

$$\begin{aligned} L\,dl + G\,dg - L\,d\lambda - \xi\,d\eta = \\ &= L\,d(\lambda - g) + G\,dg - L\,d\lambda + \\ &+ \sqrt{2(L-G)}\cos g\left\{\frac{d(L-G)}{\sqrt{2(L-G)}}\sin g + \sqrt{2(L-G)}\cos g\,dg\right\} = \\ &= d\{(L-G)\cos g\sin g\} \end{aligned}$$

ein vollständiges Differential. Die Transformation (XIX; 104) ist also kanonisch und führt (XIX; 102) ohne Änderung der HAMILTONschen Funktion in

$$\text{(XIX; 105)} \quad \frac{dL}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \lambda}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L}; \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \eta}, \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \xi}$$

über. Da

$$\xi^2 + \eta^2 = 2(L - G); \quad G = L - \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)$$

ist, kann der von der störenden Masse m freie Teil der Störungsfunktion (XIX; 103)

$$\text{(XIX; 106)} \qquad F_0 = \frac{1}{2L^2} + L - \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)$$

geschrieben werden, und es ist F_1 eine Funktion von L, λ, ξ, η, die nach ganzen Potenzen von ξ und η und nach den trigonometrischen Funktionen der Vielfachen von λ entwickelt werden kann.

Im rotierenden Koordinatensystem des „problème restreint" ist $\lambda = \lambda' - t = l + g$ die Differenz der mittleren Längen von Planetoid und Jupiter, also der Richtungswinkel des von der Sonne nach dem mittleren Planetoidenort gezogenen Fahrstrahls, gezählt von der positiven x-Achse aus, auf der Jupiter den Platz $x = 1$ beständig einnimmt, wenn die Sonne im Koordinatenanfang steht. Nehmen wir ferner an, daß zur Zeit $t = 0$ eine *symmetrische Konjunktion* der beiden Planeten stattfindet, so ist zu dieser Zeit nicht nur die mittlere, sondern auch die wahre Länge des Planetoiden gleich Null, d.h., der Planetoid steht im Perihel seiner oskulierenden Bahn. Dann verläuft seine Bewegung symmetrisch zu diesem Zeitpunkt und symmetrisch zur x-Achse, und es ist F_1 eine gerade Funktion von λ, d.h. in eine nach den Kosinus der Vielfachen von λ fortschreitende Reihe entwickelbar.

Setzt man nun $F = F_0 + mF_1$, wo F_0 den Wert (XIX; 106) hat, so erhält man aus (XIX; 105)

$$\text{(XIX; 107)} \quad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = m\dfrac{\partial F_1}{\partial\lambda}; & \dfrac{d\lambda}{dt} = \dfrac{1}{L^3} - 1 - m\dfrac{\partial F_1}{\partial L}, \\[2ex] \dfrac{d\xi}{dt} = -\eta + m\dfrac{\partial F_1}{\partial\eta}; & \dfrac{d\eta}{dt} = \xi - m\dfrac{\partial F_1}{\partial\xi}. \end{cases}$$

Man führe nun statt t eine neue unabhängige Variable ω durch

$$t = h\,\omega$$

ein. Die Konstante h soll so beschaffen sein, daß in einer periodischen Lösung der Differentialgleichungen (XIX; 107) $L, \cos\lambda, \sin\lambda, \xi, \eta$ periodische Funktionen von ω mit der Periode 2π sind, so daß $\Theta = 2\pi h$ die Periode der Bewegung im rotierenden System bedeutet. Ist ν die mittlere Bewegung des Planetoiden im rotierenden System (synodische Bewegung) und $\nu' = \nu + 1$ die mittlere Bewegung im festen System (siderische Bewegung), so ist

$$\nu = \frac{2\pi}{\Theta} = \frac{1}{h}; \quad \nu' = \frac{h+1}{h}.$$

Ist also h eine ganze Zahl, so tritt der kritische Fall ein. Im Hecuba-Problem ist speziell $h = 1$.

Mit ω als unabhängige Variable lauten die Gleichungen (XIX; 107)

$$\text{(XIX; 108)} \quad \begin{cases} \dfrac{dL}{d\omega} = m\,h\dfrac{\partial F_1}{\partial\lambda}; & \dfrac{d\lambda}{d\omega} + h\left(1 - \dfrac{1}{L^3}\right) = -m\,h\dfrac{\partial F_1}{\partial L}, \\[2ex] \dfrac{d\xi}{d\omega} + h\,\eta = m\,h\dfrac{\partial F_1}{\partial\eta}; & \dfrac{d\eta}{d\omega} - h\,\xi = -m\,h\dfrac{\partial F_1}{\partial\xi}. \end{cases}$$

Für $m = 0$, also für die ungestörte Ausgangsbahn, verschwinden die rechten Seiten von (XIX; 108), und die Integration liefert dann als ungestörte Lösung

$$L = L_0; \quad \frac{d\lambda}{d\omega} = h\left(\frac{1}{L_0^3} - 1\right) = q, \quad \lambda = \lambda_0 + q\,\omega,$$

$$\xi = \alpha\cos h\,\omega + \beta\sin h\,\omega; \quad \eta = \alpha\sin h\,\omega - \beta\cos h\,\omega$$

mit den Integrationskonstanten L_0, λ_0, α, β. Findet aber für $\omega = 0$ eine symmetrische Konjunktion statt, so ist neben $\lambda_0 = 0$ für diesen Zeitpunkt

$$g = g' - t = g' = \tilde{\omega} = 0, \quad \text{also auch} \quad \eta = -\sqrt{2(L-G)}\,\sin g = 0,$$

d.h., es ist speziell $\beta = 0$ und daher

$$\xi = \alpha \cos h\,\omega; \quad \eta = \alpha \sin h\,\omega.$$

Damit die Lösung periodisch ist, muß (falls die Ausgangsbahn elliptisch, also $\alpha \neq 0$ ist) $h = p$ eine ganze Zahl sein. Außerdem soll in der ungestörten Bahn die mittlere Bewegung des Planetoiden mit der des Jupiter ($\nu_1' = 1$) kommensurabel sein, d.h., es ist

$$\nu = \frac{1}{L_0^3} - 1 = \frac{q}{p}$$

gleich dem Verhältnis zweier ganzer Zahlen. Setzt man also $h = p$, so wird in der intermediären Bahn

$$\frac{d\lambda}{d\omega} = p\left(\frac{1}{L_0^3} - 1\right) = q$$

ganzzahlig und (wegen $\lambda = 0$ für $\omega = 0$) $\lambda = q\,\omega$ sein.

Eine zweite Näherung (für kleines $m > 0$) erhält man, wenn man in (XIX; 108) auf den linken Seiten

$$L = L_0 + \delta L; \quad \lambda = q\,\omega + \delta\lambda; \quad \xi = \alpha \cosh\omega + \delta\xi; \quad \eta = \alpha \sinh\omega + \delta\eta$$

und ferner

$$h = p + \delta h$$

setzt. Auf den rechten Seiten, die den kleinen Faktor m enthalten, genügt es vorerst, F_1 mit den ungestörten Variablen zu bilden, so daß diese Funktion und ihre partiellen Ableitungen als bekannt angesehen werden dürfen. Die Integration des Systems bietet dann keine Schwierigkeiten, da man F nach den Kosinus der Vielfachen von ω entwickeln kann. Man kann dieses Verfahren iterativ fortsetzen und so zu genauen Lösungen gelangen.

Was die Bestimmung von δL und $\delta\lambda$ anbelangt, dürfen wir uns mit diesem allgemeinen Hinweis begnügen. Besonderes Interesse beansprucht aber die Bestimmung von $\delta\xi$, $\delta\eta$ und δh. Die Differentialgleichungen (XIX; 108) liefern zunächst

$$\frac{d\xi}{d\omega} + h\,\eta = \frac{d}{d\omega}(\alpha \cos p\,\omega + \delta\xi) + (p + \delta h)(\alpha \sin p\,\omega + \delta\eta) = \sum C_k \sin k\,\omega,$$

$$\frac{d\eta}{d\omega} - h\,\xi = \frac{d}{d\omega}(\alpha \sin p\,\omega + \delta\eta) - (p + \delta h)(\alpha \cos p\,\omega + \delta\xi) = \sum D_k \cos k\,\omega,$$

da ξ, $d\eta/d\omega$ gerade, η, $d\xi/d\omega$ ungerade Funktionen von ω sind. Unterdrückt man Größen zweiter Ordnung, wie $\delta\xi\,\delta h$, so folgt hieraus

$$\frac{d\delta\xi}{d\omega} + p\,\delta\eta + \alpha\sin p\,\omega\,\delta h = \sum C_k \sin k\,\omega,$$

$$\frac{d\delta\eta}{d\omega} - p\,\delta\xi - \alpha\cos p\,\omega\,\delta h = \sum D_k \cos k\,\omega.$$

Der Ansatz

$$\delta\xi = \sum a_k \cos k\,\omega; \quad \delta\eta = \sum b_k \sin k\,\omega; \quad \delta h = \text{const}$$

ergibt

$$-\sum k\,a_k \sin k\,\omega + p\sum b_k \sin k\,\omega + \alpha\,\delta h \sin p\,\omega = \sum C_k \sin k\,\omega,$$

$$\sum k\,b_k \cos k\,\omega - p\sum a_k \cos k\,\omega - \alpha\,\delta h \cos p\,\omega = \sum D_k \cos k\,\omega,$$

und man findet durch Koeffizientenvergleich für $k \neq p$

$$-k\,a_k + p\,b_k = C_k,$$

$$k\,b_k - p\,a_k = D_k,$$

woraus

$$a_k = \frac{k\,C_k - p D_k}{p^2 - k^2}; \quad b_k = \frac{p\,C_k - k D_k}{p^2 - k^2}, \qquad (k \neq p)$$

folgt. Für $k = p$ erhält man dagegen

$$p(b_p - a_p) + \alpha\,\delta h = C_p,$$

$$p(b_p - a_p) - \alpha\,\delta h = D_p,$$

also

$$\delta h = \frac{C_p - D_p}{2\alpha}; \quad b_p = a_p + \frac{C_p + D_p}{2p}.$$

Damit wird, wenn man a_p noch unbestimmt läßt,

$$\text{(XIX; 109)} \quad \begin{cases} \delta\xi = \sum\limits_{k \neq p} \dfrac{k\,C_k - p D_k}{p^2 - k^2} \cos k\,\omega + (a_p \cos p\,\omega), \\ \delta\eta = \sum\limits_{k \neq p} \dfrac{p\,C_k - k D_k}{p^2 - k^2} \sin k\,\omega + (a_p \sin p\,\omega) + \\ \qquad + \dfrac{C_p + D_p}{2p} \sin p\,\omega. \end{cases}$$

Da aber $\xi = \alpha\cos p\,\omega + \delta\xi$ ist, kann man die Integrationskonstante a_p mit α vereinigen oder, was auf dasselbe hinauskommt, $a_p = 0$ setzen, so daß die in (XIX; 109) eingeklammerten Terme entfallen.

Eine Schwierigkeit ist nur zu befürchten, wenn $\alpha = 0$ oder sehr klein ist. Denn dann könnte δh sehr groß werden oder gar über alle Grenzen wachsen, und die Voraussetzung, daß δh klein von der Ordnung m sei, wäre nicht mehr erfüllt. Nun entspricht aber $\alpha = 0$ gerade dem Fall der periodischen Lösungen erster Gattung; denn es sind ja

$$\xi = \alpha\cos p\,\omega; \quad \eta = \alpha\sin p\,\omega$$

von der Ordnung

$$\sqrt{2(L-G)} = \sqrt{2L}\sqrt{1-\sqrt{1-e^2}} \approx e\sqrt{L},$$

und α verschwindet daher mit e. Andererseits wissen wir, daß periodische Lösungen der ersten Gattung immer existieren, außer dem Fall, daß $\nu = q/p = 1/k$ ist, wenn k eine ganze Zahl bedeutet. Ist dagegen p/q rational, ohne ganz zu sein, so gibt es periodische Lösungen erster Gattung. In diesem Fall muß $C_p - D_p$ gleichzeitig mit α verschwinden, damit δh endlich bleibt.

Wir sind also durch diese Schlußweise zu folgenden Erkenntnissen gelangt:

1. Periodische Lösungen der ersten Gattung existieren in der Umgebung jeder ungestörten Kreisbahn ($e_0 = 0$), falls $\nu = 1/L_0^3 - 1 \neq 1/n$ (n ganz) ist.

2. Periodische Lösungen der zweiten Gattung existieren nur, wenn $\nu = 1/L_0^3 - 1 = q/p$ rational ist, aber für $p/q = n$ (n ganzzahlig) nur, wenn die Exzentrizität von Null verschieden ist. Es gibt also in der $\nu\alpha$-Ebene (in der ν und α rechtwinklige Koordinaten darstellen mögen) gewisse Punkte[1])

$$\nu = \frac{1}{n}; \quad \alpha = 0,$$

die weder periodischen Lösungen der ersten noch der zweiten Gattung entsprechen und daher als singuläre Stellen aufzufassen sind. Abb. 61 versucht diesen Befund schematisch zu erläutern: Die Punkte der horizontalen Linie ($\alpha = 0$) stellen die Anfangsbedingungen der ungestörten periodischen Lösungen erster Gattung symbolisch dar, die vertikalen Linien ($\nu = 1$, $\nu = 2/3$, $\nu = 1/2$) diejenigen der ungestörten periodischen Lösungen zweiter Gattung für eine Auswahl von Kommensurabilitätsstellen. Während bei $\nu = 2/3$ keine Schwierigkeiten auftreten (hier ist eine analytische Fortsetzung der in der Nachbarschaft der ausgezogenen Linien liegenden gestörten periodischen Lösungen beider Gattungen über den Kreuzungspunkt hinweg möglich), ist dies bei $\nu = 1$, $\nu = 1/2$, allgemein bei $\nu = 1/n$, nicht der Fall. Es gibt keine stetige Folge von gestörten periodischen Lösungen der ersten Gattung (mit kleinem e), deren variabler Parameter ν über einen der kritischen Werte hinwegführt. Ebensowenig existieren Folgen von gestörten periodischen Lösungen der zweiten Gattung, für die ν in der Nähe eines kritischen Wertes liegt und für die der Parameter α durch Null hindurchgeht. Es wäre aber wohl denkbar, daß es Folgen von periodischen Lösungen gibt, die so beschaffen sind, daß sie in der Umgebung der singulären Stellen aus dem Bereich der Lösungen erster Gattung analytisch in den Bereich der Lösungen zweiter Gattung übergehen, ohne die Achsen der Kreuzung zu überschreiten, etwa so wie in Abb. 61 durch die gestrichelten hyperbelartigen Kurven angedeutet wird.

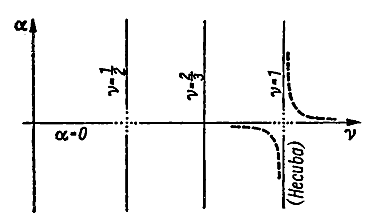


Abb. 61. Zum Hecuba-Problem

[1]) An die Stelle von α kann auch irgendeine andere Variable treten, die mit e verschwindet, z. B. die auf S. 505 definierte Größe T.

In der Tat läßt sich zeigen, daß diese Vermutung nicht unbegründet ist. Wir nehmen an, daß eine periodische Lösung irgendwo in der Umgebung eines der singulären Punkte existiert. Für sie sei also die Exzentrizität klein, aber von Null verschieden, und es sei die mittlere Bewegung nahezu gleich dem kritischen Wert $1/n$. POINCARÉ nimmt an, daß man die wesentlichsten (d.h. für die Beantwortung der vorliegenden Fragen entscheidenden) Eigenschaften dieser Lösung erfaßt, wenn man aus den periodischen Gliedern der Störungsfunktion nur die mit der längsten Periode herausgreift, die kurzperiodischen aber unterdrückt. Nun führe man, da in der ungestörten Bewegung $\xi = \alpha \cos p\,\omega$, $\eta = \alpha \sin p\,\omega$, $\lambda = q\,\omega$ gilt, eine neue Variable

$$T = \xi \cos n\,\lambda + \eta \sin n\,\lambda = \alpha \cos(p - n\,q)\,\omega + \delta T$$

ein. Für die ungestörte Bewegung zweiter Gattung ist also $T = \alpha = \text{const}$, für die gestörte aber, für die $p - n\,q \neq 0$, aber sehr klein ist, wird T einen Term von sehr langer Periode enthalten. Wenn wir demnach F nach Potenzen von ξ und η entwickeln, wird man aus dieser Entwicklung langperiodische Glieder von der Form $A_i T^i$ absondern können. Da T aber den Faktor α enthält, wird bei sehr kleinem α das Glied mit der ersten Potenz von T überwiegen.

Setzt man also

$$S = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2); \quad T = \xi \cos n\,\lambda + \eta \sin n\,\lambda,$$

so wird, abgesehen von kurzperiodischen und unbedeutenden Termen,

$$F = \frac{1}{2L^2} + L - S + m(A + BT)$$

sein, wo A, B gewisse Funktionen von L bedeuten. Die Differentialgleichungen (XIX; 105) nehmen dann die Form

$$\text{(XIX; 110a)} \quad \frac{dL}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} = n\frac{\partial F}{\partial T}(-\xi \sin n\,\lambda + \eta \cos n\,\lambda); \quad \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L},$$

$$\text{(XIX; 110b)} \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial F}{\partial S}\eta + \frac{\partial F}{\partial T}\sin n\,\lambda; \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial S}\xi - \frac{\partial F}{\partial T}\cos n\,\lambda$$

an. Die Gleichungen (XIX; 110a) lassen sich befriedigen, wenn man

$$\xi = T\cos n\,\lambda; \quad \eta = T \sin n\,\lambda; \quad T = \text{const}; \quad S = \frac{1}{2}T^2$$

setzt. Denn dann wird $dL/dt = 0$, $L = \text{const}$ und $d\lambda/dt = -\partial F/\partial L = \text{const}$. Die Gleichungen (XIX; 110b) ergeben dann

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial F}{\partial S} T \sin n\,\lambda + \frac{\partial F}{\partial T}\sin n\,\lambda = -nT \sin n\,\lambda \frac{d\lambda}{dt} = nT\sin n\,\lambda \frac{\partial F}{\partial L},$$

$$-\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial F}{\partial S} T \cos n\,\lambda + \frac{\partial F}{\partial T}\cos n\,\lambda = -nT \cos n\,\lambda \frac{d\lambda}{dt} = nT\cos n\,\lambda \frac{\partial F}{\partial L}.$$

Damit auch sie befriedigt werden, muß also zwischen L und T die Beziehung

$$T\frac{\partial F}{\partial S}+\frac{\partial F}{\partial T}=nT\frac{\partial F}{\partial L}$$

oder, da

$$\frac{\partial F}{\partial S}=-1;\quad \frac{\partial F}{\partial T}=mB;\quad \frac{\partial F}{\partial L}=1-\frac{1}{L^3}+m(A'+B'T),$$

$$\left(A'=\frac{\partial A}{\partial L};\quad B'=\frac{\partial B}{\partial L}\right)$$

ist,

$$T\left[n\left(1-\frac{1}{L^3}\right)+1\right]=m[B-nA'T-nB'T^2]$$

bestehen.

Vernachlässigt man, unter der Voraussetzung, daß T klein ist, Glieder von der Ordnung mT, mT^2, so kann man auch schreiben

$$nT\left[\frac{n+1}{n}-\frac{1}{L^3}\right]=mB. \tag{XIX; 111}$$

Für $m=0$ zerfällt diese Beziehung in die beiden getrennten

$$T=0\quad\text{und}\quad \frac{1}{L^3}=\frac{n+1}{n}=\nu+1.$$

Sie ist also erfüllt 1. für alle Kreisbahnen (Ausgangslösungen aller periodischer Bahnen erster Gattung mit beliebiger mittlerer Bewegung) und 2. für alle Bahnen beliebiger Exzentrizität, deren mittlere Bewegung dem kritischen Wert entspricht. Ist dagegen m zwar klein, aber von Null verschieden, so ist die rechte Seite von (XIX; 111) klein und nahezu konstant. Für periodische Lösungen in unmittelbarer Nähe der Singularität $T=0$, $\nu=1/n$ besteht also zwischen ν und T die genäherte Beziehung

$$T\left(\nu-\frac{1}{n}\right)=\text{const},$$

die in der νT-Ebene einer gleichseitigen Hyperbel mit den Asymptoten $\nu=1/n$ und $T=0$ entspricht. Damit ist plausibel gemacht, daß die periodischen Lösungen erster Gattung analytisch in solche zweiter Gattung übergehen, wenn sich die mittleren Bewegungen einem der kritischen Werte nähern.

Dieses Ergebnis, das durch eine keineswegs allen Anforderungen mathematischer Strenge genügende Schlußweise erzielt wurde, stimmt dennoch bemerkenswert gut mit dem überein, was man auch auf Grund heuristischer Überlegungen erwarten könnte. Numerische Versuche, die auf Anregung des Verfassers von J. SCHUBART mit der elektronischen Rechenanlage des Astronomischen Recheninstituts in Heidelberg durchgeführt worden sind, bestätigen diesen Befund und damit die Berechtigung des POINCARÉschen Verfahrens.

Diese Versuche, die Verhältnisse in der Umgebung der Hecuba-Lücke numerisch zu überprüfen, hatten folgende Ergebnisse:

Im rotierenden System des ebenen „problème restreint" (Koordinatenanfang im Schwerpunkt Sonne–Jupiter, Sonnenmasse 1, Jupitermasse $m = 1:1047.35$, Koordinaten der Sonne $[m/(1+m), 0]$, Koordinaten des Jupiter $[-1/(1+m), 0]$) wurden, von verschiedenen Punkten $(x_0, 0)$ der positiven x-Achse aus, Bahnen mit den Anfangsgeschwindigkeiten $(0, \dot{y}_0)$ berechnet und durch Variation von $\dot{y}_0$ diejenigen Bahnen bestimmt, die im rotierenden System einfach-periodisch sind. Die ungestörte Kreisbahn mit halber Jupiterperiode ($\nu' = 2$, $\nu = \nu' - 1 = 1$) würde etwa bei $x_0 = (1+\nu)^{-2/3} = 0.630$ beginnen. Für ein kurzes Intervall um diesen kritischen Wert (etwa für $0.61 < x_0 < 0.66$) findet man keine periodischen Lösungen, für kleinere und größere x_0 außerhalb dieses Intervalls dagegen je zwei, die verschiedenen Werten für die Anfangsgeschwindigkeit, die Umlaufszeit bzw. mittlere Bewegung und die Jacobische Konstante entsprechen. Schubart berechnete insgesamt zehn periodische Bahnen, und zwar je fünf mit mittleren Bewegungen, die unterhalb bzw. oberhalb des kritischen Wertes $\nu = 1$ liegen.

Nachstehende Tabelle gibt die hauptsächlichsten Daten dieser Rechnung. Es bedeuten: C die Jacobische Konstante, ν die mittlere Bewegung im rotierenden System, x_0 die Abszisse des Startpunktes auf der Jupiter abgewandten Seite, y_1 die zu $x = 0$ gehörige Ordinate nach einem Viertel des synodischen Umlaufs, die gleichzeitig sehr nahe gleich dem Maximum von $y(t)$ ist, x_2 diejenige Abszisse, bei der die periodische Bahn nach einem halben synodischen Umlauf die x-Achse wiederum überschreitet, $\dot{y}_0$ schließlich die Startgeschwindigkeit. Die Bedeutung der drei letzten Spalten wird weiter unten erklärt werden.

Die periodischen Bahnen sind symmetrisch zur x-Achse, aber nicht symmetrisch zur y-Achse, obwohl die vier der zehn Bahnkurven, die in Abb. 62 und 63 aufgezeichnet sind, Symmetrie in bezug auf beide Achsen vermuten lassen. Das liegt daran, daß die störende Masse, die eine Asymmetrie der Kurven in bezug auf die Ordinatenachse bewirkt, sehr klein ist. Diese Asymmetrie tritt aber in der Tabelle in den kleinen Unterschieden zwischen x_0 und $-x_2$ hervor. Die Zahlenwerte der Tabelle, die neunstellig vorgelegen haben,

Nr.	C	ν	x_0	y_1	x_2	$\dot{y}_0$	x_1	a	ε
1	3.112	0.733	0.700	0.687	−0.696	0.491	0.698	0.693	−0.008
2	3.144	0.863	0.670	0.651	−0.668	0.545	0.669	0.660	−0.014
3	3.168	0.964	0.670	0.605	−0.668	0.522	0.669	0.637	−0.050
4	3.166	0.979	0.700	0.568	−0.699	0.433	0.700	0.634	−0.104
5	3.149	0.984	0.750	0.515	−0.751	0.294	0.750	0.633	−0.186
6	3.145	1.004	0.500	0.759	−0.497	1.056	0.498	0.629	+0.207
7	3.175	1.011	0.570	0.686	−0.568	0.817	0.569	0.627	+0.093
8	3.186	1.031	0.600	0.647	−0.598	0.718	0.599	0.623	+0.040
9	3.212	1.124	0.600	0.611	−0.598	0.699	0.599	0.605	+0.010
10	3.266	1.316	0.570	0.573	−0.568	0.759	0.569	0.571	+0.004

sind hier nur auf drei Dezimalstellen abgerundet wiedergegeben worden, was zur Illustrierung der Vorgänge völlig genügt.

Abb. 62 zeigt die Bahnen 1 und 10, deren mittlere Bewegungen von dem kritischen Wert $\nu = 1$ am meisten abweichen. Diese periodischen Bahnen ge-

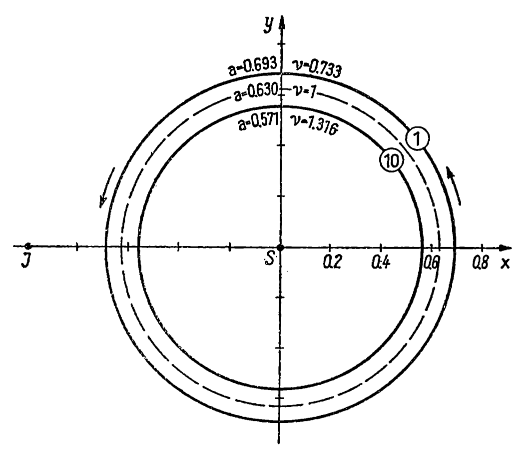


Abb. 62. Periodische Bahnen in weiterem Abstand von der Hecuba-Lücke ($\nu = 1$)
--- ungestörte Kreisbahn $\nu = 1$

hören offensichtlich noch ganz der ersten Gattung an und unterscheiden sich nur wenig von Kreisen. In Abb. 63 sind dagegen die Bahnen 5 und 6 dargestellt, deren mittlere Bewegungen nur wenig kleiner bzw. größer als 1 sind. Sie haben ovale Gestalt: Extrema des Abstandes von der Sonne treten beim Durchgang durch die x-Achse und in sehr großer Nähe des Durchgangs durch

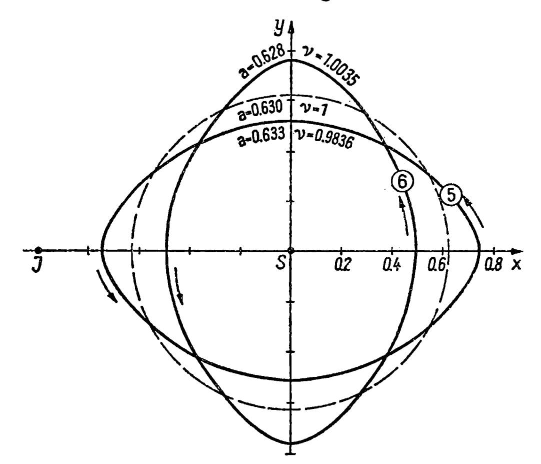


Abb. 63. Periodische Bahnen in geringem Abstand von der Hecuba-Lücke ($\nu = 1$)
--- ungestörte Kreisbahn $\nu = 1$

die y-Achse ein. Für die periodische Lösung 5 ($\nu < 1$) steht der Planetoid bei den Durchgängen durch die x-Achse (Sonnenabstände x_0 bzw. $-x_2$) im Aphel, beim Durchgang durch die y-Achse (Sonnenabstände $\pm y_1$) sehr nahe dem Perihel der Bahn. Für die Lösung 6 ($\nu > 1$) gilt dasselbe, wenn man Perihel und Aphel vertauscht. Für periodische Lösungen in großer Nähe der Hecuba-Lücke sind also die Exzentrizitäten der oskulierenden Bahnen nicht mehr klein von der Ordnung der störenden Masse: Diese Lösungen gehören daher der zweiten Gattung an.

Um eine ungefähre Vorstellung von der Exzentrizität der gestörten periodischen Bahnen im festen System zu erlangen (die ja nur gewisse, bei Annäherung an die kritische Stelle immer geringer werdende Ähnlichkeit mit KEPLERschen Ellipsen haben), setzen wir, in Anlehnung an die Bezeichnungen bei der Ellipse, für die mittleren Sonnenabstände in den Apsiden

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_0 - x_2) = a(1 - \varepsilon),$$
$$y_1 \qquad\qquad = a(1 + \varepsilon),$$

woraus man

$$a = \frac{1}{2}(x_1 + y_1),$$
$$\varepsilon = \frac{1}{2a}(y_1 - x_1)$$

erhält. Man kann a als den mittleren Sonnenabstand bezeichnen, und man wird finden, daß diese Größe mit dem aus $\nu = a^{-3/2} - 1$ folgendem a fast genau übereinstimmt. Die Größe ε vertritt die Exzentrizität einer Ellipse mit

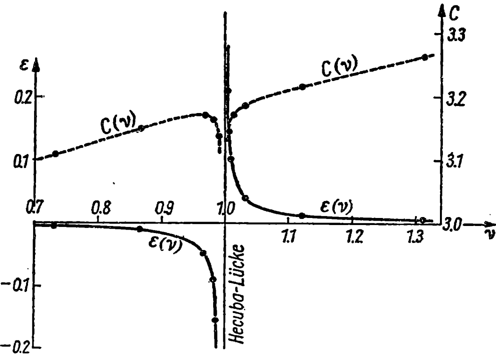


Abb. 64. Exzentrizitätsmodul $\varepsilon = (y_1 - x_1)/2a$ (——) und JACOBIsche Konstante C (– – –) als Funktion der mittleren Bewegung periodischer Bahnen in der Umgebung der Hecuba-Lücke

der Periheldistanz x_1 (drittletzte Spalte) und der Apheldistanz y_1; sie ist also positiv oder negativ, je nachdem das Perihel auf der x- oder der y-Achse liegt.

Abgerundete Werte der Größen a und ε findet man in den beiden letzten Spalten der Tabelle. Abb. 64 zeigt ε und C als Funktionen der mittleren Be-

wegung ν. Die Kurve $\varepsilon = \varepsilon(\nu)$ besitzt genau die Eigenschaften, die nach POINCARÉ der Variablen $T = T(\nu)$ zukommt, die ja auch der Exzentrizität proportional ist. Sehr merkwürdig ist das Verhalten der JACOBIschen Konstanten, die für die Lösungen der ersten Gattung vor und nach der Kommensurabilität stetig und fast linear anwächst, aber bei Annäherung an die kritische Stelle von beiden Seiten her stark abfällt. Um zu entscheiden, was bei größerer Annäherung an die Kommensurabilität und in der Kommensurabilität selbst passiert, reichen diese Versuche noch nicht aus. Die Gestalt der Lösungen 5 und 6 läßt aber vermuten, daß sich bei weiterer Annäherung an $\nu = 1$ Spitzen auf der x- bzw. y-Achse bilden, in die der Planet mit Nullgeschwindigkeit hineinläuft. Ähnliche Verhältnisse sind aus der HILLschen Mondtheorie (Abschnitt 100) bekannt, die in Kapitel XXI noch ausführlicher behandelt werden wird.

KAPITEL XX

DIE BEWEGUNG DES MONDES

173. *Vorbemerkungen und Geschichtliches*

Die Theorie der Mondbewegung ist eines der schwierigsten, aber auch reizvollsten Gebiete der Himmelsmechanik. Wie kaum ein anderer Spezialfall der Theorie der Bewegung der Himmelskörper unseres Sonnensystems sind die Bedingungen des allgemeinen Dreikörperproblems so rein erfüllt wie im Falle Sonne–Erde–Mond; denn die Bewegungen dieser drei Körper werden zwar merklich, aber doch nur geringfügig durch die Anziehungskräfte der übrigen Körper des Sonnensystems gestört. Die direkten Störungseinflüsse der großen Planeten, die auf Erde und Mond fast gleich nach Betrag und Richtung sind, spielen übrigens eine viel unbedeutendere Rolle als die indirekten, die dadurch entstehen, daß der geozentrische Ort der Sonne (die hier als machtvoller Störkörper auftritt) durch die störenden Kräfte der Planeten eine Verschiebung erleidet. In einer strengen Theorie des Mondes müssen natürlich diese Störungen berücksichtigt werden, ihre Einflüsse können aber auch nachträglich an die Mondkoordinaten angebracht werden, nachdem das *Hauptproblem* („*main problem*") gelöst ist, das keine weiteren Körper als Sonne, Erde und Mond betrachtet und diese als Massenpunkte bzw. als kugelförmig-symmetrisch aufgebaute Körper ansieht. Die zusätzlichen Variationen der Mondbewegung, die von der dynamischen Abplattung der Erde (und gegebenenfalls auch des Mondes) herrühren, lassen sich ebenfalls nachträglich berücksichtigen.

Auch das Hauptproblem, mit dem wir uns in diesem Kapitel vorwiegend zu beschäftigen haben, ist schon schwierig genug. Zwar kann man es gerade noch als ein „Störungsproblem" behandeln, indem man als intermediäre Bahn des Mondes um die Erde eine KEPLERsche Ellipse annimmt, deren Elemente durch die Anziehungskraft der Sonne gestört werden. Im Gegensatz zu den Störungen der Planetenbewegung um die Sonne durch andere Planeten sind aber die Sonnenstörungen der Mondbewegung so beträchtlich, daß sie nicht wie jene als kleine Größen erster Ordnung angesehen werden dürfen, deren Quadrate und höhere Potenzen man ganz oder wenigstens in einer ersten, nicht allzu scharfen Ansprüchen schon genügenden Näherung vernachlässigen darf.

Eine gewisse Erleichterung dieser schwierigen Aufgabe folgt aus der Tatsache, daß die Entfernung der Sonne von Erde und Mond im Verhältnis zum Abstand Erde–Mond sehr groß ist. Man begeht daher nur geringfügige Fehler, wenn man die Bewegung des Massenmittelpunktes Erde–Mond (eines Punktes, der noch innerhalb des Erdkörpers liegt) um die Sonne als eine KEPLERsche Ellipse ansieht. Wenn man das tut, also die Bewegung der Sonne als des störenden Körpers relativ zu diesem Massenmittelpunkt als bekannt voraussetzen darf, so beschränkt sich das System der Differentialgleichungen der Relativbewegungen des Systems der drei Körper auf eine einzige vektorielle Differentialgleichung für den Ortsvektor des Mondes in bezug auf die Erde.

Um die Berechtigung dieses Verfahrens zu zeigen, bedienen wir uns der JACOBIschen Koordinaten. Es seien (Abb. 65) E, M und S die Örter von Erde, Mond und Sonne, m_1, m_2, m_3 die Massen dieser Körper, r, ϱ, σ die Abstände $\overline{EM}$, $\overline{MS}$, $\overline{SE}$. Ferner sei G der Massenmittelpunkt (Baryzentrum) Erde–Mond, s der Abstand der Sonne von G und φ der Winkel $\sphericalangle SGM$. Schließlich bezeichnen wir mit $\mathfrak{p}$ den geozentrischen Ortsvektor des Mondes und mit $\mathfrak{q}$ den baryzentrischen Ortsvektor der Sonne. Die Koordinaten dieser beiden Vektoren sind dann die JACOBIschen Koordinaten dieses Systems. Die Differentialgleichungen, denen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ genügen, leiten wir aus (XI; 64) ab, indem wir die dort benutzten Bezeichnungen (Abb. 5, S. 44) in die obigen (Abb. 65) überführen. Statt (XI; 64) erhalten wir die gleichbedeutenden Gleichungen

$$\text{(XX; 1)}\quad \begin{cases} \ddot{\mathfrak{p}} = -k^2 \dfrac{m_1+m_2}{r^3}\,\mathfrak{p} - k^2 \dfrac{m_3}{m_1+m_2}\left\{\left(\dfrac{m_1}{\varrho^3}+\dfrac{m_2}{\sigma^3}\right)\mathfrak{p} + \right. \\ \qquad \left. + (m_1+m_2)\left(\dfrac{1}{\sigma^3}-\dfrac{1}{\varrho^3}\right)\mathfrak{q}\right\}, \\ \ddot{\mathfrak{q}} = -k^2 \dfrac{m_1+m_2+m_3}{m_1+m_2}\left\{\left(\dfrac{m_2}{\varrho^3}+\dfrac{m_1}{\sigma^3}\right)\mathfrak{q} + \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(\dfrac{1}{\sigma^3}-\dfrac{1}{\varrho^3}\right)\mathfrak{p}\right\}. \end{cases}$$

Um zu zeigen, innerhalb welcher Genauigkeit es gestattet sein wird, $\mathfrak{q}(t)$ als Ortsvektor einer KEPLERschen Ellipse zu deuten, drücken wir ϱ und σ durch r, s und φ aus. Setzen wir

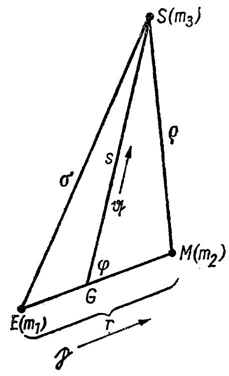


Abb. 65. Dreieck Erde (m_1) – Mond (m_2) – Sonne (m_3)

$$\overline{EG} = \beta r; \quad \overline{GM} = \alpha r,$$

dann ist

$$\beta = \frac{m_2}{m_1+m_2}; \quad \alpha = \frac{m_1}{m_1+m_2}; \quad \alpha+\beta = 1,$$

und in den Dreiecken $\triangle\, SGM$ und $\triangle\, SGE$ ist nach dem ebenen Kosinussatz

$$\varrho^2 = s^2 + (\alpha r)^2 - 2\alpha r s \cos\varphi = s^2(1 - 2\alpha\gamma\cos\varphi + \alpha^2\gamma^2),$$
$$\sigma^2 = s^2 + (\beta r)^2 + 2\beta r s \cos\varphi = s^2(1 + 2\beta\gamma\cos\varphi + \beta^2\gamma^2),$$

wenn noch $\gamma = r/s$ gesetzt wird. Angenähert ist

$$\alpha \approx 1; \quad \beta \approx \frac{1}{80}; \quad \gamma \approx \frac{1}{400}.$$

Man kann daher ϱ^{-3} und σ^{-3} durch rasch konvergierende, nach Potenzen von

$$\alpha\gamma \approx \frac{1}{400}; \quad \beta\gamma \approx \frac{1}{32000}$$

fortschreitende Reihen

$$
\text{(XX; 2)}\quad\left\{\begin{aligned}
\varrho^{-3} &= s^{-3}\Big\{1 + 3\alpha\gamma\cos\varphi - \frac{3}{2}\alpha^2\gamma^2(1 - 5\cos^2\varphi) - \\
&\qquad - \frac{5}{2}\alpha^3\gamma^3\cos\varphi(3 - 7\cos^2\varphi) - \cdots\Big\},\\
\sigma^{-3} &= s^{-3}\Big\{1 - 3\beta\gamma\cos\varphi - \frac{3}{2}\beta^2\gamma^2(1 - 5\cos^2\varphi) + \\
&\qquad + \frac{5}{2}\beta^3\gamma^3\cos\varphi(3 - 7\cos^2\varphi) + \cdots
\end{aligned}\right.
$$

ausdrücken. Da nun

$$
\begin{aligned}
&m_1\alpha - m_2\beta = (m_1 + m_2)(\alpha^2 - \beta^2); \quad m_2\alpha - m_1\beta = 0,\\
&m_1\alpha^2 + m_2\beta^2 = (m_1 + m_2)(\alpha^3 + \beta^3); \quad m_2\alpha^2 + m_1\beta^2 = (m_1 + m_2)\alpha\beta(\alpha + \beta),\\
&m_1\alpha^3 - m_2\beta^3 = (m_1 + m_2)(\alpha^4 - \beta^4); \quad m_2\alpha^3 - m_1\beta^3 = (m_1 + m_2)\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2),\\
&\alpha + \beta = 1; \quad \alpha^2 - \beta^2 = 1 - 2\beta; \quad \alpha^3 + \beta^3 = 1 - 3\beta + 3\beta^2,\\
&\alpha^4 - \beta^4 = 1 - 4\beta + 6\beta^2 - 4\beta^3; \quad \alpha\beta(\alpha + \beta) = \alpha\beta = \beta(1 - \beta),\\
&\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2) = \alpha\beta(\alpha - \beta) = \beta(1 - 3\beta + 2\beta^2),
\end{aligned}
$$

so erhält man aus (XX; 2) für die in (XX; 1) vorkommenden Ausdrücke in ϱ^{-3} und σ^{-3}

$$
\begin{aligned}
\frac{m_1}{\varrho^3} + \frac{m_2}{\sigma^3} &= \frac{m_1 + m_2}{s^3}\Big\{1 + 3\gamma(\alpha^2 - \beta^2)\cos\varphi - \frac{3}{2}\gamma^2(\alpha^3 + \beta^3)(1 - 5\cos^2\varphi) - \\
&\qquad - \frac{5}{2}\gamma^3(\alpha^4 - \beta^4)\cos\varphi(3 - 7\cos^2\varphi) - \cdots\Big\},\\
\frac{m_2}{\varrho^3} + \frac{m_1}{\sigma^3} &= \frac{m_1 + m_2}{s^3}\Big\{1 - \frac{3}{2}\gamma^2\alpha\beta(1 - 5\cos^2\varphi) - \\
&\qquad - \frac{5}{2}\gamma^2\alpha\beta(\alpha - \beta)\cos\varphi(3 - 7\cos^2\varphi) + \cdots\Big\},\\
\frac{1}{\sigma^3} - \frac{1}{\varrho^3} &= -\frac{1}{s^3}\Big\{3\gamma\cos\varphi - \frac{3}{2}\gamma^2(\alpha^2 - \beta^2)(1 - 5\cos^2\varphi) - \\
&\qquad - \frac{5}{2}\gamma^3(\alpha^3 + \beta^3)\cos\varphi(3 - 7\cos^2\varphi) - \cdots\Big\},
\end{aligned}
$$

also, wenn man diese in (XX; 1) einsetzt,

$$
\text{(XX; 3)}\quad\left\{\begin{aligned}
\ddot{\mathfrak{p}} &= -k^2\frac{m_1 + m_2}{r^3}\mathfrak{p} - k^2\frac{m_3}{s^3}\{\mathfrak{p}[1 + f(\varphi)] - \gamma\,\mathfrak{q}[3\cos\varphi + g(\varphi)]\},\\
\ddot{\mathfrak{q}} &= -k^2\frac{m_1 + m_2 + m_3}{s^3}\{\mathfrak{q}[1 + h(\varphi)] - \frac{1}{\gamma}\mathfrak{p}\,k(\varphi)\}
\end{aligned}\right.
$$

mit

$$\text{(XX; 3a)}\quad \begin{cases} f(\varphi) = 3\gamma(1 - 2\beta)\cos\varphi - \frac{3}{2}\gamma^2(1 - 3\beta + 3\beta^2)(1 - 5\cos^2\varphi) - \\ \qquad - \frac{5}{2}\gamma^3(1 - 4\beta + 6\beta^2 - 4\beta^3)\cos\varphi(3 - 7\cos^2\varphi) - \cdots, \\ g(\varphi) = -\frac{3}{2}\gamma(1 - 2\beta)(1 - 5\cos^2\varphi) - \\ \qquad - \frac{5}{2}\gamma^2(1 - 3\beta + 3\beta^2)\cos\varphi(3 - 7\cos^2\varphi) - \cdots, \\ h(\varphi) = -\frac{3}{2}\gamma^2\beta(1 - \beta)(1 - 5\cos^2\varphi) - \\ \qquad - \frac{5}{2}\gamma^3\beta(1 - 3\beta + 2\beta^2)\cos\varphi(3 - 7\cos^2\varphi) - \cdots, \\ k(\varphi) = \gamma^2\beta(1 - \beta)\{3\cos\varphi + g(\varphi)\}. \end{cases}$$

Die Beträge der Vektoren $\mathfrak{p}$ und $\gamma\,\mathfrak{q}$ (und daher auch die von $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}/\gamma$) sind von der gleichen Größenordnung. Es sind ferner

$$f(\varphi) \text{ und } g(\varphi) \text{ von der Ordnung } \gamma \approx \frac{1}{400},$$

$$h(\varphi) \text{ und } k(\varphi) \text{ von der Ordnung } \beta\gamma^2 \approx \frac{1}{128}\cdot 10^{-5} < 10^{-7}.$$

Man kann also mit sehr geringer Vernachlässigung

$$\ddot{\mathfrak{q}} = -k^2\frac{m_1 + m_2 + m_3}{s^3}\,\mathfrak{q}, \qquad (|\mathfrak{q}| = s)$$

setzen, d.h. $\mathfrak{q}(t)$ als den Ortsvektor einer KEPLERschen Ellipse mit dem Brennpunkt im Massenmittelpunkt G von Erde und Mond ansehen.

Es bleibt dann, $\mathfrak{q}(t)$ als bekannte Funktion der Zeit vorausgesetzt, nur die vektorielle Differentialgleichung

$$\text{(XX; 4a)}\qquad \ddot{\mathfrak{p}} = -k^2\frac{m_1 + m_2}{r^3}\,\mathfrak{p} + \mathfrak{F}$$

zu lösen, mit der Störbeschleunigung

$$\text{(XX; 4b)}\qquad \mathfrak{F} = -k^2\frac{m_3}{s^3}\left\{\mathfrak{p}[1 + f(\varphi)] - \frac{r}{s}\,\mathfrak{q}[3\cos\varphi + g(\varphi)]\right\},$$

deren Betrag, verglichen mit der Beschleunigung in der intermediären Kegelschnittbahn

$$\text{(XX; 4c)}\qquad \ddot{\mathfrak{p}} = -k^2\frac{m_1 + m_2}{r^3}\,\mathfrak{p},$$

von der Größenordnung $m_3 r^3/(m_1 + m_2) s^3$, d.h., da $m_3/(m_1 + m_2) \approx {}^1/_3 \cdot 10^6$, $r/s = \gamma \approx {}^1/_{400}$, von der Ordnung ${}^1/_{192}$ ist (genauer ${}^1/_{178}$, wenn man für γ den mittleren Wert ${}^1/_{390}$ einsetzt). Dieser Betrag ist immerhin so klein, daß der kleine Fehler, der entsteht, wenn man für $\mathfrak{q}(t)$ die Bewegung in der KEPLERschen Ellipse einsetzt, auch bei recht großen Ansprüchen an Genauigkeit unter die Merklichkeitsschwelle herabgedrückt wird. Andererseits ist aber der Störungsbetrag selbst erheblich größer als derjenige, den wir in den planetaren Störungsproblemen im allgemeinen antreffen. Die intermediäre elliptische Bewegung (XX; 4c), die bei Vernachlässigung der Störbeschleunigung $\mathfrak{F}$ erhalten wird, stellt daher nur eine sehr rohe und allenfalls nur für sehr kurze Zeitintervalle brauchbare Näherungslösung des Mondproblems dar. Dazu kommt, daß wegen der großen Nähe des Mondes die Anforderungen an die prozentuale Genauigkeit der Koordinaten bedeutend größer sind als bei den Planeten, so daß also auch die Störungen entsprechend genauer berechnet werden müssen. Immerhin werden sich bei Beschränkung auf die Hauptglieder der Störung bereits wesentliche Züge der Mondbewegung abzeichnen, wenn auch die numerischen Werte der auf diese Weise ermittelten „Ungleichheiten" („Gleichungen" oder „Anomalien") der Mondbewegung nur größenordnungsmäßig mit den wahren übereinstimmen werden.

Diese besonderen Schwierigkeiten bei der Integration der Differentialgleichungen des Mondproblems haben es mit sich gebracht, daß im Laufe der Zeit zahlreiche und verschiedenartige Versuche zu ihrer Lösung unternommen worden sind. Eine vollständige Würdigung aller dieser Theorien würde ein ganzes Buch füllen. Das ist in bewunderungswürdiger Weise durch F. TISSERAND geschehen, der im dritten Band seines „Traité de mécanique céleste" sämtliche bis etwa 1890 bekannt gewordenen Mondtheorien ausführlich behandelt hat. Beginnend mit NEWTON, der die Reihe dieser Versuche mit einer noch im wesentlichen geometrischen Analyse dieses Problems eröffnet, finden wir in der Folge fast alle großen Namen der klassischen Epoche der Astronomie wieder, wie CLAIRAUT, D'ALEMBERT, EULER, LAPLACE, DAMOISEAU, POISSON, PONTÉCOULANT, DELAUNAY, HANSEN, HILL und ADAMS, eine Reihe, die bis heute nur noch durch wenige Namen ergänzt werden kann, unter denen E. W. BROWN hervorragt, der Schöpfer der modernsten und genauesten Theorie der Mondbewegung, die heute als Grundlage aller astronomischen Ephemeriden dieses Himmelskörpers dient. Wir werden dieser Theorie im Zusammenhang mit den übrigen Problemen der absoluten Störungen im dritten Band dieses Werkes besondere Aufmerksamkeit widmen. Hier, wo es uns nur darauf ankommt, Form und Ursache der hauptsächlichsten Anomalien der Mondbewegung herauszuarbeiten und verständlich zu machen, begnügen wir uns mit einer kurzen Würdigung der Methoden von DELAUNAY und HILL. Die Mondtheorie des ersteren beruht auf der Möglichkeit, intermediäre Lösungen eines Differentialgleichungssystems von der Art des hier vorliegenden aufzusuchen, indem man zunächst *einen* hervorragenden periodischen Term der Störungsfunktion herausgreift und die übrigen vernachlässigt. Das so vereinfachte System läßt sich integrieren und liefert eine erste Näherung. Durch mehrmalige Wiederholung dieses Prozesses, bei dem weitere Störungsterme

nach und nach verarbeitet werden und dessen einzelne Schritte nach gleichem Algorithmus vor sich gehen, gelangt man schließlich an eine intermediäre Lösung, die nur noch Störungen von so geringen Beträgen übrigläßt, daß diese nach den auch in den Planetentheorien üblichen Methoden berücksichtigt werden können. Wir werden das Prinzip dieser Methode im Abschnitt 188 anwenden, wo es sich darum handelt, die Bewegung eines Satelliten im Gravitationsfeld eines abgeplatteten Planeten zu untersuchen. Die Arbeiten von HILL, die auf ähnliche Methoden zurückgehen, wie sie schon 1772 von EULER vorgeschlagen worden sind, behandeln sehr gründlich und mit interessanten mathematischen Hilfsmitteln einzelne Periodizitäten der Mondbewegung, insbesondere die von TYCHO BRAHE empirisch gefundene „Variation" und einige andere große Ungleichheiten. Diese Untersuchungen haben auch die Grundlage der BROWNschen Mondtheorie gebildet.

Ein sehr interessanter Versuch, die hauptsächlichsten Störungen der Mondbewegung (Evektion, Variation, jährliche Gleichung, die säkularen Bewegungen der Apsiden und der Knoten sowie die hauptsächlichsten Störungen der ekliptikalen Breite des Mondes) auf elementare Weise verständlich zu machen und ihre numerischen Werte genähert abzuleiten, ist von A.F. MÖBIUS in seinem Büchlein „Die Elemente der Mechanik des Himmels" (Leipzig 1843) unternommen worden. Dem Studierenden, der die Mühe nicht scheut, sich in die etwas umständliche Ausdrucksweise des vorigen Jahrhunderts einzulesen, wird die Lektüre dieses prächtigen Buches sicher Genuß bereiten und sehr dazu beitragen, sein Verständnis für die charakteristischen Eigenschaften der komplizierten Bahnbewegung des Erdtrabanten zu vertiefen.

174. *Die Variationsbahn des Mondes*

Die Störbeschleunigung $\mathfrak{F}$, durch die eine intermediäre elliptische Bewegung des Mondes deformiert wird, läßt sich nach (XX; 4b) in zwei Komponenten mit den Richtungen von $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}$, den Ortsvektoren von Sonne und Mond, zerlegen. Es werden also folgende Größen Art und Beträge der Störungen wesentlich bestimmen:

1. die Neigung der intermediären Mondbahn gegen die Ekliptik (deren Lage man als unveränderlich ansehen kann, da von Störungen der Erdbewegung durch die Planeten abgesehen werden soll),
2. die Exzentrizitäten der (baryzentrischen) Sonnenbahn und der intermediären Mondbahn,
3. das Verhältnis γ der Abstände von Mond und Sonne bzw. das Verhältnis der Parallaxen von Sonne und Mond,
4. das Verhältnis β der Mondmasse zur Gesamtmasse Erde–Mond.

G.W. HILL hat versucht, an eine genaue Lösung des Mondproblems schrittweise heranzukommen, indem er von möglichst einfachen Annahmen über die Vorbedingungen der Bewegung ausgeht. Wir haben in Abschnitt 100 die von HILL vorgeschlagene einfachste Formulierung des Problems bereits kennengelernt. Es wird angenommen:

Zu 1: Die Bewegungen der Sonne und des Mondes bezüglich der Erde gehen in derselben Ebene (der Ekliptik) vor sich; die Neigung der Mondbahnebene gegen die Ekliptik ist also Null.

Zu 2: Die Exzentrizität der Sonnenbahn ist Null.

Zu 3: Die Parallaxe der Sonne ist Null ($s \to \infty$, aber $m_3 s^{-3} = \text{const}$); d. h., die Richtung der Störbeschleunigung, die auf das System Erde–Mond durch die Sonne ausgeübt wird, soll unabhängig von der Phase der Mondbewegung als parallel zur Richtung Erde–Sonne angenommen werden, während in Wirklichkeit die Störbeschleunigung des Mondes von dieser Richtung maximal um rund 9′ (in den Quadraturstellungen des Mondes) abweicht.

Zu 4: Die Masse des Mondes wird als verschwindend klein angesehen ($\beta = 0$).

In einem gleichmäßig rotierenden $\xi\eta$-Koordinatensystem, dessen Umdrehungsperiode gleich dem siderischen Jahr ist, stehe die Erde im Koordinatenanfang, und die Sonne stehe im unendlich fernen Punkt der ξ-Achse. Dann genügt die Bewegung des masselosen Mondes in diesem stark vereinfachten Problem den Differentialgleichungen (XI; 91):

$$\text{(XX; 5)} \qquad \left\{\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= \xi\left(3 - \frac{1}{r^3}\right) = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}, \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= \quad -\frac{\eta}{r^3} \quad = \frac{\partial \Omega}{\partial \eta}, \end{aligned}\right.$$

wo

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2; \quad \Omega = \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{r}$$

ist. Diese Gleichungen haben das JACOBIsche Integral (XI; 92)

$$\text{(XX; 6)} \qquad \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = 3\xi^2 + \frac{2}{r} - C = 2\Omega - C.$$

Wir erinnern uns auch an die Dimensionierung der Einheiten von Masse, Länge und Zeit, die diesen Gleichungen zugrunde liegt: Die Zeiteinheit wurde so gewählt, daß die siderische Umlaufszeit der Erde um die Sonne (bzw. die Rotationsperiode des $\xi\eta$-Systems) den Wert 2π annimmt. Es ist dann die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Systems

$$n = k\sqrt{\frac{M + m}{a^3}} = 1,$$

wenn M, m die Massen von Sonne und Erde, a den Halbmesser der Erdbahn bedeuten. Wählt man nun die Masse der Erde als Masseneinheit, die Einheit der Länge aber so, daß $a^3 = M + m$ ist, so wird $k = 1$, und der Halbmesser der Erdbahn ist

$$a = \sqrt[3]{M + 1} = \sqrt[3]{329391} = 69.062,$$

also rund 69 Längeneinheiten. Hieran ändert sich nichts, wenn man in den Formeln a^3 und $M + 1$ gleichzeitig und in gleichbleibendem Verhältnis gegen ∞ streben läßt, wodurch der Abstand Sonne-Mond aus den Differentialgleichungen verschwindet und die einfache Form der HILLschen Gleichungen (XX; 5) erzielt wird.

Nach den Abschätzungen, die wir im vorigen Abschnitt vorgenommen haben, ist die Störbeschleunigung des Mondes im Vergleich zur Gravitationsbeschleunigung durch die Erde in der ungestörten Bewegung von der Ordnung

$$\frac{m_3}{m_1 + m_2} \frac{r^3}{s^3} = \frac{M}{a^3} r^3 \approx r^3,$$

wenn, wie oben, $m_3 = M$, $m_1 = 1$, $m_2 = 0$ und $s = a$ gesetzt wird. Je kleiner r ist, desto weniger fällt also die Störung durch die Sonne ins Gewicht. Für den mittleren Abstand des Mondes von der Erde, der in den HILLschen Einheiten

$$\bar{r} = 69.062 \frac{384.7 \cdot 10^3}{149.6 \cdot 10^6} = 0.1776 \tag{XX; 7}$$

beträgt, ergibt sich also

$$\bar{r}^3 = \frac{1}{178.2},$$

übereinstimmend mit den Abschätzungen im vorigen Abschnitt.

Für Satelliten, die in kleineren Abständen als der Mond um die Erde laufen, etwa für $r < 0.1$, ist die Störbeschleunigung durch die Sonne im Verhältnis zur Gravitationsbeschleunigung durch die Erde wesentlich geringer ($r^3 < 10^{-3}$), also von der Ordnung der Störungen im planetaren Dreikörperproblem. Bei engen Satellitenbahnen darf man also die Störungen durch die Sonne als klein von der ersten Ordnung ansehen und daher auch die Ergebnisse der POINCARÉschen Untersuchungen über die Existenz von periodischen Lösungen auf das vorliegende Problem übertragen. Beschreibt etwa, bei Vernachlässigung der Störungen durch die Sonne, ein masseloser Satellit eine Kreisbahn um die Erde (die ja auch im rotierenden System periodisch mit der Periode T = synodische Umlaufszeit ist), so gibt es auch dann, wenn der die störende Kraft der Sonne charakterisierende Parameter von Null verschieden (nämlich von der Ordnung r^3) ist, eine Lösung erster Gattung, die im rotierenden System periodisch ist, sich von der ungestörten Kreisbahn nur wenig unterscheidet und deren Periode ebenfalls T ist. Eine Ausnahme bilden wiederum Bahnen mit der mittleren siderischen Bewegung $\nu' = (k + 1)/k$ bzw. der mittleren synodischen Bewegung $\nu = 1/k$, wo k eine ganze Zahl ist. Wenn sich ν diesen kritischen Werten nähert, werden sich die periodischen Lösungen so stark von Kreisen unterscheiden, daß nur elliptische oder kompliziertere intermediäre Bahnen als Ausgangslösungen brauchbar sind.

Im Falle enger Satellitenbahnen ist im rotierenden System ν eine ziemlich große Zahl, nämlich gleich der Anzahl der synodischen Satellitenumläufe im siderischen Jahr. Auch für den Mond ($\nu = \nu' - 1 \approx 12.4$) ist diese Zahl noch sehr weit von den kritischen Werten $\nu = 1, 1/2, 1/3, \ldots$ entfernt. Trotzdem

wird im Falle des Mondes, für den die Sonnenstörungen bereits ziemlich bedeutend sind, die Abweichung der gestörten periodischen Bahn, deren Existenz der POINCARÉschen Theorie zufolge gesichert ist, von der Kreisform schon merklich sein, und wir können uns auch ein Bild von der Gestalt dieser Abweichung machen, wenn wir uns der Erfahrungen des Abschnitts 172 bedienen. Dort hatten wir festgestellt, daß für $\nu < 1$ die Kreisbahnen in ellipsenartige Ovale übergehen, deren große Achsen mit der Abszissenachse (Richtung nach dem störenden Körper) zusammenfallen, für $\nu > 1$ aber in Ovale mit der großen Achse in der Ordinatenrichtung. Das letztere wird daher auch im Falle des HILLschen Mondproblems zutreffen. Darüber hinaus werden die gestörten periodischen Bahnen symmetrisch zu beiden Achsen verlaufen, da ja der störende Körper in unendlicher Entfernung, also in $\xi = \pm\infty$, angenommen wird; denn das bedeutet, daß die Störungsfunktion, die ja eo ipso symmetrisch zur ξ-Achse ist, auch symmetrisch zur η-Achse verläuft.

Wir können also schon ohne jede Rechnung schließen, daß die HILLschen Differentialgleichungen (XX; 5) für die Mondbewegung eine periodische Lösung der Form zulassen, wie sie in Abb. 66 (in den Abmessungen stark übertrieben) dargestellt ist. In dieser Bahn nimmt der Radiusvektor $\mathfrak{r}$ des Mondes während eines synodischen Monats zwei Minima (in den Syzygien) und zwei Maxima (in den Quadraturen) an, während die Winkelgeschwindigkeit in den Syzygien maximale, in den Quadraturen minimale Werte annimmt. Die wahre (geozentrische) Länge des Mondes weicht daher von der mittleren während eines synodischen Umlaufs zweimal in positivem Sinne (in der Mitte des ersten und dritten Quadranten) und zweimal in negativem Sinne (in der Mitte des zweiten und vierten Quadranten) von der mittleren Länge ab. Diese Störung der Mondlänge mit der Periode eines halben synodischen Monats wurde von TYCHO BRAHE aus den Beobachtungen abgeleitet und ist seither unter dem Namen der „Variation“ bekannt; ihre Amplitude beträgt rund 39 Bogenminuten.

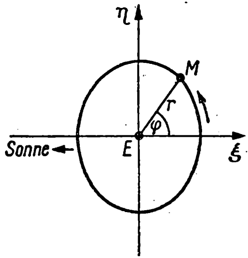


Abb. 66. Variationsbahn des Mondes (Achsenverhältnis stark übertrieben)

Eine Überschlagsrechnung verhilft uns zu genäherten Zahlenangaben über die *Variationsbahn des Mondes*, wie man diese partikuläre, einfach-periodische Lösung der HILLschen Differentialgleichungen kurz bezeichnet.

Ist $\mathfrak{p}(t)$ der Ortsvektor eines bewegten Punktes in einem ebenen Inertialsystem, so läßt sich nach (II; 30) der Beschleunigungsvektor $\ddot{\mathfrak{p}}$ in eine radiale Komponente vom Betrage U und eine zirkulare vom Betrage V zerlegen, und es ist

$$\ddot{\mathfrak{p}} = U\,\mathfrak{r} + V\,\mathfrak{m} = (\ddot{r} - r\,\dot{\psi}^2)\,\mathfrak{r} + (2\dot{r}\,\dot{\psi} + r\,\ddot{\psi})\,\mathfrak{m},$$

wenn $\mathfrak{r}$ den Einheitsvektor in Richtung $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{m}$ den zu $\mathfrak{r}$ normal gerichteten (gegen $\mathfrak{r}$ in positivem Sinne um 90° gedrehten) Einheitsvektor bezeichnet, während r, ψ die Polarkoordinaten des bewegten Punktes sind.

Seien nun r, φ die Polarkoordinaten eines masselosen Satelliten in dem mit der Winkelgeschwindigkeit 1 rotierenden HILLschen System, so ist $\dot{\psi} = \dot{\varphi} + 1$,

und die beiden Komponenten der Mondbeschleunigung haben nach (XI; 93) die Maßzahlen

$$\text{(XX; 8)} \quad \begin{cases} U = \ddot{r} - r(\dot{\varphi} + 1)^2 = -\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{2} r + \dfrac{3}{2} r \cos 2\varphi, \\[2ex] V = 2\dot{r}(\dot{\varphi} + 1) + r\,\ddot{\varphi} = -\dfrac{3}{2} r \sin 2\varphi. \end{cases}$$

Man kann also die Beschleunigung des gestörten Mondes in zwei Teile zerlegen: einen mit den Koordinaten

$$\text{(XX; 9a)} \qquad U_0 = -\frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{2} r^3\right); \quad V_0 = 0,$$

der nur eine radiale Komponente enthält und daher durch eine Zentralkraft bewirkt wird, und einen zweiten mit den periodischen Koordinaten

$$\text{(XX; 9b)} \qquad U_1 = \frac{3}{2} r \cos^2\varphi; \quad V_1 = -\frac{3}{2} r \sin^2\varphi.$$

Da die Variationsbahn angenähert eine zu den Achsen des rotierenden Systems symmetrische Ellipse ist, die nicht erheblich von einer gleichförmig durchlaufenen Kreisbahn verschieden ist und die vom Mond in einem synodischen Monat durchlaufen wird, kann man für die gesuchte Lösung den Ansatz

$$\text{(XX; 10)} \quad \begin{cases} r = a(1 + b_1 \cos 2\nu t + b_2 \cos 4\nu t + \cdots), \\ \varphi = \nu t + c_1 \sin 2\nu t + c_2 \sin 4\nu t + \cdots) \end{cases}$$

versuchen. Die Koeffizienten b_i, c_i werden klein sein und mit wachsendem i rasch gegen Null abnehmen.

Die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Mondes im rotierenden System ist $\nu = 12.3688$; denn im festen System ist ja die mittlere Bewegung der Sonne $n = 1$, die des Mondes $(\nu' = \nu + 1)$ also gleich der Anzahl der siderischen Monate im siderischen Jahr. Es ist daher

$$\nu' = \frac{365.2564}{27.32166} = 13.36875; \quad \nu = \nu' - 1 = 12.36875.$$

Solange man sich in den Entwicklungen (XX; 10) auf Terme nullter und erster Ordnung beschränken kann, genügt es,

$$\text{(XX; 11)} \quad \begin{cases} r = a(1 + b \cos 2\nu t); & \varphi = \nu t + c \sin 2\nu t, \\ \dot{r} = -2ab\nu \sin 2\nu t; & \dot{\varphi} = \nu + 2c\nu \cos 2\nu t, \\ \ddot{r} = -4ab\nu^2 \cos 2\nu t; & \ddot{\varphi} = -4c\nu^2 \sin 2\nu t \end{cases} \qquad (\nu' = \nu + 1)$$

zu setzen. Aus (XX; 8) erhält man dann

$$\text{(XX; 12)} \quad \begin{cases} r^2 U = r^2 \ddot{r} - r^3(\dot{\varphi} + 1)^2 = -1 + \dfrac{1}{2} r^3 + \dfrac{3}{2} r^3 \cos 2\varphi, \\[2ex] r^2 V = 2r^2 \dot{r}(\dot{\varphi} + 1) + r^3 \ddot{\varphi} = -\dfrac{3}{2} r^3 \sin 2\varphi, \end{cases}$$

und es sind a^3 und ν'^{-2} kleine Größen von der Ordnung $^1/_{180}$, während wegen des angenähert erfüllten dritten KEPLERschen Gesetzes $a^3\nu'^2 \approx 1$ ist. Es seien nun b und c klein von derselben Ordnung wie a^3, eine Annahme, deren Berechtigung sich noch erweisen wird. Dann sind die Produkte $b\nu^2$, $b\nu\nu'$, $b\nu'^2$ usw., ebenso wie $a^3\nu^2$, von der nullten Ordnung. Unterdrückt man also Terme von höherer als erster Ordnung, so folgt

$$\text{(XX; 13)}\quad \begin{cases} r^2 U \approx -a^3\nu'^2 - a^3[(4\nu^2 + 3\nu'^2)\,b + 4\nu\nu' c]\cos 2\nu t = \\ \qquad = -1 + \dfrac{1}{2}a^3(1 + 3\cos 2\nu t), \\ r^2 V \approx -4a^3[\nu\nu' b + \nu^2 c]\sin 2\nu t = -\dfrac{3}{2}a^3 \sin 2\nu t. \end{cases}$$

Koeffizientenvergleich ergibt dann

$$\text{(XX; 14)}\quad \begin{cases} a^3\nu'^2 = 1 - \dfrac{1}{2}a^3, \\ 4\nu^2\left[b\left(1 + \dfrac{3}{4}\dfrac{\nu'^2}{\nu^2}\right) + c\dfrac{\nu'}{\nu}\right] = -\dfrac{3}{2}, \\ 4\nu^2\left[b\dfrac{\nu'}{\nu} + c\right] = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Die erste Gleichung (XX; 14) sagt dasselbe aus wie (XX; 9a). Diese lehrt ja, daß die radiale Komponente der Beschleunigung des gestörten Mondes eine Kreisbahn $r = a$ zuläßt, die man sich durch eine NEWTONsche Zentralkraft vom Betrage

$$\frac{k^2(m_1 + m_2)}{a^2} = \frac{1}{a^2}\left(1 - \frac{1}{2}a^3\right)$$

hervorgerufen denken kann, wenn $m_1 + m_2 = m$ die Gesamtmasse Erde + + Mond bedeutet. Es wäre also $k^2 m = 1 - {}^1/_2 a^3$ etwas kleiner als in der ungestörten Bewegung: Die störende Anziehungskraft der Sonne bewirkt also im Mittel eine Verminderung der Anziehungskraft der Erde auf den Mond um ungefähr den 360. Teil. In dieser „mittleren Kreisbahn" würde das dritte KEPLERsche Gesetz in der Form

$$a^3\nu'^2 = k^2 m = 1 - \frac{1}{2}a^3$$

oder, wenn $w = \nu'^{-2} \approx {}^1/_{180}$ gesetzt wird,

$$a^3\left(1 + \frac{w}{2}\right) = w$$

gelten. Das ist aber genau die erste Gleichung (XX; 14). In einer ungestörten Bewegung mit der gleichen Umlaufszeit würde der Mond den Abstand a' haben, und es wäre $a'^3\nu'^2 = 1$. Man könnte also schreiben

$$\text{(XX; 14a)}\quad a^3\left(1 + \frac{1}{2}w\right) = w\,a'^3\nu'^2 = a'^3; \quad a = a'\left(1 - \frac{1}{6}w + \cdots\right).$$

In der gestörten Bewegung ist also der mittlere Abstand des Mondes um etwa den 1080. Teil kürzer als in der ungestörten mit gleicher mittlerer Bewegung.

Die beiden letzten Gleichungen (XX; 14) ergeben mit den obigen Werten für ν und $\nu' = 1 + \nu$

$$\text{(XX; 15)} \qquad \left\{ \begin{aligned} b &= -\frac{3}{2\nu} \frac{2\nu + 1}{3\nu^2 - 2\nu - 1} = -0.0072048, \\ c &= \frac{3}{8\nu^2} - \frac{\nu + 1}{\nu} b = +0.0102386 = 35'.2. \end{aligned} \right.$$

Die Konstante c ist die Amplitude der Variation in Länge. Aus den Beobachtungen und aus der strengen Theorie der Mondbewegung folgt der um etwa 12% größere Wert

$$c = 236''.9 = 39' 29''.99,$$

doch ist das Ergebnis der obigen genäherten Rechnung fast genau mit der strengen Lösung der HILLschen Gleichungen für c_1 in der Entwicklung (XX; 10) identisch, die mit $c_1 = 0.0102114$ nur um etwa 16″ kleiner ist als c in (XX; 15). Ähnliches gilt für $b_1 = -0.0071800$. Die trigonometrischen Reihen (XX; 10) erweisen sich also als außerordentlich rasch konvergent.

Da $b < 0$ ist, folgt, daß r in den Syzygien ($\varphi = 0°, 180°$) Minima, in den Quadraturen ($\varphi = 90°, 270°$) Maxima besitzt. Die Variationsfigur der Mondbewegung ist also, übereinstimmend mit den Folgerungen, die wir aus den Untersuchungen über periodische Lösungen gezogen hatten, einer Ellipse sehr ähnlich, deren große Achse auf der Verbindungsgeraden Erde-Sonne senkrecht steht. Da die Variation in Länge für die Syzygien und Quadraturen verschwindet, wird verständlich, warum (s. Kapitel I) PTOLEMÄUS bei seiner Analyse der Mondbewegung die Variation übersehen hat, obwohl ihr Betrag mehr als die Hälfte der von ihm entdeckten Evektion ausmacht; denn er hat ja bei der Ausarbeitung seiner Theorie ausschließlich Beobachtungen in den Syzygien (Finsternisse!) und den Quadraturen verwendet.

175. *Die Evektion*

Die Variationsbahn ist, wie schon bemerkt, eine partikuläre Lösung der HILLschen Differentialgleichungen. Sie gehört zu einer einparametrigen Schar von Lösungen, die in dem rotierenden HILLschen Koordinatensystem einfachperiodisch sind. Sofern die Störungen durch die Sonne als klein von der ersten Ordnung angesehen werden dürfen und Störungen höherer Ordnung vernachlässigt werden, erweisen sich diese Bahnen als schwach elliptische Deformationen von ungestörten Kreisbahnen des Mondes um die Erde. Geht man dagegen von elliptischen Mondbahnen als ungestörten Bewegungen aus, so sind diese im rotierenden System nicht mehr periodisch, und auch die durch die Sonne gestörten Bahnen dieser Art werden nicht mehr periodisch sein. Wir können aber auch diesen Fall noch unter den Voraussetzungen erledigen, die den HILLschen Gleichungen zugrunde liegen, d.h. unter Vernachlässigung der Mondmasse, der Exzentrizität und Neigung der Erdbahn sowie der Sonnenpar-

allaxe. Es gelten dann auch hier die Formeln (XX; 8) und (XX; 12); es ist aber jetzt für die ungestörten Werte des Radiusvektors r und der Länge l des Mondes

$$r = a(1 - e\cos E); \quad l = \bar{\omega} + v$$

zu setzen, wenn E die exzentrische, v die wahre Anomalie des Mondes und $\bar{\omega}$ die Perigäumslänge seiner Bahn bezeichnet. Die Exzentrizität der ungestörten Mondbahn (d.h. der Mittelwert der Exzentrizitäten der oskulierenden Ellipsen) ist genähert

$$e = 0.0549 \approx \frac{1}{18},$$

also keineswegs klein von derselben Ordnung wie $a^3 \approx w \approx 1/_{178}$. Man wird also bei genäherten Reihenentwicklungen, in denen Größen von der Ordnung w^2 vernachlässigt werden sollen, noch Terme von der Ordnung $e\,w$ berücksichtigen müssen, während solche von der Ordnung $e^2 w$ nicht mehr ins Gewicht fallen. Terme mit e^2 und e^3 allein sind zwar noch merklich; sie gehören aber der ungestörten Bewegung an. Bei der Ermittlung der von der Exzentrizität der Mondbahn abhängigen *Störungen* werden also alle Glieder herausfallen, die *nur* die Exzentrizität enthalten. Diejenigen Terme, die nur von w abhängen, werden die uns bereits bekannte Variation liefern.

Nun ist in einer ungestörten elliptischen Bahn, wenn g die mittlere Anomalie bedeutet,

$$\text{(XX; 16)} \quad \begin{cases} \dfrac{r}{a} = 1 + \dfrac{1}{2}e^2 - e\cos g - \dfrac{e^2}{2}\cos 2g + \\ \quad + \dfrac{3}{8}e^3(\cos g - \cos 3g) + \cdots \qquad \text{nach (VII; 64)}, \\ l = \bar{\omega} + g + 2e\sin g + \dfrac{5}{4}e^2\sin 2g - \\ \quad - \dfrac{1}{12}e^3(3\sin g - 13\sin 3g) + \cdots \qquad \text{nach (VII; 66)}. \end{cases}$$

Begnügen wir uns mit Gliedern bis zur Ordnung e, so sind, wenn $\lambda = \bar{\omega} + g$ die mittlere Länge des Mondes und λ' die um 180° vermehrte mittlere Länge der (gleichförmig auf der Ekliptik fortschreitenden) Sonne[1]) bedeutet,

$$r = a(1 - e\cos g); \quad \varphi = l - \lambda' = \lambda - \lambda' + 2e\sin g$$

die Polarkoordinaten des Mondes im rotierenden System. Dabei ist $\bar{\omega} = \text{const}$ und

$$\text{(XX; 17)} \quad \begin{cases} g = \nu' t - \bar{\omega}; \quad \lambda = \nu' t; \quad \lambda' = n\,t = t, \quad \text{da} \quad n = 1 \text{ ist}, \\ \qquad \psi = \lambda - \lambda' = (\nu' - 1)\,t = \nu\,t. \end{cases}$$

[1]) Wir nehmen den Ort der Sonne (Abb. 66, S. 519) auf der negativen ξ-Achse in praktisch unendlich großem Abstand vom Koordinatenursprung an.

In der *gestörten* Bewegung ist, infolge der fortschreitenden Bewegung der Apsiden des Mondes, $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0 + \gamma \nu' t$, wo γ (s. Abschnitt 140) eine kleine (positive) Größe von der Ordnung der Störungen bedeutet. Man darf also

$$g = \nu'(1 - \gamma)\, t - \tilde{\omega}_0 = \nu_1 t - \tilde{\omega}$$

setzen, und es ist daher in der gestörten Bahn die anomalistische Bewegung des Mondes,

$$\dot{g} = \nu_1 = \nu'(1 - \gamma),$$

etwas kleiner als in der ungestörten.

Multipliziert man (XX; 12) beiderseits mit a^2/r^2 und setzt man $U' = a^2 U$, $V' = a^2 V$, so erhält man die für die nachfolgende Analyse geeigneteren Formeln

$$\text{(XX; 18)} \quad \begin{cases} U' + \dfrac{a^2}{r^2} = a^2\left(U + \dfrac{1}{r^2}\right) = \dfrac{1}{2} a^3 \dfrac{r}{a}(1 + 3\cos 2\varphi), \\[2ex] V' = a^2 V = -\dfrac{3}{2} a^3 \dfrac{r}{a} \sin 2\varphi. \end{cases}$$

Rechts darf man in den mit dem kleinen Faktor $a^3 \approx \nu'^{-2} = w$ behafteten Störungstermen, bis zur Ordnung e genau,

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos g; \quad \varphi = \psi + 2e\sin g$$

und

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi &= \cos 2\psi - 4e \sin 2\psi \sin g = \\ &= \cos 2\psi - 2e[\cos(2\psi - g) - \cos(2\psi + g)], \\ \sin 2\varphi &= \sin 2\psi + 4e\cos 2\psi \sin g = \\ &= \sin 2\psi - 2e[\sin(2\psi - g) - \sin(2\psi + g)] \end{aligned}$$

setzen. Dann wird

(XX; 19a)

$$\begin{aligned} U' + \frac{a^2}{r^2} &= \frac{1}{2} a^3 (1 - e\cos g)\,[1 + 3\cos 2\psi - 6e\{\cos(2\psi - g) - \cos(2\psi + g)\}] = \\ &= \frac{1}{2} a^3 [1 - e\cos g + 3\{\cos 2\psi - 2e\cos(2\psi - g) + \\ &\quad + 2e\cos(2\psi + g) - e\cos g\cos 2\psi\}] = \\ &= \frac{1}{2} a^3 \left[1 - e\cos g + 3\cos 2\psi - \frac{15}{2} e\cos(2\psi - g) + \frac{9}{2} e\cos(2\psi + g)\right] \end{aligned}$$

und ebenso

$$\text{(XX; 19b)} \quad V' = -\frac{3}{2} a^3 \left[\sin 2\psi - \frac{5}{2} e\sin(2\psi - g) + \frac{3}{2} e\sin(2\psi + g)\right].$$

Die rechten Seiten von (XX; 19a, b) enthalten Glieder der Ordnung w und ew. Die linken Seiten, die Funktionen von r, $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ sind, müssen

daher ebenfalls bis zur Ordnung $e\,w$ bzw. e^3 entwickelt werden. Auch müssen diese Entwicklungen, ebenso wie die rechten Seiten, periodische Glieder mit den Argumenten g, 2ψ, $2\psi - g$ und $2\psi + g$ enthalten. Anstatt der ungestörten Entwicklungen (XX; 16) wird man also neue Ansätze

$$\text{(XX; 20a)}\quad \begin{cases} r = r_0 + a[f_0 + f_1 \cos g + f_2 \cos 2\psi + f_3 \cos(2\psi - g) + \\ \qquad + f_4 \cos(2\psi + g) + \cdots], \\ \varphi = \varphi_0 + h_1 \sin g + h_2 \sin 2\psi + h_3 \sin(2\psi - g) + \\ \qquad + h_4 \sin(2\psi + g) + \cdots \end{cases}$$

einführen, wo

$$\text{(XX; 20b)}\quad \begin{cases} r_0 = a\left[1 + \dfrac{e^2}{2} - e\cos g - \dfrac{e^2}{2}\cos 2g - \cdots\right], \\ \varphi_0 = \psi + 2e\sin g + \dfrac{5}{4}e^2 \sin 2g + \cdots \end{cases}$$

nun die Polarkoordinaten einer KEPLERschen Ellipse, deren Apsiden mit der Winkelgeschwindigkeit $\gamma\,\nu'$ fortschreiten, im rotierenden System bedeuten.

Aus diesen Ansätzen sind zunächst die Ausdrücke

$$U' = a^2 U = a^3\left[\frac{\ddot r}{a} - \frac{r}{a}(\dot\varphi + 1)^2\right]; \quad V_1 = a^2 V = a^3\left[2\frac{\dot r}{a}(\dot\varphi + 1) + \frac{r}{a}\ddot\varphi\right]$$

aufzubauen, wobei man $\dot\psi + 1 = \nu + 1 = \nu'$ und

$$\dot g = \nu_1 = k_1 \nu'; \quad 2\dot\psi - \dot g = k_3 \nu',$$
$$2\dot\psi = 2\nu = k_2 \nu'; \quad 2\dot\psi + \dot g = k_4 \nu'$$

mit

$$k_1 = 1 - \gamma; \quad k_2 = \frac{2\nu}{\nu'} = 1.85040; \quad k_3 = k_2 - k_1; \quad k_4 = k_2 + k_1$$

setzen kann. Dann ist

$$\text{(XX; 21a)}\quad \begin{cases} \dfrac{\dot r}{a} = \dfrac{\dot r_0}{a} - \nu'[k_1 f_1 \sin g + k_2 f_2 \sin 2\psi + k_3 f_3 \sin(2\psi - g) + \\ \qquad + k_4 f_4 \sin(2\psi + g)], \\ \dot\varphi + 1 = \dot\varphi_0 + 1 + \nu'[k_1 h_1 \cos g + k_2 h_2 \cos 2\psi + \\ \qquad + k_3 h_3 \cos(2\psi - g) + k_4 h_4 \cos(2\psi + g)], \\ \dfrac{\ddot r}{a} = \dfrac{\ddot r_0}{a} - \nu'^2[k_1^2 f_1 \cos g + k_2^2 f_2 \cos 2\psi + \\ \qquad + k_3^2 f_3 \cos(2\psi - g) + k_4^2 f_4 \cos(2\psi + g)], \\ \ddot\varphi = \ddot\varphi_0 - \nu'^2[k_1^2 h_1 \sin g + k_2^2 h_2 \sin 2\psi + \\ \qquad + k_3^2 h_3 \sin(2\psi - g) + k_4^2 h_4 \sin(2\psi + g)] \end{cases}$$

und

$$(\text{XX; 21b})\quad \begin{cases} \dfrac{\dot r_0}{a} = k_1\, \nu' [e \sin g + e^2 \sin 2g + \cdots], \\ \dot\varphi_0 + 1 = \nu' [1 + 2k_1\, e \cos g + \dfrac{5}{2} k_1\, e^2 \cos 2g + \cdots], \\ \dfrac{\ddot r_0}{a} = k_1^2\, \nu'^2 [e \cos g + 2e^2 \cos 2g + \cdots], \\ \ddot\varphi_0 = -k_1^2\, \nu'^2 [2e \sin g + 5e^2 \sin 2g + \cdots] \end{cases}$$

und somit

$$(\text{XX; 22a})\quad \begin{aligned} U' = a^3 \nu'^2 \Big[& k_1^2 \{e \cos g + 2e^2 \cos 2g + \cdots\} - \{k_1^2 f_1 \cos g + \cdots + \\ & + k_4^2 f_4 \cos(2\psi + g)\} - \Big\{1 + \frac{1}{2} e^2 - e \cos g - \\ & - \frac{1}{2} e^2 \cos 2g + \cdots + f_0 + f_1 \cos g + \cdots + f_4 \cos(2\psi + g)\Big\} \times \\ & \times \Big\{1 + k_1 \Big(2e \cos g + \frac{5}{2} e^2 \cos 2g + \cdots\Big) + \\ & + k_1 h_1 \cos g + \cdots + k_4 h_4 \cos(2\psi + g)\Big\}^2 \Big], \end{aligned}$$

$$(\text{XX; 22b})\quad \begin{aligned} V' = a^3 \nu'^2 \Big[& 2\{k_1 (e \sin g + e^2 \sin 2g + \cdots) - k_1 f_1 \sin g - \cdots \\ & - k_4 f_4 \sin(2\psi + g)\} \Big\{1 + k_1 \Big(2e \cos g + \frac{5}{2} e^2 \cos 2g + \cdots\Big) + \\ & + k_1 h_1 \cos g + \cdots + k_4 h_4 \cos(2\psi + g)\Big\} - \\ & - \Big\{1 + \frac{1}{2} e^2 - e \cos g - \frac{1}{2} e^2 \cos 2g + \cdots + f_0 + \\ & + f_1 \cos g + \cdots + f_4 \cos(2\psi + g)\Big\} \{k_1^2 (2e \sin g + \\ & + 5e^2 \sin 2g + \cdots) + k_1^2 h_1 \sin g + \cdots + k_4^2 h_4 \sin(2\psi + g)\} \Big]. \end{aligned}$$

Ferner ist auf der linken Seite von (XX; 19a) noch

$$(\text{XX; 22c})\quad \frac{a^2}{r^2} = \left(\frac{r}{a}\right)^{-2} = (1 + x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$$

mit

$$x = \frac{1}{2} e^2 + f_0 + (f_1 - e) \cos g + f_2 \cos 2\psi + f_3 \cos(2\psi - g) + f_4 \cos(2\psi + g)$$

zu entwickeln.

Bei Ausführung der Multiplikationen ergeben sich recht verwickelte Ausdrücke. Hierbei ist folgendes zu beachten:

1. Bei der Multiplikation der trigonometrischen Funktionen entstehen neue periodische Terme, deren Argumente durch Addition und Subtraktion aus den ursprünglichen, 2ψ, $2\psi - g$, $2\psi + g$ und g, $2g$, ... hervorgehen, z.B. $2\psi - 2g$, $4\psi - g$ und andere. Wollte man diese mit berücksichtigen, so müßte man auch die Ansätze (XX; 20a, b) um Glieder mit diesen Argumenten erweitern. Aus der Kombination dieser Terme unter sich und mit den ursprünglich angesetzten würden sich wiederum neue periodische Glieder ergeben, aber auch solche mit den alten Argumenten, die in einer strengen Theorie berücksichtigt werden müßten. So ergäbe die Kombination des Arguments $4\psi - g$ mit g, 2ψ, $2\psi - g$, $2\psi + g$ Terme mit den neuen Argumenten 4ψ, $6\psi - g$, $6\psi - 2g$, 6ψ, $4\psi - 2g$, $2\psi - 2g$, aber auch zusätzliche Terme mit $2\psi - g$ und 2ψ. Es ist leicht einzusehen, daß dieses Verfahren, konsequent durchgeführt, rasch ins Uferlose führt, wenn die Entwicklungen langsam konvergieren. Das ist aber in der Theorie des Mondes der Fall, da die Terme der Ansätze (XX; 20), mit denen das Verfahren eingeleitet wird, nicht gerade sehr kleine Beträge haben: Die Exzentrizität ($e \approx 1/18$) ist ziemlich bedeutend, so daß schon bei bescheidenen Ansprüchen an Genauigkeit Beträge von der Ordnung e^3 nicht vernachlässigt werden dürfen. Von den Amplituden der periodischen Störungen sind wenigstens die der Variation (f_2, h_2) und der Evektion (f_3, h_3) beträchtlich. Die Erfahrung lehrt, daß f_2, h_2 und f_3 von der Ordnung 10^{-2}, also größer als w sind, während $h_3 \approx 1/45 \approx 2/5\,e$ größenordnungsmäßig sogar mit der Exzentrizität vergleichbar ist.

Hier wird es nur darauf ankommen zu zeigen, daß die aus der Beobachtung bekannten hauptsächlichsten Störungsterme (Variation, Evektion, Apsidenbewegung) sich durch theoretische Überlegungen nachweisen und auch größenordnungsmäßig richtig abschätzen lassen. Wir werden also darauf verzichten, die Ansätze (XX; 20) durch neu auftretende Perioden zu erweitern. Ferner werden wir bei der Entwicklung der Beziehungen (XX; 18) Glieder von höherer Ordnung als e^3 durchweg vernachlässigen, was einer Genauigkeit von etwa $1/2$ Bogenminute entsprechen würde. Wegen der sehr unterschiedlichen Größenordnung der f_i, h_i, γ ist allerdings a priori schwer zu unterscheiden, welche der auftretenden Terme noch berücksichtigt werden müssen und welche nicht. Man wird aber mit der Erfahrung einigermaßen in Einklang bleiben, wenn man vorläufig f_2, h_2, f_3, h_3 von der Ordnung e einschätzt, w, f_0, f_1, h_1 von der Ordnung e^2 und f_4, h_4 von der Ordnung e^3.

2. Alle Terme in (XX; 18), die nur e und g enthalten, gehören der ungestörten elliptischen Bewegung an. Sie erfüllen daher die Differentialgleichungen

$$\text{(XX; 23)} \qquad U' + \frac{a^2}{r^2} = 0; \quad V' = 0.$$

Aus den Ausdrücken (XX; 22a, b) fallen also diese Glieder heraus, und es bleiben nur noch solche erhalten, die von den Störungsgrößen w, γ, f_i, h_i abhängen. Insbesondere muß also in (XX; 21b) $k_1 = 1 - \gamma$, $k_1^2 = 1 - 2\gamma$ gesetzt werden (da γ^2, das sich später als von der Ordnung e^3 erweisen wird, immer mit e multipliziert erscheint). Die Größen r_0, φ_0 erfüllen also (XX; 23) nur, wenn $k_1 = 1$ gesetzt wird.

3. Die Größe $a f_0$ kann als Störung der großen Halbachse angesehen werden. Sie ist daher nicht unabhängig von einer Annahme über die große Halbachse der ungestörten Ellipse. Wir bestimmen f_0 so, daß a das dritte KEPLERsche Gesetz erfüllt. Dann ist also in den Ausdrücken (XX; 22a, b) der Faktor $a^3 \nu'^2$ gleich 1 zu setzen, ebenso auf den rechten Seiten von (XX; 19a, b) $a^3 = \nu'^{-2} = w$. Die Größen f_1, h_1 sind, da Glieder mit $\cos g, \sin g$ bereits in r_0, φ_0 auftreten, als Störungen dieser Terme anzusehen. Sie sind daher voraussichtlich von der Ordnung w.

Setzt man (XX; 22a, b, c) auf den linken Seiten von (XX; 19a, b) ein und scheidet die identisch verschwindenden, nur von e und g abhängigen Aggregate aus, so erhält man Beziehungen von der Form

$$F_0 + F_1 \cos g + F_2 \cos 2\psi + F_3 \cos(2\psi - g) + F_4 \cos(2\psi + g) + \cdots = 0,$$
$$H_1 \sin g + H_2 \sin 2\psi + H_3 \sin(2\psi - g) + H_4 \sin(2\psi + g) + \cdots = 0,$$

und da diese Gleichungen für alle Zeiten erfüllt sein müssen, verschwinden die von den Störungsgrößen w, γ, f_i, h_i abhängigen Koeffizienten F_i, H_i identisch. Da

$$w = \nu'^{-2} = \frac{1}{178.7234} = 0.005\,595\,24$$

bekannt ist, ergibt das *neun* Gleichungen für die *zehn* unbekannten Größen γ, f_i, h_i. Trotzdem ist das System dieser Gleichungen nicht unterbestimmt, da sich herausstellen wird, daß f_1 und h_1 nur in einer linearen Kombination vorkommen.[1]) Es sind also de facto nur neun Unbekannte zu ermitteln.

Bezeichnet man mit R_i, S_i jene Reste höherer Ordnung, die bei einer Überschlagsrechnung vorläufig vernachlässigt werden können, so erhält man aus $F_0 = 0$ (konstante Terme):

$$\text{(XX; 24)} \quad f_0 = -\frac{w}{6} + \frac{w}{4}(f_2 - 2h_2) + \frac{2}{3}(f_2^2 + f_3^2) - \\ -\frac{1}{6}[(f_2 + h_2 k_2)^2 + (f_3 + h_3 k_3)^2] + R_0,$$

aus $F_1 = H_1 = 0$ (Störungen der elliptischen Bewegung):

$$\text{(XX; 25)} \quad \begin{cases} 2e\gamma - 2(2f_1 + h_1) = -\frac{e\,w}{2} + \frac{3}{4}w(f_3 - 2h_3) + 10 e f_0 - \\ \quad - 4 f_2 f_3 + (f_2 + h_2 k_2)(f_3 + h_3 k_3) + R_1, \\ 2e\gamma - (2f_1 + h_1) = -\frac{3}{4}w(f_3 - 2h_3) + 2e f_0 + \frac{1}{2} f_3 h_2 k_2^2 - \\ \quad - \frac{1}{2} f_2 h_3 k_3^2 + k_2 k_3 (f_2 h_3 - f_3 h_2) + S_1, \end{cases}$$

[1]) Das gilt a priori nur, solange höhere Glieder unberücksichtigt bleiben. Andernfalls tritt diese Schwierigkeit wieder auf, aber nur scheinbar, wie im nächsten Abschnitt gezeigt werden soll.

aus $F_2 = H_2 = 0$ (Terme der Variation):

(XX; 26)
$$\begin{cases} f_2(k_2^2+3) + 2h_2 k_2 = p_2 = -\dfrac{3}{2} w + R_2, \\ 2f_2 k_2 + h_2 k_2^2 = q_2 = \dfrac{3}{2} w + S_2, \end{cases}$$

aus $F_3 = H_3 = 0$ (Terme der Evektion):

(XX; 27)
$$\begin{cases} f_3(k_3^2+3) + 2h_3 k_3 = p_3 = \dfrac{15}{4} e w - e(5f_2 + h_2 k_2) + R_3, \\ 2f_3 k_3 + h_3 k_3^2 = q_3 = -\dfrac{15}{4} e w + \\ \qquad + e\left[f_2(1-2k_2) + \dfrac{1}{2} h_2 k_2 (k_2 - 2)\right] + S_3 \end{cases}$$

und aus $F_4 = H_4 = 0$:

(XX; 28)
$$\begin{cases} f_4(k_4^2+3) + 2h_4 k_4 = \\ \qquad = p_4 = -\dfrac{9}{4} e w - e(5f_2 + h_2 k_2) + R_4, \\ 2f_4 k_4 + h_4 k_4^2 = \\ \qquad = q_4 = \dfrac{9}{4} e w - e\left[f_2(1+2k_2) - \dfrac{1}{2} h_2 k_2 (k_2 + 2)\right] + S_4. \end{cases}$$

Aus Gleichung (XX; 24), in der die Entwicklung bis zu Termen zweiter Ordnung in den w, f_i, h_i ausgeführt wurde, liest man ab, daß die Störung der großen Halbachse von $f_0 = -w/6$, dem aus den Abschätzungen des vorigen Abschnitts folgenden Betrag, merklich abweicht, doch wird sich der Unterschied numerisch als verhältnismäßig unbedeutend erweisen (s. Abschnitt 177, S. 532). Die Diskussion der Gleichungen (XX; 25), die den Betrag der Apsidenbewegung liefern und in der Tat zeigen, daß die Größen f_1, h_1 nur in einer linearen Kombination auftreten, soll dem nächsten Abschnitt vorbehalten bleiben.

Die drei Systeme (XX; 26) bis (XX; 28) haben die gemeinsame Form

(XX; 29)
$$\begin{cases} f_i(k_i^2+3) + 2h_i k_i = p_i, \\ 2f_i k_i + h_i k_i^2 = q_i, \end{cases} \qquad (i = 2, 3, 4)$$

und die Lösungen

(XX; 29a)
$$f_i = \frac{k_i p_i - 2q_i}{k_i(k_i^2-1)}; \quad h_i = \frac{(k_i^2+3) q_i - 2k_i p_i}{k_i^2(k_i^2-1)}.$$

Die Reste R_i, S_i sind in diesen sechs Gleichungen so bestimmt worden, daß sie alle Terme zusammenfassen, deren Ordnung höher ist als die des ersten Gliedes der rechten Seiten ($^3/_2 w$ bzw. $^{15}/_4 e w$ bzw. $^9/_4 e w$). Die Reste R_2, S_2 sind also mindestens von der Ordnung $e w$; hingegen sind R_3, S_3 und R_4, S_4

mindestens von der zweiten Ordnung in w, f_i, h_i, während die Terme mit $e f_i$, $e h_i$, die etwa von derselben Ordnung wie $e w$ sind, hier nicht unterdrückt werden dürfen.

In (XX; 26) ist, wenn die Restglieder vernachlässigt werden, $q_2 = -p_2 = {}^3/_2 w$. Es folgt also

$$\text{(XX; 30)} \qquad f_2 = -\frac{3}{2} w \frac{k_2 + 2}{k_2 (k_2^2 - 1)}; \quad h_2 = \frac{3}{2} w \frac{k_2^2 + 2k_2 + 3}{k_2^2 (k_2^2 - 1)}.$$

Diese Lösungen sind mit (XX; 15) identisch, wie man leicht nachweist, wenn man dort bzw. in den Gleichungen (XX; 14)

$$\nu'^2 = (\nu + 1)^2 = \frac{1}{w}; \quad b = f_2; \quad c = h_2; \quad \frac{2\nu}{\nu'} = k_2$$

setzt.

Da die Größen p_3, q_3 und p_4, q_4, wenn man wiederum die Reste unterdrückt, nur von e, w, f_2, h_2 abhängen, können wir sie mit den aus (XX; 30) bzw. (XX; 15) folgenden Näherungswerten

$$f_2 = -0.0072048; \quad h_2 = +0.0102386 = 35\overset{\prime}{.}2 \; (39\overset{\prime}{.}5)$$

berechnen. Das ergibt

$$f_3 = -0.0089339; \quad h_3 = +0.020787 \; = 71\overset{\prime}{.}5 \; (76\overset{\prime}{.}5),$$
$$f_4 = -0.0004132; \quad h_4 = +0.0008503 = 2\overset{\prime}{.}9 \; (3\overset{\prime}{.}2).$$

(Die aus der strengen Theorie folgenden Amplituden der Ungleichheiten in Länge sind in Klammern beigefügt.)

Die periodischen Terme mit dem Argument $2\psi + g$, deren Periode von einem Drittel des synodischen Monats nicht sehr verschieden ist und die im wesentlichen eine Verzerrung der Variationsbahn bewirken, sind im Vergleich mit den übrigen nur unbedeutend. Die größte Ungleichheit (nächst der elliptischen, die hauptsächlich der ungestörten Bewegung angehört und deren Amplitude in Länge $\approx 2e \approx {}^1/_9 = 6\overset{\circ}{.}3$ beträgt) ist also die *Evektion*. Die erheblichen Unterschiede in der Größenordnung der Konstanten der drei Terme werden verständlich, wenn man die Nenner der Ausdrücke (XX; 29) für $i = 2, 3, 4$ miteinander vergleicht. Setzt man $k_2 = k$, $k_3 = k - 1$, $k_4 = k + 1$, so sind die Divisoren der Ungleichheiten in Länge

$$\text{für } h_2\text{:} \quad (k-1)\, k^2 (k+1) = \quad 8.30,$$
$$\text{für } h_3\text{:} \quad (k-2)\,(k-1)^2 k = -0.20,$$
$$\text{für } h_4\text{:} \quad k(k+1)^2 (k+2) = \quad 57.89.$$

Der Divisor von h_3 fällt besonders klein aus, da k von 2 nicht sehr verschieden ist.

Man könnte versuchen, die oben errechneten Näherungen durch Hinzunahme der Restglieder zu verbessern. Man würde aber dann die Erfahrung machen, daß die weitere Annäherung nur sehr langsam vonstatten geht. Der Grund dafür ist, daß die Restglieder mit wachsender Ordnung nur um je 1 bis

2 Zehnerpotenzen abnehmen, dafür aber rasch zahlreicher werden, teilweise mit großen Koeffizienten behaftet sind und sehr ungleichmäßig verteilte Vorzeichen haben. Die Konvergenz des Verfahrens ist also ausgesprochen schlecht. Dazu kommt, daß auch die Vernachlässigung von Termen, die (s. weiter oben) von anderen Periodizitäten induziert werden, sich immer fühlbarer bemerkbar macht, je größere Genauigkeit beansprucht wird. Das alles wirkt sich natürlich besonders stark auf die Konstanten der Evektion aus, deren Bestimmung wegen der kleinen Divisoren gegen Unterdrückung auch kleinerer Terme besonders empfindlich ist. Um so mehr befriedigt es, daß schon diese rohe Abschätzungsmethode auf Anhieb Resultate liefert, die den wahren Werten bis auf durchschnittlich 10% nahekommen.

176. *Die Apsidenbewegung des Mondes*

Im Abschnitt 140 hatten wir das Problem der Apsidenbewegung eines Planeten infolge der Störung durch einen anderen Planeten gelöst. Die Rechnung erwies sich, wie der Anhang IV zeigt, als einfach und genau, da die störenden Massen stets klein sind. Auf die Apsidenbewegung des Mondes lassen sich jene einfachen Formeln nicht anwenden, da die Masse der Sonne, die hier als störender Körper auftritt, sehr groß ist. Die in Kapitel XVI ausgeführte Entwicklung der Störungsfunktion, die auf der Möglichkeit beruhte, die mit dem Quadrat und den höheren Potenzen der störenden Masse behafteten Terme zu vernachlässigen, erweist sich daher im Mondproblem als unzureichend.

Der im vorigen Abschnitt eingeschlagene Weg zur Ermittlung der Apsidenbewegung aus den Gleichungen (XX; 25) ist von dieser Schwierigkeit frei und verspricht, selbst bei Unterdrückung der Restglieder R_1, S_1, einen guten Näherungswert für diese Größe. Diese Methode ist es auch gewesen, die im Prinzip von den älteren Autoren zur Herleitung der Apsidenbewegung, deren Größe empirisch schon den Alten bekannt gewesen ist, auf theoretischem Wege benutzt wurde, so von NEWTON, CLAIRAUT, EULER und D'ALEMBERT. Diese Theoretiker gingen allerdings von der Ansicht aus, daß diejenigen Verzerrungen der elliptischen Mondbahn, die vor allem durch Variation und Evektion bewirkt werden, keinen wesentlichen Einfluß auf die Größe der Apsidenbewegung besitzen. So stimmten auch die Ergebnisse jener älteren Versuche, wie z.B. die von NEWTON durchgeführte Lösung dieses Problems, mit der Erfahrung schlecht überein. In der Tat: Unterdrückt man in (XX; 25) neben den Resten R_1, S_1 auch die von der Variation und der Evektion herrührenden, also von den Konstanten f_2, h_2, f_3, h_3 abhängigen Terme und setzt man $f_0 = -{}^1/_6 w$, so ergibt sich aus

$$2e\gamma - 2(2f_1 + h_1) = -\frac{13}{6} e w,$$

$$2e\gamma - (2f_1 + h_1) = -\frac{1}{3} e w$$

durch Eliminierung von $2f_1 + h_1$

$$\gamma = \frac{3}{4} w = 0.0041964.$$

Hieraus folgt aber für die anomalistische Bewegung des Mondes $\nu_1 = \nu'(1 - \gamma)$ und für die Umlaufszeit der Apsiden $1/\nu'\gamma = 17.8$ Jahre, also rund doppelt soviel wie die Beobachtung (8.85 Jahre) lehrt.

Erst CLAIRAUT, der 1743 den Versuch unternahm, die Störungstheorie des Mondes analytisch durchzuführen, gelang es, die Ursache dieser Diskrepanz aufzudecken, indem er zeigte, daß die periodischen Störungsglieder, vor allem die Evektion, auf die Apsidenbewegung einen nicht zu unterschätzenden Einfluß haben.

Wenn man zur Berechnung der Terme auf den rechten Seiten der Gleichungen (XX; 24) und (XX; 25) die in Abschnitt 175 bestimmten Näherungen für f_2, h_2, f_3, h_3 benutzt, so findet man zunächst, wie schon weiter oben bemerkt wurde, daß f_0 von $-{}^1/_6 w$ nur unbedeutend abweicht, da, wenn wir von dem Restglied R_0 absehen, von den übrigen drei Termen die beiden negativen den positiven bis auf einen kleinen Rest kompensieren. Es ergibt sich

$$f_0 = -\frac{w}{6} + 0.000015 + R_0 \approx -\frac{w}{6}\left(1 - \frac{16}{1000}\right).$$

Der kleine Fehler, den man begeht, wenn man in (XX; 25) $f_0 = -{}^1/_6 w$ setzt, kann also unbedenklich mit den zu vernachlässigenden Restgliedern vereinigt werden. Man erhält dann nach Elimination von $2f_1 + h_1$, wenn man noch $k_3 = k_2 - 1$ setzt,

$$2e\gamma = \frac{3}{2} e w - \frac{9}{4} w (f_3 - 2h_2) + 3 f_2 f_3 + k_2(k_2 - 1)\{f_2 h_3 - f_3 h_2 - h_2 h_3\}$$

und hieraus mit den früher ermittelten f_i, h_i

$$\gamma = 0.008446,$$

d.h. eine Umlaufszeit des Perigäums von $1/\nu'\gamma = 8.86$ Jahren, die mit dem beobachteten Wert fast genau übereinstimmt.

Für die Kombination $2f_1 + h_1$ erhält man

$$2f_1 + h_1 = \frac{11}{6} e w - \frac{3}{2} w (f_3 - 2h_3) + 3 f_2 f_3 + \frac{1}{2} f_2 h_3 k_3^2 - \frac{1}{2} f_3 h_2 k_2^2 - h_2 h_3 k_2 k_3 =$$
$$= 0.0013367 + S_1 - R_1.$$

Die Unmöglichkeit, f_1 und h_1 einzeln zu bestimmen, hat natürlich einen tieferen Grund. Diese Größen treten ja hier als Störungen der Exzentrizität in den Termen mit $\cos g$ und $\sin g$ auf, so daß man r und φ in der Form

$$r = 1 - (e - f_1)\cos g + \cdots; \quad \varphi = \psi + (2e + h_1)\sin g + \cdots$$

schreiben kann. Nun ist aber e, die mittlere Exzentrizität der Mondbahn, keine a priori gegebene Größe, sondern, ebenso wie die mittlere große Halbachse a, eine Integrationskonstante, deren numerischer Wert aus den Beobachtungen abgeleitet werden muß. Wir haben gesehen, daß bei der Festsetzung des Begriffs „mittlere große Halbachse" eine gewisse Freizügigkeit erlaubt ist: Zweckmäßigerweise wird man diese wichtige Konstante so definieren, daß ihre Bestimmung möglichst sicher auf Beobachtungen gestützt

werden kann. So haben wir in Abschnitt 175 die Größe a so festgesetzt, daß sie das dritte KEPLERsche Gesetz $a^3 \nu'^2 = 1$ befriedigt, wo ν' die durch Beobachtungen mit größter Genauigkeit bestimmbare siderische Bewegung des Mondes bedeutet. Erst durch diese Festsetzung wurde auch eine eindeutige Definition der Störung f_0 möglich. Ähnlich kann man auch hier verfahren: Die mittlere Exzentrizität der Mondbahnellipse läßt sich am sichersten aus der Amplitude der „großen Ungleichheit in Länge" ableiten, jener periodischen Schwankung der ekliptikalen Länge des Mondes mit dem Argument g, deren Periode der anomalistische Monat ist. Dann muß aber in den Ansätzen (XX; 20a) $h_1 = 0$ gesetzt werden, d.h., der Störungsbetrag h_1 wird mit der empirisch zu bestimmenden Exzentrizität vereinigt und tritt daher auch in der übrigen Rechnung nicht mehr auf. Die Gleichungen $F_i = H_i = 0$ enthalten also keine überzählige Unbekannte mehr, auch wenn Terme beliebig hoher Ordnung berücksichtigt werden.

177. *Die parallaktische und die jährliche Gleichung*

Die bisher ermittelten periodischen Störungen der Mondbewegung folgten als Bestandteile einer Lösung der HILLschen Differentialgleichungen (XX; 5), allerdings mit kleinen Abweichungen von den beobachteten Beträgen, da diese Gleichungen den Bewegungsvorgang nicht exakt wiedergeben, sondern ihn durch gewisse Vereinfachungen idealisieren. Neben diesen Störungen (der Variation, der Evektion und zahlreichen anderen von meist unbedeutender Amplitude) erscheinen einige andere in der Theorie erst dann, wenn man die Vereinfachungen der HILLschen Theorie fallen läßt, insbesondere die Parallaxe der Sonne und die Exzentrizität der Erdbahn nicht mehr vernachlässigt. Noch andere Störungen ergeben sich, wenn man auch die Neigung der Mondbahnebene gegen die Ekliptik berücksichtigt: die säkulare rückläufige Bewegung der Knoten (vgl. Abschnitt 140) und kleinere periodische Störungen der ekliptikalen Breite.

Es möge hier genügen, die beiden hauptsächlichsten Störungsterme abzuleiten, die von der Sonnenparallaxe und der Erdbahnexzentrizität herrühren und die man als „parallaktische" bzw. „jährliche Gleichung" bezeichnet. Die Sonnenparallaxe bewirkt, daß der Vektor der Störbeschleunigung, die der Mond durch die Sonne erleidet, nicht allein dem Betrage nach (wegen des wechselnden Abstandes des Mondes von der Sonne während eines synodischen Monats) veränderlich ist, sondern daß auch die Richtung dieses Vektors (die in der HILLschen Theorie als konstant angenommen wird) im Laufe eines synodischen Monats schwankt. Dadurch entsteht ein neuer Störungsterm mit der Periode des synodischen Monats, dessen Betrag offenbar der Sonnenparallaxe (die für den Halbmesser der Mondbahn als Basis rund 9 Bogenminuten beträgt) proportional ist. Bedeutender ist die (ebenso wie die Variation von TYCHO BRAHE empirisch gefundene) „jährliche Gleichung", die dadurch entsteht, daß die Sonne im rotierenden System nicht in einem festen Punkt der Abszissenachse ruht, wie es der Fall wäre, wenn die scheinbare Sonnenbahn kreisförmig angenommen wird, sondern um diesen mittleren Ort eine kleine ellipsenartige Kurve beschreibt. Diese Störung ist der Exzentrizität der Erd-

bahn ($e' = 0.01673$) proportional und hat die Periode eines anomalistischen Jahres, dessen Länge von der des siderischen Jahres nur unbedeutend abweicht.

Die Abschätzung dieser beiden periodischen Störungsglieder kann nach dem gleichen einfachen Verfahren erfolgen, das wir in Abschnitt 174 bei der Untersuchung der Variation benutzt haben. Bezeichnen wir, wie in (XX; 4a, b), mit $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ die geozentrischen Ortsvektoren[1]) des Mondes und der Sonne, mit r, s deren Beträge, mit φ den von ihnen eingeschlossenen Winkel und mit m_1, $m_2 = 0$, m_3 die Massen von Erde, Mond und Sonne, so lauten die Bewegungsgleichungen des Mondes

$$\ddot{\mathfrak{p}} = -k^2 \frac{m_1}{r^3}\mathfrak{p} - k^2 \frac{m_3}{s^3}\left\{\mathfrak{p}(1+f) - \frac{r}{s}\mathfrak{q}(3\cos\varphi + g)\right\},$$

wenn f, g die in (XX; 3a) definierten Funktionen von φ bedeuten und dort $\gamma = r/s \approx 1/390$ ist. Führt man die auch in den HILLschen Differentialgleichungen benutzten Einheiten von Masse, Länge und Zeit ein, so ist $k = 1$, $m_1 = 1$ und, wenn a und a' die mittleren Entfernungen des Mondes und der Sonne von der Erde bedeuten,

$$n = k\sqrt{1 + m_3}\, a'^{-3/2} \approx k\sqrt{m_3}\, a'^{-3/2} = 1$$

die mittlere scheinbare Bewegung der Sonne in der Zeiteinheit und daher

$$a' = 69.062; \quad a \approx a'\gamma \approx \frac{69}{390} = 0.177.$$

Wenn man nun im Störungsglied rechts Terme von der Ordnung γ^2 unterdrückt, darf man also

(XX; 31)

$$\ddot{\mathfrak{p}} = -\frac{1}{r^3}\mathfrak{p} - \left(\frac{a'}{s}\right)^3\left\{\mathfrak{p}(1 + 3\gamma\cos\varphi) - \right.$$
$$\left. -\frac{r}{s}\mathfrak{q}\left[3\cos\varphi - \frac{3}{2}\gamma(1 - 5\cos^2\varphi)\right]\right\}$$

schreiben. Dabei ist, wenn $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ die Einheitsvektoren in Richtung der positiven x- bzw. y-Achse im festen Koordinatensystem bezeichnen und (Abb. 67) α und $\alpha' = \alpha - \varphi$ die Richtungswinkel von $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{q}$ sind,

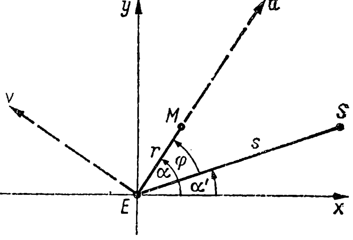


Abb. 67
Geozentrische Koordinaten des Mondes (M) und der Sonne (S)

$$\mathfrak{p} = r(\mathfrak{x}\cos\alpha + \mathfrak{y}\sin\alpha); \quad \mathfrak{q} = s(\mathfrak{x}\cos\alpha' + \mathfrak{y}\sin\alpha').$$

Durch zweimalige Differentiation nach der Zeit erhält man ferner

$$\ddot{\mathfrak{p}} = \mathfrak{x}[(\ddot{r} - r\dot{\alpha}^2)\cos\alpha - (2\dot{r}\dot{\alpha} + r\ddot{\alpha})\sin\alpha] +$$
$$+ \mathfrak{y}[(\ddot{r} - r\dot{\alpha}^2)\sin\alpha + (2\dot{r}\dot{\alpha} + r\ddot{\alpha})\cos\alpha].$$

Sind schließlich

(XX; 31a) $\quad \mathfrak{u} = \mathfrak{x}\cos\alpha + \mathfrak{y}\sin\alpha; \quad \mathfrak{v} = -\mathfrak{x}\sin\alpha + \mathfrak{y}\cos\alpha$

[1]) Da die Masse des Mondes hier (wie in den HILLschen Gleichungen) vernachlässigt werden soll, beziehen sich die Vektoren $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ *beide* auf den Erdmittelpunkt.

die Einheitsvektoren in der Richtung $\mathfrak{p}$ und der darauf senkrechten Richtung (Richtungswinkel α und $\alpha + 90°$), setzt man also

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{u}\cos\alpha - \mathfrak{v}\sin\alpha; \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{u}\sin\alpha + \mathfrak{v}\cos\alpha,$$

so ergibt sich, da $\alpha - \alpha' = \varphi$ ist,

$$\mathfrak{p} = r\,\mathfrak{u}; \quad \mathfrak{q} = s(\mathfrak{u}\cos\varphi - \mathfrak{v}\sin\varphi)$$

und

$$\ddot{\mathfrak{p}} = (\ddot{r} - r\,\dot{\alpha}^2)\,\mathfrak{u} + (2\dot{r}\,\dot{\alpha} + r\,\ddot{\alpha})\,\mathfrak{v}. \tag{XX; 32}$$

Bezeichnet man also, wie früher, mit U und V die radiale und die zirkulare Koordinate der Beschleunigung des Mondes im geozentrischen System, so ist

$$U = \ddot{r} - r\,\dot{\alpha}^2 = -\frac{1}{r^2} - r\left(\frac{a'}{s}\right)^3(1 + 3\gamma\cos\varphi) + $$
$$+ 3r\left(\frac{a'}{s}\right)^3\cos\varphi\left[\cos\varphi - \frac{1}{2}\gamma(1 - 5\cos^2\varphi)\right],$$
$$V = 2\dot{r}\,\dot{\alpha} + r\,\ddot{\alpha} = -3r\left(\frac{a'}{s}\right)^3\sin\varphi\left[\cos\varphi - \frac{1}{2}\gamma(1 - 5\cos^2\varphi)\right]$$

oder, nach einfacher Reduktion,

$$\text{(XX; 33)}\quad \begin{cases} U = \ddot{r} - r\,\dot{\alpha}^2 = \\ \quad = -\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{r}{2}\left(\dfrac{a'}{s}\right)^3\left\{1 + 3\cos 2\varphi + \dfrac{9}{4}\gamma\cos\varphi + \dfrac{15}{4}\gamma\cos 3\varphi\right\}, \\ V = 2\dot{r}\,\dot{\alpha} + r\,\ddot{\alpha} = -\dfrac{3}{2}r\left(\dfrac{a'}{s}\right)^3\left\{\sin 2\varphi + \dfrac{1}{4}\gamma\sin\varphi + \dfrac{5}{4}\gamma\sin 3\varphi\right\}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen gehen für $s = a'$ und $\gamma = 0$, d.h. für die Bedingungen, unter denen die HILLschen Differentialgleichungen gelten, in (XX; 8) über; denn dann ist ja auch

$$\alpha' = n\,t = t; \quad \dot{\alpha} = \dot{\alpha}' + \dot{\varphi} = 1 + \dot{\varphi},$$

da sich bei Vernachlässigung der Erdbahnexzentrizität der Ortsvektor der Sonne mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit $n = 1$ dreht.

Multipliziert man, wie in Abschnitt 175, beide Seiten der Gleichungen (XX; 33) mit a^2 und setzt $a^3 = \nu'^{-2} = w$, so folgt

$$\text{(XX; 33a)}\quad \begin{cases} U' = a^3\left(\dfrac{\ddot{r}}{a} - \dfrac{r}{a}\dot{\alpha}^2\right) = -\left(\dfrac{a}{r}\right)^2 + \\ \quad + \dfrac{w}{2}\dfrac{r}{a}\left(\dfrac{a'}{s}\right)^3\left\{1 + \dfrac{9}{4}\gamma\cos\varphi + 3\cos 2\varphi + \dfrac{15}{4}\gamma\cos 3\varphi\right\}, \\ V' = a^3\left(2\dfrac{\dot{r}}{a}\dot{\alpha} + \dfrac{r}{a}\ddot{\alpha}\right) = \\ \quad = -\dfrac{3}{2}w\dfrac{r}{a}\left(\dfrac{a'}{s}\right)^3\left\{\dfrac{1}{4}\gamma\sin\varphi + \sin 2\varphi + \dfrac{5}{4}\gamma\sin 3\varphi\right\}. \end{cases}$$

Dabei darf rechts in den mit w behafteten Störungsgliedern genähert

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos g; \quad \frac{s}{a'} = 1 - e'\cos g'; \quad \varphi = \psi = \nu t$$

gesetzt werden, wenn e, e' die Exzentrizitäten, g, g' die mittleren Anomalien in der ungestörten Mondbahn und der scheinbaren Sonnenbahn bezeichnen. Da beim Ausmultiplizieren der Störungsterme Kombinationsschwingungen mit den Argumenten $g \pm i\varphi$, $g' \pm i\varphi$ $(i = 1, 2, 3)$, aber keine neuen Terme mit den Argumenten $i\varphi$ selbst entstehen, genügt es, wenn es sich darum handelt, die Beträge der Glieder mit $\cos i\varphi$ und $\sin i\varphi$ zu bestimmen, $e = e' = 0$, also in den Störungsausdrücken $r = a$, $s = a'$, $\varphi = \psi = \nu t$, zu setzen. Auf den linken Seiten und in dem von w freien Term $-(a/r)^2$ auf der rechten Seite von U' muß jedoch

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} &= 1 + f_0 + f_1\cos\varphi + f_2\cos 2\varphi + f_3\cos 3\varphi, \\ \alpha &= \nu' t + h_1\sin\varphi + h_2\sin 2\varphi + h_3\sin 3\varphi, \end{aligned} \qquad (\varphi \approx \psi)$$

geschrieben werden.[1]) Wie früher gilt auch hier

$$\dot\psi = \nu; \quad 1 + \dot\psi = \nu',$$

und man setze

$$\text{(XX; 34)} \qquad k_1 = \frac{\nu}{\nu'} = 0.9252; \quad k_2 = \frac{2\nu}{\nu'} = 1.8504; \quad k_3 = \frac{3\nu}{\nu'} = 2.7756.$$

Links tritt dann der Faktor $-a^3\nu'^2$ auf, den man gleich -1 setzen darf. Entwickelt man ferner die linken Seiten und $-(a/r)^2$ bis zu Termen erster Ordnung in den kleinen Größen f_i, h_i, so entstehen auf beiden Seiten außer Konstanten lineare Ausdrücke in $\cos i\varphi$ bzw. $\sin i\varphi$. Bei strenger Rechnung müßte man auch Kombinationsglieder zweiter Ordnung berücksichtigen: In der Tat ist zu erwarten, daß die Konstanten der Variation, f_2, h_2, von niederer Ordnung als f_1, h_1, f_3, h_3 sind, da ja in den Störungsgliedern die Koeffizienten der Terme mit den Argumenten φ bzw. 3φ den sehr kleinen Faktor γ enthalten. Streng genommen müßten also Terme wie $f_1 f_2 \cos\varphi\cos 2\varphi = {}^1/_2 f_1 f_2(\cos\varphi + \cos 3\varphi)$ noch berücksichtigt werden, da das Produkt $f_1 f_2$ zwar größenordnungsmäßig klein gegen f_1, aber immer noch beträchtlich größer als f_1^2 sein wird. Entsprechendes gilt auch für $f_1 h_2, f_2 h_1, h_1 h_2; f_2 f_3, \ldots, h_2 h_3$. Für eine Abschätzung der Terme der parallaktischen Gleichung sowie derjenigen der periodischen Störung mit dem Argument 3φ wird es aber genügen, sich auf die Glieder erster Ordnung zu beschränken. Tut man dies, so erfolgt die Bestimmung der Konstanten f_i, h_i formal nach linearen Gleichungen von der Form

[1]) Die Konstanten f_i, h_i haben hier, ebenso wie die unter (XX; 34) definierten k_i, im allgemeinen andere Bedeutung als in den vorhergehenden Abschnitten. Das gilt nur für f_0 und die Konstanten der „Variation" (f_2, h_2, k_2) nicht.

(XX; 29), deren Lösungen durch (XX; 29a) gegeben sind. Dabei ist, wie (XX; 33a) erkennen läßt,[1])

$$p_1 = -\frac{9}{8} w\gamma; \quad p_2 = -\frac{3}{2} w; \quad p_3 = -\frac{15}{8} w\gamma,$$

$$q_1 = \frac{3}{8} w\gamma; \quad q_2 = \frac{3}{2} w; \quad q_3 = \frac{15}{8} w\gamma$$

zu setzen. Für $i = 2$ erhält man (s. Abschnitt 174) die Konstanten der Variation, während aus

$$f_i = \frac{k_i p_i - 2q_i}{k_i(k_i^2 - 1)}; \quad h_i = \frac{(k_i^2 + 3) q_i - 2k_i p_i}{k_i^2(k_i^2 - 1)}, \qquad (i = 1, 3)$$

die übrigen Größen folgen. Da nach (XX; 34) $k_1^2 = 0.85602$ nur wenig, $k_3^2 = 7.7704$ aber stark von der Einheit abweicht, wird man erwarten dürfen, daß f_1, h_1 erheblich größer als f_3, h_3 ausfallen. Die Rechnung ergibt, mit $\gamma = 1/388.9 = 0.0025715$,

$$f_1 = 0.0001934; \quad h_1 = -0.0004118 = -1.'415 \ (-2.'1),$$
$$f_3 = -0.0000069; \quad h_3 = 0.0000343 = 0.'12 \ (0.'0).$$

Auch hier gibt diese ziemlich grobe Abschätzung die beobachteten Konstanten (die für die Störungen in Länge in Klammern beigefügt sind) größenordnungsmäßig gut wieder. Der Betrag h_1 der parallaktischen Schwankung in Länge ergibt sich allerdings prozentual zu klein, wenn die nicht unbeträchtlichen durch Kombination mit der Variation entstehenden Terme gleicher Periode vernachlässigt werden, wie dies hier geschehen ist.

Zur Bestimmung der jährlichen Gleichung brauchen in den Ansätzen für r und α Terme mit den Argumenten g und $\varphi, 2\varphi, \ldots$ nicht berücksichtigt zu werden, da keines dieser Argumente mit g', dem Argument der Jahresperiode, kommensurabel ist und somit zum Entstehen zusätzlicher Terme mit $\cos g'$ bzw. $\sin g'$ Beiträge liefert. Es genügt also, in den Störungsgliedern alle Terme mit φ fortzulassen, d.h.

$$\text{(XX; 35)} \qquad U' + \left(\frac{a}{r}\right)^2 = \frac{1}{2} w \frac{r}{a} \left(\frac{a'}{s}\right)^3; \quad V' = 0$$

zu setzen. In dem Störungsterm auf der rechten Seite der ersten Gleichung (XX; 35) kann

$$r = a; \quad s = a'(1 - e'\cos g')$$

gesetzt werden, während links die Ansätze

$$r = a(1 + f\cos g'); \quad \dot{\alpha} = v' + h\dot{g}'\cos g'$$

[1]) Entfernt man den Faktor -1 der linken Seiten, so erhalten sämtliche Glieder der rechten Seiten entgegengesetztes Vorzeichen wie in (XX; 33a).

genügen. Da die mittlere Bewegung der Sonne (wenn man von dem sehr geringfügigen Unterschied zwischen dem anomalistischen und dem siderischen Jahr absieht) $\dot{g}' = n = 1$ ist, erhält man

$$\dot{r} = -a\,f\,\sin g'; \quad \dot{\alpha} = \nu' + h\cos g',$$
$$\ddot{r} = -a\,f\cos g'; \quad \ddot{\alpha} = \quad -h\sin g'.$$

Multipliziert man formal $\dot{r}$, $\dot{\alpha} - \nu'$ mit $k\,\nu' = 1$ und $\ddot{r}$, $\ddot{\varphi}$ mit $k^2\,\nu'^2 = 1$, wo

$$k = \nu'^{-1} = \sqrt{w}; \quad k^2 = w$$

ist, so nehmen die Gleichungen (XX; 35) die gleiche Form an, wie wir sie bei den früheren Untersuchungen angetroffen haben. Durch Vergleich der Koeffizienten von $\cos g'$ bzw. $\sin g'$ erhält man dann wie in (XX; 29)

$$f(k^2 + 3) + 2h\,k = p = -\frac{3}{2}\,w\,e',$$
$$2f\,k + h\,k^2 = q = 0,$$

woraus

$$f = \frac{p}{w-1} = \frac{3}{2}\,\frac{w\,e'}{1-w}; \quad h = -\frac{2f}{\sqrt{w}} = -\frac{3\sqrt{w}\,e'}{1-w}$$

folgt. Mit $e' = 0.01673$, $w = 0.005595$ ergibt sich dann

$$f = 0.000141 \ (0.0001); \quad h = -0.003775 = -13'.0 \ (-11'.1)$$

in naher Übereinstimmung mit den in Klammern beigefügten strengen Werten.

178. *Störungen, die von der Neigung der Mondbahn herrühren. Die säkulare Bewegung der Knoten*

Bislang haben wir stets angenommen, daß die Ebene der Mondbahn mit der Ekliptik zusammenfällt. In Wirklichkeit erfolgt die Bewegung des Mondes in jedem Augenblick in einer Ebene (der instantanen Mondbahnebene), die – abgesehen von kleinen, durch die Sonnenstörungen hervorgerufenen periodischen Schwankungen – um $5°\,8'.7$ gegen die Ekliptik geneigt ist. Wie die Theorie der säkularen Störungen (s. Abschnitt 140) ergibt, bewegen sich die Knoten der Mondbahn auf der Ekliptik rückläufig. Diese schon im Altertum bekannte Knotenbewegung erfolgt mit einer Umlaufszeit von rund 18.6 Jahren.

Um diese säkulare und die hauptsächlichsten periodischen Störungen des Mondlaufs, die von der Neigung der Mondbahn herrühren, nach Form und Beträgen durch theoretische Überlegungen abzuschätzen, führen wir neben den in der Ekliptik liegenden Komponenten der Störbeschleunigung durch die Sonne eine dritte ein, die senkrecht zur Ekliptik wirkt. Sind $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Einheitsvektoren in Richtung der positiven Achsen des geozentrischen ekliptika-

len Koordinatensystems, so ist in (XX; 4a, b) der Ortsvektor des Mondes durch

$$(\mathrm{XX};\,36)\qquad \mathfrak{p} = r(\mathfrak{x}\cos b\cos l + \mathfrak{y}\cos b\sin l + \mathfrak{z}\sin b)$$

auszudrücken, wenn b, l die ekliptikale Breite und Länge des Mondes bezeichnen. Der geozentrische Ortsvektor der Sonne, deren Länge l' und deren Breite $b' = 0$ sei, ist durch

$$(\mathrm{XX};\,37)\qquad \mathfrak{q} = s(\mathfrak{x}\cos l' + \mathfrak{y}\sin l')$$

gegeben.

Wir führen nun statt des (abgesehen von der sehr geringfügigen Präzessionsbewegung) festen xyz-Systems ein anderes rechtwinkliges Koordinatensystem mit gleichem Drehungssinn ein, dessen Achsenrichtungen durch die Einheitsvektoren $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ gegeben seien, und zwar soll die $\mathfrak{u}$-Achse nach dem aufsteigenden Knoten der mittleren Mondbahnebene und die $\mathfrak{w}$-Achse nach deren nördlichem Pol zeigen. Es gelten dann die Transformationsformeln

$$(\mathrm{XX};\,38)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \mathfrak{u}\cos\Omega - \mathfrak{v}\sin\Omega\cos i + \mathfrak{w}\sin\Omega\sin i,\\ \mathfrak{y} &= \mathfrak{u}\sin\Omega + \mathfrak{v}\cos\Omega\cos i - \mathfrak{w}\cos\Omega\sin i,\\ \mathfrak{z} &= \phantom{\mathfrak{u}\sin\Omega + {}} \mathfrak{v}\sin i + \mathfrak{w}\cos i \end{aligned}\right.$$

und ihre Umkehrung

$$(\mathrm{XX};\,39)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{u} &= \mathfrak{x}\cos\Omega + \mathfrak{y}\sin\Omega,\\ \mathfrak{v} &= -(\mathfrak{x}\sin\Omega - \mathfrak{y}\cos\Omega)\cos i + \mathfrak{z}\sin i,\\ \mathfrak{w} &= (\mathfrak{x}\sin\Omega - \mathfrak{y}\cos\Omega)\sin i + \mathfrak{z}\cos i, \end{aligned}\right.$$

wenn i, Ω Neigung und Knotenlänge der mittleren Mondbahnebene bedeuten. Für die ungestörte Mondbahn ist auch dieses System fest; für die gestörte Mondbewegung wird man die mittlere Neigung als konstant, die mittlere Knotenlänge aber als lineare Funktion der Zeit ansehen müssen. Infolge der Knotenbewegung sind dann die Vektoren $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ Funktionen der Zeit, und zwar erhält man aus (XX; 38) und (XX; 39)

$$(\mathrm{XX};\,40)\qquad \left\{\begin{aligned} \dot{\mathfrak{u}} &= \dot\Omega(-\mathfrak{x}\sin\Omega + \mathfrak{y}\cos\Omega) &&= \dot\Omega(\mathfrak{v}\cos i - \mathfrak{w}\sin i),\\ \dot{\mathfrak{v}} &= -\dot\Omega(\mathfrak{x}\cos\Omega + \mathfrak{y}\sin\Omega)\cos i &&= -\dot\Omega\,\mathfrak{u}\cos i,\\ \dot{\mathfrak{w}} &= \dot\Omega(\mathfrak{x}\cos\Omega + \mathfrak{y}\sin\Omega)\sin i &&= \dot\Omega\,\mathfrak{u}\sin i \end{aligned}\right.$$

und

$$(\mathrm{XX};\,41)\qquad \left\{\begin{aligned} \ddot{\mathfrak{u}} &= \dot\Omega(\dot{\mathfrak{v}}\cos i - \dot{\mathfrak{w}}\sin i) &&= -\dot\Omega^2\,\mathfrak{u},\\ \ddot{\mathfrak{v}} &= -\dot\Omega\,\dot{\mathfrak{u}}\cos i &&= -\dot\Omega^2\cos i(\mathfrak{v}\cos i - \mathfrak{w}\sin i),\\ \ddot{\mathfrak{w}} &= \dot\Omega\,\dot{\mathfrak{u}}\sin i &&= \dot\Omega^2\sin i(\mathfrak{v}\cos i - \mathfrak{w}\sin i). \end{aligned}\right.$$

Während nun der ungestörte Mondort ständig in der mittleren Bahnebene, also der $\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}$-Ebene, verweilt, wird der gestörte Mond sich von dieser Ebene periodisch ein wenig nach der nördlichen und der südlichen Seite entfernen.

Sind also (Abb. 68) $\lambda - \Omega$ die in der mittleren Bahnebene vom aufsteigenden Knoten aus gezählte Länge des Mondes, β seine auf die $\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}$-Ebene bezogene Breite, so erhält man statt (XX; 36)

$$\text{(XX; 42)} \qquad \mathfrak{p} = r\{\mathfrak{u}\cos(\lambda - \Omega)\cos\beta + \mathfrak{v}\sin(\lambda - \Omega)\cos\beta + \mathfrak{w}\sin\beta\}.$$

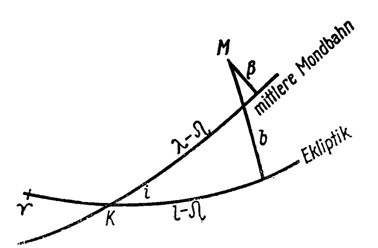


Abb. 68. Ort des Mondes bezüglich der mittleren Bahn und der Ekliptik

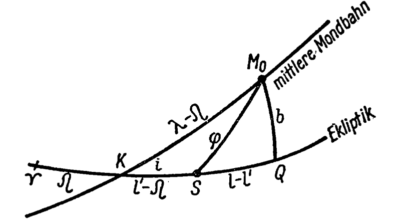


Abb. 69. Örter des ungestörten Mondes (M_0) und der Sonne (S) an der geozentrischen Sphäre

Multipliziert man nun, wie früher, die Bewegungsgleichungen (XX; 31) mit a^2 (damit man links den Faktor $a^3\nu'^2 = 1$ abtrennen kann) und setzt für $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ die Ausdrücke (XX; 42) bzw. (XX; 37) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} a^2\ddot{\mathfrak{p}} = &-\left(\frac{a}{r}\right)^2\{\mathfrak{u}\cos(\lambda - \Omega)\cos\beta + \mathfrak{v}\sin(\lambda - \Omega)\cos\beta + \mathfrak{w}\sin\beta\} - \\ &- a^3\left(\frac{a'}{s}\right)^3\frac{r}{a}(1 + 3\gamma\cos\varphi)\{\mathfrak{u}\cos(\lambda - \Omega)\cos\beta + \mathfrak{v}\sin(\lambda - \Omega)\cos\beta + \\ &+ \mathfrak{w}\sin\beta\} + a^3\left(\frac{a'}{s}\right)^3\frac{r}{a}\left\{3\cos\varphi - \frac{3}{2}\gamma(1 - 5\cos^2\varphi)\right\}\{\mathfrak{u}\cos(l' - \Omega) + \\ &+ \mathfrak{v}\cos i\sin(l' - \Omega) - \mathfrak{w}\sin i\sin(l' - \Omega)\}. \end{aligned}$$

Zur Ermittlung der von der Bahnneigung abhängigen Störungen genügt es, die $\mathfrak{w}$-Komponenten von $\mathfrak{p}$, $\ddot{\mathfrak{p}}$ und $\mathfrak{q}$ zu betrachten. Ist $W\mathfrak{w}$ die auf der $\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}$-Ebene senkrecht stehende Komponente der Beschleunigung $\ddot{\mathfrak{p}}$, setzen wir $a^2 W = W_1$ und ist wie früher $a^3\nu'^2 = 1$, also $a^3 = \nu'^{-2} = w \approx 1/180$, so dürfen wir in den mit w behafteten Störungsgliedern der rechten Seite dieser Gleichung diejenigen Terme vernachlässigen, die auch den kleinen Faktor $\gamma \approx 1/390$ enthalten. Es ist also

$$W_1 = -\left(\frac{a}{r}\right)^2\sin\beta - w\left(\frac{a'}{s}\right)^3\frac{r}{a}\sin\beta - 3w\left(\frac{a'}{s}\right)^3\frac{r}{a}\cos\varphi\sin i\sin(l' - \Omega)$$

oder, da man wegen der sehr kleinen Faktoren $\sin\beta$ und $w\sin i$ auch $r = a$, $s = a'$ setzen, d. h. für Sonne und Mond ungestörte Kreisbewegungen annehmen darf,

$$W_1 = -(1 + w)\sin\beta - 3w\cos\varphi\sin i\sin(l' - \Omega).$$

Hier ist, wie früher, φ der von den Vektoren $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ eingeschlossene Winkel. Im rechtwinkligen sphärischen Dreieck SQM_0 (Abb. 69), in dem S den Ort

der Sonne und M_0 den (ungestörten) Ort des Mondes an der geozentrischen Sphäre bedeuten, ist dann

$$\cos\varphi = \cos b \cos(l - l'),$$

also folgt

$$W_1 = -(1 + w)\sin\beta - 3w \sin i \cos b \cos(l - l') \sin(l' - \Omega). \tag{XX; 43}$$

Nun wird β, die „Breitenstörung" des Mondes, klein von der Ordnung der Störungen senkrecht zur Mondbahnebene, also von der Ordnung $w\,i$ sein. Ferner ist $i \approx 1/11$, also, da b von der Ordnung i ist, $1 - \cos b$ von der Ordnung i^2. Vernachlässigen wir also in (XX; 43) Ausdrücke von der Ordnung $w^2 i$ und $w\,i^3$, so ist

$$\begin{aligned} W_1 &= -\beta - 3w\,i \cos(l - l') \sin(l' - \Omega) = \\ &= -\left[\beta + \frac{3}{2} w\,i\{\sin(l - \Omega) - \sin(l - 2l' + \Omega)\}\right]. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß die Breitenstörung β, die ja periodisch um Null schwankt, die Form

$$\beta = p \sin(l - \Omega) + q \sin(l - 2l' + \Omega) \tag{XX; 44}$$

haben muß, wo p und q zwei noch unbestimmte Faktoren von der Ordnung $i w$ sein werden. Es ist demnach

$$W_1 = -\left(\frac{3}{2} w\,i + p\right)\sin(l - \Omega) + \left(\frac{3}{2} w\,i - q\right)\sin(l - 2l' + \Omega). \tag{XX; 45}$$

Andererseits erhält man aus (XX; 42), wenn man

$$\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{r} = \mathfrak{u}\,\xi + \mathfrak{v}\,\eta + \mathfrak{w}\,\zeta, \\ &\xi = \cos(\lambda - \Omega)\cos\beta; \quad \eta = \sin(\lambda - \Omega)\cos\beta; \quad \zeta = \sin\beta \end{aligned}\right. \tag{XX; 46}$$

setzt,

$$\ddot{\mathfrak{p}} = \frac{d}{dt^2}(r\,\mathfrak{r}) = \ddot{r}\,\mathfrak{r} + 2\dot{r}\,\dot{\mathfrak{r}} + r\,\ddot{\mathfrak{r}}.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} \dot{\mathfrak{r}} &= \dot{\mathfrak{u}}\xi + \dot{\mathfrak{v}}\,\eta + \dot{\mathfrak{w}}\,\zeta + \mathfrak{u}\,\dot{\xi} + \mathfrak{v}\,\dot{\eta} + \mathfrak{w}\,\dot{\zeta}, \\ \ddot{\mathfrak{r}} &= \ddot{\mathfrak{u}}\xi + \ddot{\mathfrak{v}}\,\eta + \ddot{\mathfrak{w}}\,\zeta + 2(\dot{\mathfrak{u}}\,\dot{\xi} + \dot{\mathfrak{v}}\,\dot{\eta} + \dot{\mathfrak{w}}\,\dot{\zeta}) + \mathfrak{u}\,\ddot{\xi} + \mathfrak{v}\,\ddot{\eta} + \mathfrak{w}\,\ddot{\zeta}. \end{aligned}$$

Führt man nun (XX; 40) und (XX; 41) ein und greift aus der entstehenden Vektorsumme die $\mathfrak{w}$-Komponente heraus, so erhält man für die zur mittleren Mondbahn normale Koordinate von $a^2\,\ddot{\mathfrak{p}}$

$$\begin{aligned} W_1 = a^3\Big[&\frac{\ddot{r}}{a}\zeta + 2\frac{\dot{r}}{a}(-\xi\,\dot{\Omega}\sin i + \dot{\zeta}) + \\ &+ \frac{r}{a}\{\eta\,\dot{\Omega}^2\cos i \sin i - \zeta\,\dot{\Omega}^2\sin^2 i - 2\dot{\xi}\,\dot{\Omega}\sin i + \ddot{\zeta}\}\Big]. \end{aligned} \tag{XX; 47}$$

Dieser Ausdruck ist, wie (XX; 45) lehrt, von der Ordnung $w\,i$. Wie dort, dürfen also auch hier alle Terme von höherer Ordnung unterdrückt werden.

Um die Größenordnung der einzelnen Summanden von (XX; 47) zu bestimmen, setzen wir, bis auf Glieder von der Ordnung e^2 bzw. w, wenn g die mittlere Anomalie des Mondes bedeutet,

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos g; \quad \dot{g} = \nu',$$

also

$$\frac{\dot{r}}{a} = \nu' e \sin g; \quad \frac{\ddot{r}}{a} = \nu'^2 e \cos g.$$

Ferner sei $\dot{\Omega} = \nu' k$, wo k offenbar klein von der Ordnung w ist; denn die Komponente der störenden Kraft, die eine Verschiebung der Knoten hervorruft, wirkt ja in der Ekliptikebene selbst.

Man kann nun ν'^2 als gemeinsamen Faktor aller Terme von (XX; 47) herausziehen und erhält, da $a^3 \nu'^2 = 1$ ist,

$$W_1 = \zeta\, e\cos g - 2\xi\, e\, k \sin g \sin i + 2\frac{\dot{\zeta}}{\nu'} e \sin g +$$
$$+ (1 - e\cos g)\left\{\eta\, k^2 \cos i \sin i - \zeta\, k^2 \sin^2 i - 2\frac{\dot{\xi}}{\nu'} k \sin i + \frac{\ddot{\zeta}}{\nu'^2}\right\}.$$

Nun sind aber

$$\xi, \eta, \frac{\dot{\xi}}{\nu'} \text{ von der Ordnung } 0,$$

$$e \approx \frac{1}{18} \text{ von der Ordnung } i \approx \frac{1}{11},$$

$$k \text{ von der Ordnung } w,$$

$$\zeta, \frac{\dot{\zeta}}{\nu'}, \frac{\ddot{\zeta}}{\nu'^2} \text{ von der Ordnung } i\, w;$$

man findet daher, daß alle Terme außer

$$-2\frac{\dot{\xi}}{\nu'} k \sin i + \frac{\ddot{\zeta}}{\nu'^2} \tag{XX; 48}$$

von höherer Ordnung als $i\, w$ sind. Insbesondere hat also die kleine Exzentrizität der Mondbahn auf die Abschätzung dieser Terme keinen Einfluß.

Aus (XX; 46) und (XX; 44) folgt

$$\text{(XX; 49)} \quad \begin{cases} \dot{\xi} = -(\dot{\lambda} - \dot{\Omega})\sin(\lambda - \Omega)\cos\beta - \dot{\beta}\cos(\lambda - \Omega)\sin\beta, \\ \dot{\zeta} = \dot{\beta}\cos\beta \approx \dot{\beta} = p\,(\dot{l} - \dot{\Omega})\cos(l - \Omega) + \\ \qquad\qquad + q\,(\dot{l} - 2\dot{l}' + \dot{\Omega})\cos(l - 2l' + \Omega), \\ \ddot{\zeta} \approx \ddot{\beta} = -p\,(\dot{l} - \dot{\Omega})^2 \sin(l - \Omega) - \\ \qquad\qquad - q\,(\dot{l} - 2\dot{l}' + \dot{\Omega})^2 \sin(l - 2l' + \Omega). \end{cases}$$

Nun ist λ die wahre Länge des Mondes in der Bahn, während l und l' die ekliptikalen Längen von Mond und Sonne bedeuten. Aus Abb. 69 folgt aber

$$\sin(\lambda - \Omega)\cos i = \sin(l - \Omega)\cos b.$$

Man darf also in allen Termen, die schon von der Ordnung $i\,w$ sind, $\lambda - \Omega = l - \Omega$ setzen, da $\cos i$ und $\cos b$ sich von der Einheit nur um Glieder von der Ordnung i^2 unterscheiden. Außerdem darf man, aus denselben Gründen, in (XX; 49) die wahren Längen durch die mittleren ersetzen, also $\dot\lambda = \dot l = \nu'$, $l' = \lambda'$, $\dot l' = \dot\lambda' = 1$ setzen.

Nach Beschränkung auf die Terme (XX; 48), in denen man nun auch

$$\cos\beta \approx 1; \quad \dot\beta \sin\beta \approx \beta\,\dot\beta \approx 0$$

setzen darf, ergibt sich

$$W_1 = 2i\,k(1-k)\sin(\lambda - \Omega) - p(1-k)^2\sin(\lambda - \Omega) - \\ - q\left(1 - \frac{2}{\nu'} + k\right)^2 \sin(\lambda - 2\lambda' + \Omega) \approx \\ \approx (2i\,k - p)\sin(\lambda - \Omega) - q\left(1 - \frac{2}{\nu'}\right)^2 \sin(\lambda - 2\lambda' + \Omega)$$

bis zur Ordnung $i w$. Vergleicht man dies mit (XX; 45) und bedenkt, daß diese beiden Ausdrücke für W_1 für alle Längen identisch sind, so ergibt sich aus den Gliedern mit dem Argument $\lambda - \Omega$

$$2i\,k - p = -\left(\frac{3}{2} i\,w + p\right)$$

oder

$$k = -\frac{3}{4} w = -\frac{3}{4} \nu'^{-2}, \tag{XX; 50}$$

d.h., die Bewegung der Knoten ist rückläufig und erfolgt mit einer Umlaufszeit von

$$\frac{1}{|k|\,\nu'} = \frac{4}{3}\nu' = 17.825 \text{ Jahren.}$$

Diese Abschätzung stimmt mit dem beobachteten Knotenumlauf von 18.6 Jahren befriedigend überein. Im Gegensatz zu der Umlaufszeit der Apsiden, die durch Beschleunigungskomponenten in der Ekliptik bestimmt wird, ist hier der Einfluß der Mondbahnexzentrizität nur gering. Die Schwierigkeiten, denen sich die älteren Theoretiker bei der Bestimmung der Apsidenbewegung des Mondes gegenübersahen, fallen also bei der Ermittlung der Knotenbewegung zunächst fort, so daß es gelingt, auf Anhieb zu einer brauchbaren Näherung zu gelangen.

Die Größe p im Ansatz (XX; 44) fällt beim Koeffizientenvergleich heraus, sie darf also innerhalb ihrer Größenordnung ($i\,w$) beliebig, also auch gleich Null angenommen werden. Das ist nicht weiter überraschend; denn das Glied $p\sin(\lambda - \Omega)$ in (XX; 44) verschwindet, wenn man die „mittlere Bahnneigung" i variiert. Aus der Beziehung im Dreieck M_0KQ (Abb. 69, S. 540)

$$\sin i \sin(\lambda - \Omega) = \sin b$$

folgt durch Variation von i und b (indem man die Länge konstant läßt),

$$\delta i \cos i \sin(\lambda - \Omega) = \delta b \cos b$$

oder, wenn δi und δb sehr klein sind,

$$\delta i \sin(\lambda - \Omega) = \delta b.$$

Setzt man also $\delta i = p$, so erhält man für die Breitenstörung $\delta b = \beta$ genau die Form des ersten Terms von (XX; 44). Er tritt also nur dann auf, wenn man für die mittlere Neigung i, die als Integrationskonstante aus Beobachtungen bestimmt werden muß, einen noch verbesserungsbedürftigen Wert angesetzt hat.

Aus der Gegenüberstellung der periodischen Glieder mit dem Argument $\lambda - 2\lambda' + \Omega$ in den beiden Ausdrücken für W_1 erhält man

$$\frac{3}{2} i w - q = -q\left(1 - \frac{2}{\nu'} + k\right)^2 \approx -q\left(1 - \frac{4}{\nu'}\right)$$

oder

$$q = \frac{3}{2} \frac{i w \nu'}{4} = \frac{3}{8} \frac{i}{\nu'} = 0.02805 = 8'.66. \tag{XX; 51}$$

Das ist die Amplitude der hauptsächlichsten Störung der Breite des Mondes, die eine Periode von

$$\frac{27.3217}{1 - \frac{2}{\nu'} + k} = 32.28 \text{ Tagen}$$

hat. Die geschätzte Amplitude stimmt mit der exakten ($+10'.4$) befriedigend überein.

Man kann dieser (ebenso wie die Variation und die jährliche Gleichung von Tycho Brahe entdeckten) periodischen Breitenstörung des Mondes noch eine andere Form von größerer Anschaulichkeit geben. Man setze, wenn nun Neigung und Knotenlänge der mittleren Mondbahnebene mit i_0 und Ω_0 bezeichnet werden,

$$\left\{\begin{array}{l|c} & \text{(I)} \\ \sin i_0 \cos \Omega_0 + \xi \cos\alpha = \sin i \cos \Omega, & \sin\lambda_0 \\ \sin i_0 \sin \Omega_0 + \xi \sin\alpha = \sin i \sin \Omega, & -\cos\lambda_0 \end{array}\right. \tag{XX; 52}$$

und es werden der Winkel α und die kleine Größe ξ so zu bestimmen sein, daß i, Ω die Lagekoordinaten der instantanen Mondbahnebene sind, die der mittleren eng benachbart ist (Abb. 70). Sind nun $i = i_0 + \delta i$, $\Omega = \Omega_0 + \delta\Omega$ und vernachlässigt man Quadrate und Produkte der sehr kleinen Korrektionen δi und $\delta\Omega$, so wird

$$\xi \cos\alpha = \delta i \cos i_0 \cos \Omega_0 - \delta\Omega \sin i_0 \sin \Omega_0,$$
$$\xi \sin\alpha = \delta i \cos i_0 \sin \Omega_0 + \delta\Omega \sin i_0 \cos \Omega_0$$

zu setzen sein, woraus

$$\left\{\begin{array}{l} \delta i \cos i_0 \approx \delta i \quad\; = \xi \cos(\alpha - \Omega_0), \\ \delta\Omega \sin i_0 \approx i_0 \delta\Omega = \xi \sin(\alpha - \Omega_0) \end{array}\right. \tag{XX; 53}$$

folgt. Multipliziert man (XX; 52) mit den Faktoren (I), so erhält man

(I) $\sin i_0 \sin(\lambda_0 - \Omega_0) + \xi \sin(\lambda_0 - \alpha) = \sin i \sin(\lambda_0 - \Omega) \approx \sin i \sin(\lambda - \Omega)$,

da sich, wie aus Abb. 70 unmittelbar abgelesen werden kann, λ_0 und λ nur um Größen von der Ordnung $i^2 \delta \Omega$ unterscheiden. Andererseits ist, wenn β wie oben die sehr kleine Breite des Mondortes M in bezug auf die mittlere Bahnebene bezeichnet,

$$\sin i_0 \sin(\lambda_0 - \Omega_0) = \sin b_0, \quad \sin i \sin(\lambda - \Omega) = \sin b \approx \sin b_0 + \beta.$$

Dann folgt aber aus (I) und nach (XX; 44), wenn dort $p = 0$ gesetzt, also i_0 als exakte mittlere Bahnebene angesehen wird,

$$\beta = \xi \sin(\lambda_0 - \alpha) = q \sin(l - 2l' + \Omega) \approx q \sin(\lambda_0 - 2\lambda' + \Omega_0).$$

Die Gleichung (I) ist also erfüllt, wenn

$$\xi = q \quad \text{[nach (XX; 51)]}, \quad \alpha = 2\lambda' - \Omega_0$$

gesetzt wird, und man erhält nach (XX; 53)

$$\delta i = q \cos 2(\lambda' - \Omega_0) = 8'.7 \cos 2(\lambda' - \Omega_0),$$

$$\delta \Omega = \frac{q}{i_0} \sin 2(\lambda' - \Omega_0) = 96'.4 \sin 2(\lambda' - \Omega_0).$$

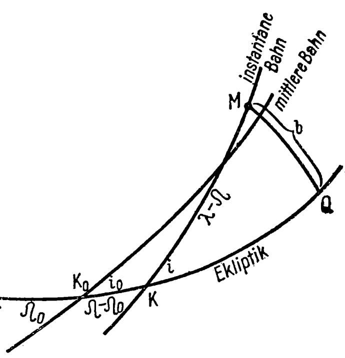


Abb. 70. Mittlere und instantane Mondbahn

Neigung und Knotenlänge erleiden also infolge der Breitenstörung eine periodische Schwankung mit dem Argument $2(\lambda' - \Omega_0)$, die sich bei der Knotenlänge der gleichförmigen Abnahme überlagert. Die Periode dieser Schwankung beträgt $1/2\,(1 - k\nu')$ Jahre, also, wenn wir für $k\nu'$ den strengen Wert $-1/18.6 = -0.05376$ einsetzen,

$$0.4745 \text{ Jahre} = 173.31 \text{ Tage}.$$

Diese Zeit benötigt die mittlere Sonne, um während ihres Umlaufs um die Ekliptik von einem Knoten der Mondbahn zum nächsten zu gelangen.

Die Neigung der Mondbahn ruft auch eine periodische Schwankung der ekliptikalen Länge des Mondes hervor. Der Hauptteil dieser Schwankung ist aber rein geometrischer Natur und dadurch bedingt, daß die in der Mondbahn gezählte Länge auf die Ekliptik projiziert wird. Diese „Reduktion auf die Ekliptik" genannte Ungleichheit in Länge wurde (s. Abschnitt 5) schon von Hipparch bemerkt. Sie hat die Periode eines halben synodischen Monats und (Band I, S. 27) eine Amplitude von 6'.9.

Daß die Knoten eine rückläufige Bewegung mit der oben abgeschätzten Geschwindigkeit zeigen, ist übrigens auch ohne besondere Mühe leicht einzusehen. Ist m die Masse der Erde und $\mu = 0$ die des Mondes, so würde in der ungestörten Bewegung die Erhebung z des Mondes über die Ekliptik der Differentialgleichung

(XX; 54a) $$\ddot{z} = -k^2 \frac{m}{r^3} z$$

genügen. Tritt aber die Sonne, mit der Masse M und dem Abstand R, als störender Körper hinzu, so ist

$$(XX;\ 54\mathrm{b})\qquad \ddot{z} = -k^2\left(\frac{m}{r^3} + \frac{M}{R^3}\right)z = -\frac{k^2 m}{r^3}\left(1 + \frac{M}{m}\frac{r^3}{R^3}\right)z \approx$$
$$\approx -\frac{k^2 m}{r^3}(1 + w)\,z.$$

Während aber die Beschleunigung (XX; 54a), dem dritten KEPLERschen Gesetz zufolge, die z-Koordinate in eine Schwingung von der Periode

$$T_0 \sim \sqrt{\frac{a_0^3}{m}}$$

versetzen würde, wenn a_0 die mittlere Mondentfernung in der ungestörten Bahn bedeutet, wird die Periode infolge der Beschleunigung (XX; 54b)

$$T \sim \sqrt{\frac{a^3}{m(1+w)}}$$

lauten, wenn a der gestörte mittlere Abstand des Mondes ist. Nach (XX; 14a) ist aber $a = a_0(1 - {}^1/_6 w)$. Man findet also

$$T = T_0\left(\frac{a}{a_0}\right)^{3/2}(1+w)^{-1/2} = T_0\left(1 - \frac{1}{6}w\right)^{3/2}(1+w)^{-1/2} \approx T_0\left(1 - \frac{3}{4}w\right),$$

d.h., die durch die Sonnenstörung verstärkte Beschleunigungskomponente senkrecht zur Ekliptik bewirkt, daß der gestörte Mond seine periodische Bewegung in dieser Richtung in etwas kürzerer Zeit als der ungestörte vollendet, und auch der Betrag dieser Verkürzung, die das Rückwärtsschreiten der Knoten verursacht, ergibt sich aus dieser einfachen Überlegung mit der gleichen guten Annäherung wie die obige Analyse.

179. *Die säkulare Beschleunigung des Mondes*

Der Satz von der Unveränderlichkeit der großen Halbachsen der Planetenbahnen, der auch die Konstanz der mittleren Bewegungen in Länge nach sich zieht, gilt für die Bewegung des Mondes um die Erde nur mit Einschränkung. EDMUND HALLEY fand, als er einerseits antike Mondbeobachtungen mit den rund tausend Jahre später erfolgten arabischen, andererseits aber diese mit neueren verglich, daß die Bewegung des Mondes in Länge seit dem Altertum langsam zugenommen haben muß. In einer 1693 veröffentlichten Schrift gab HALLEY diese Entdeckung bekannt, ohne allerdings einen genauen Betrag für die „säkulare Beschleunigung" des Mondes zu nennen. Spätere Autoren griffen dieses Problem wieder auf. DUNTHORNE leitete 1749 eine Zunahme der mittleren Mondbewegung um 10″ im Jahrhundert ab. Wenig später (1752) fand TOBIAS MAYER aus ähnlichen Untersuchungen 6″7, einen Wert, den er in einer 1770 postum veröffentlichten Abhandlung auf 9″ korrigiert hat. 1757 gab LALANDE 9″886 an, eine Zahl, die offensichtlich eine durch den Zuverlässigkeitsgrad der Beobachtungen keineswegs gerechtfertigte Genauigkeit vor-

täuscht. Aus allen diesen empirischen Untersuchungen geht mit Sicherheit nur die Tatsache der Säkularbeschleunigung selbst und die Vermutung hervor, daß ihr Betrag etwa innerhalb der Grenzen 6″ bis 10″ im Jahrhundert liegt.

Die ersten Theoretiker, die sich bemüht haben, diese Erscheinung himmelsmechanisch zu erklären, waren LAGRANGE und LAPLACE. LAGRANGE gelangte anfangs zu der Überzeugung, daß es sich um einen Scheineffekt handele, der durch die Unzuverlässigkeit der von PTOLEMÄUS und den Arabern überlieferten Mondörter vorgetäuscht werde. Später (1783), als er sich wiederum mit diesem Problem beschäftigte, kam er auf diejenige Lösung, die sich später als richtig herausstellen sollte, daß nämlich die säkularen Veränderungen der Erdbahnelemente, insbesondere der Exzentrizität, als sekundären Störungseffekt eine langsame säkulare Verkürzung des siderischen Monats zur Folge haben könnten. Er versuchte zunächst, einen entsprechenden Effekt aus den gegenseitigen Störungen der Planeten Jupiter und Saturn herzuleiten, derart etwa, daß die säkulare Änderung der Exzentrizität der Jupiterbahn eine säkulare Beschleunigung des Saturn bewirke. Da seine Rechnungen aber einen merklichen Effekt dieser Art nicht erkennen ließen, gab er die Versuche auf. Dagegen konnte LAPLACE zeigen, daß durch die säkulare Variation der Exzentrizität der Jupiterbahn eine säkulare Beschleunigung der mittleren Bewegung der Jupitersatelliten hervorgerufen wird. Er übertrug diese Entdeckung auf die Mondtheorie und errechnete den Betrag der Säkularbeschleunigung dieses Himmelskörpers, in befriedigender Übereinstimmung mit dem empirischen Befund, zu 10″.2 in hundert Jahren.

Spätere Autoren (PLANA, HANSEN, AIRY u.a.) fanden noch etwas größere Beträge, die zwischen 11″.5 und 12″.5 lagen, bis schließlich ADAMS (1853) zeigen konnte, daß alle diese Ergebnisse einer nicht unbeträchtlichen Korrektion bedürften. Der hier begangene Fehler ist sehr ähnlich dem, der den älteren Theoretikern bei der Bestimmung der Perihelbewegung der Mondbahn unterlaufen war (s. Abschnitt 176). Dort hatte sich für die Größe γ der jährlichen Änderung der Perihellänge ein viel zu kleiner Betrag ergeben, weil die ziemlich bedeutenden, vor allem durch die Evektion induzierten, Restglieder vernachlässigt worden waren. ADAMS konnte nachweisen, daß auch bei der Ermittlung der Säkularbeschleunigung des Mondes Terme höherer Ordnung nicht unterdrückt werden dürfen; sie ergeben, obwohl an sich sehr klein, doch in der Summe einen namhaften Betrag, da sie zahlreich sind und durchweg dasselbe (negative) Vorzeichen haben. Nach ADAMS (1859) verringert sich damit die Konstante der Säkularbeschleunigung auf 5″.7, also auf fast die Hälfte des von LAPLACE in erster Näherung gefundenen Wertes. Im gleichen Jahr fand DELAUNAY als Ergebnis einer noch genaueren Analyse den nur wenig größeren Betrag von 6″.11.

Die neueren theoretischen Untersuchungen, vor allem die Arbeiten von E.W. BROWN, haben dieses Ergebnis nicht mehr wesentlich verändern können. Die Diskrepanz zwischen diesem theoretisch nun wohlbegründeten Wert und den Beobachtungen hat sich indessen nicht ganz beseitigen lassen. Während die älteren Untersuchungen durchweg auf empirische Werte zwischen 10″ und 12″ geführt hatten, konnte S. NEWCOMB durch eine sorgfältige Analyse

moderner Mondbeobachtungen in Verbindung mit einer kritischen Untersuchung der aus der Antike überlieferten Finsternisdaten als wahrscheinlichsten Wert der säkularen Beschleunigung 8″ ableiten, einen Betrag also, der im Vergleich mit der Theorie immer noch um 2″ zu groß erscheint und den man, ohne mit der Erfahrung in Widerspruch zu geraten, kaum noch verkleinern darf.

Wir sind heute geneigt, die Ursache dieser Abweichung in einer sehr langsamen Abnahme der Rotationsgeschwindigkeit der Erde zu suchen, so daß also dieser Überschußbetrag der Säkularbeschleunigung des Mondes durch eine säkulare Veränderung der Zeiteinheit vorgetäuscht wird. Der Grund für diese Verlangsamung der Erdrotation wird in der Gezeitenreibung zu suchen sein. Die Vermutung, daß die der Erdrotation ständig entgegengesetzte Wanderung der Gezeitenwellen eine Bremswirkung auf die Achsendrehung der Erde haben könnte, wurde zuerst (1754) von KANT ausgesprochen, später von DELAUNAY und NEWCOMB aufgegriffen und hat schließlich in dem Werk „Ebbe und Flut“ von G. H. DARWIN eine gründliche und gemeinverständliche Darstellung gefunden.

Die erste Näherung für den Betrag der Säkularbeschleunigung, das Ergebnis von LAPLACE also, läßt sich fast mit einem Federstrich ableiten. Man setze für den Radiusvektor der Sonne

$$s = a'(1 - e'\cos g' + e'^2 \sin^2 g' - \cdots) = a'(1 + x).$$

Dann ist, bis zu Termen der Ordnung e'^2 einschließlich,

$$\left(\frac{a'}{s}\right)^3 = 1 - 3x + 6x^2 - \cdots = 1 + 3(e'\cos g - e'^2 \sin^2 g') + 6e'^2\cos^2 g' + \cdots =$$

$$= 1 + 3e'\cos g' + \frac{3}{2}e'^2(1 + 3\cos 2g') + \cdots.$$

Nimmt man nun an, daß

$$e' = e'_0 - \alpha t$$

gesetzt werden kann, die Exzentrizität der Erdbahn also langsam der Zeit t proportional abnimmt, so ist, der Störungstheorie der Erdbewegung zufolge, wenn als Epoche $t = 0$ der Zeitpunkt 1950.0 gewählt wird,

$$e'_0 = 0.0167301; \quad \alpha = +4.17 \cdot 10^{-7},$$

wenn t in julianischen Jahren zu 365.25 mittleren Sonnentagen gerechnet wird. Da aber in allen Formeln dieses Kapitels die Zeiteinheit so gewählt wurde, daß $1^a = 2\pi$ ist, haben wir hier

$$\alpha = 8.34\pi \cdot 10^{-7}$$

zu setzen. Wegen der Kleinheit dieser Zahl dürfen wir deren Quadrate überall vernachlässigen. Man schreibe also

$$e'^2 = e_0'^2 - 2\alpha e'_0 t = e_0'^2 - 2e'_0 \sin\alpha t,$$

indem man die säkulare Verminderung der Exzentrizität durch eine periodische Störung von außerordentlich langer Periode ersetzt. Da diese mit keiner der übrigen periodischen Terme in den Koordinaten des Mondes kommensurabel ist, also unabhängig von diesen wirksam sein wird (wenigstens wenn wir uns,

wie LAPLACE, auf die Hauptglieder der Störung beschränken), so kann man zur Bestimmung ihres Einflusses auf die Mondbewegung, die hier wieder als in der Ekliptik erfolgend gelten soll, den gleichen Algorithmus verwenden, der in Abschnitt 177 bei der Bestimmung der Konstanten der jährlichen Gleichung zum Ziel führte. Man darf also, unter Ausschaltung aller periodischen Terme außer jenem langperiodischen mit dem Argument αt, wie in (XX; 35)

$$U' + \left(\frac{a}{r}\right)^2 = \frac{1}{2} w \frac{r}{a} \left(\frac{a'}{s}\right)^3; \quad V' = 0$$

setzen. Rechts ist dann, bis zu Termen von der Ordnung $e_0'^2$,

$$\left(\frac{a'}{s}\right)^3 = 1 + \frac{3}{2} e'^2 = 1 + \frac{3}{2} e_0'^2 - 3 e_0' \sin\alpha t.$$

Die Störbeschleunigung ist also von der Ordnung $\alpha\, w\, e_0'$, und man darf daher, wenn man Terme von höherer Ordnung unterdrückt, $r = a$ setzen. Führt man als Argument der langperiodischen Störung

$$G = \frac{\pi}{2} + \alpha t$$

ein, so nehmen die Differentialgleichungen die Gestalt

$$\text{(XX; 55)} \qquad U' + \left(\frac{a}{r}\right)^2 = \frac{1}{2} w \left(1 + \frac{3}{2} e_0'^2 + 3 e_0' \cos G\right); \quad V' = 0$$

an, die formal genau derjenigen entspricht, die wir bei der Abschätzung der jährlichen Gleichung benutzt haben.

Auf den linken Seiten von (XX; 55) sind dann die Ansätze

$$\frac{r}{a} = 1 + f \cos G; \quad l = \varphi + t = v' t + h(\sin G - 1)$$

angebracht, und wenn man

$$\dot{G} = \alpha = v' k$$

setzt, so erhält man

$$\frac{\dot{r}}{a} = -v' f k \sin G; \quad \dot{l} = \dot{\varphi} + 1 = v'(1 + h k \cos G),$$

$$\frac{\ddot{r}}{a} = -v' f k^2 \cos G; \quad \ddot{\varphi} = -v'^2 h k^2 \sin G.$$

Die Größen f, g bestimmen sich also, wie früher die Konstanten anderer periodischer Störungen, aus den Gleichungen

$$\text{(XX; 56)} \qquad \begin{cases} f(k^2 + 3) + 2 h k = p = -\frac{3}{2} w e_0', \\ 2 f k + h k^2 = q = 0, \end{cases}$$

in denen p, q die mit entgegengesetztem Vorzeichen zu versehenden Koeffizienten der periodischen Störbeschleunigungen auf den rechten Seiten der

Differentialgleichungen bezeichnen. Die Lösung der Gleichungen (XX; 56) ergibt

$$f = -\frac{p}{1 - k^2}; \quad h = -\frac{2f}{k} = \frac{2p}{k(1 - k^2)}$$

oder, da $k^2 = \alpha^2/\nu'^2 = w\,\alpha^2$ vernachlässigt werden darf,

$$f = -p = \frac{3}{2} w\, e_0'; \quad h = \frac{2p}{k} = -3\frac{w\, e_0'\, \nu'}{\alpha}.$$

Man findet also für die säkularen Änderungen von r und l

$$r = a\left(1 + \frac{3}{2} w\, e_0' \cos G\right) = a\left(1 - \frac{3}{2} w\, e_0' \sin \alpha\, t\right) = a\left(1 - \frac{3}{2} w\, e_0'\, \alpha\, t\right),$$

$$l = \nu' t - 3\frac{w\, e_0'\, \nu'}{\alpha} (\sin G - 1) = \nu' t - 3\frac{w\, e_0'\, \nu'}{\alpha} (\cos \alpha\, t - 1) =$$

$$= \nu' t + \frac{3}{2} w\, e_0'\, \nu' \alpha\, t^2.$$

Der mittlere Abstand des Mondes nimmt also der Zeit proportional langsam ab, die mittlere Bewegung

$$\dot{l} = \nu' (1 + 3 w\, e_0'\, \alpha\, t)$$

langsam zu. Setzt man für $w = \nu'^{-2}$, e_0' und α die bekannten numerischen Werte ein, so erhält man für die Konstante der säkularen Beschleunigung des Mondes in hundert julianischen Jahren

$$\frac{3}{2} w\, e_0'\, \nu' \alpha \cdot 10^4 = 0.000005006 = 10''.33,$$

also fast genau den von LAPLACE angegebenen Wert.

Dieser Betrag, der $w = \nu'^{-2}$ als Faktor enthält, stellt, wie weiter oben bemerkt, nur eine erste Näherung dar. Die strenge, zuerst von ADAMS, später von DELAUNAY und anderen durchgeführte Analyse führt auf Störungsterme höherer Ordnung, die mit $w^2, w^{5/2}, w^3, w^{7/2}, \ldots$ fortschreiten und deren Beträge sämtlich negativ sind und nur langsam gegen Null streben. DELAUNAY erhielt (mit den zu seiner Zeit bekannten Werten von e_0' und α) für die Gesamtheit der Terme mit

	w	$+10''.659$
	w^2	$-\ 2.343$
	$w^{5/2}$	$-\ 1.582$
	w^4	$-\ 0.711$
	$w^{7/2}$	$-\ 0.217$
	w^4	$-\ 0.062$
zusammen		$+\ 5''.7$

Die Konvergenz des Verfahrens ist also außerordentlich schwach. Wir können hier auf die sehr umständliche Rechnung, die zu diesem Ergebnis führt, nicht eingehen. Der Leser sei auf die detaillierte Berechnung der dreizehn w^2 proportionalen Terme verwiesen, die TISSERAND im „Traité de mécanique céleste", Band 3, S. 240ff., wiedergibt und aus der das Verfahren dieser langwierigen Untersuchungen deutlich sichtbar wird.

KAPITEL XXI

DAS HILLSCHE MONDPROBLEM

180. *Die Untersuchungen von Hill über das Variationsproblem*

Wir sind bei unseren mehr abschätzenden als strengen Untersuchungen über das Mondproblem meistens von den HILLschen Differentialgleichungen ausgegangen. Um die wichtigsten, weil der Beobachtung unmittelbar zugänglichen und daher auch schon seit langer Zeit bekannten, periodischen Störungen in Länge scharf hervortreten zu lassen, bevorzugten wir die in Polarkoordinaten ausgedrückte Form (XX; 8) der HILLschen Gleichungen bei der Herausarbeitung derjenigen Anomalien der Mondbewegung, die von der Parallaxe der Sonne, der Exzentrizität der Erdbahn, der Mondmasse und der Neigung der Mondbahn nicht abhängen.

HILL selbst benutzt bei seinen Untersuchungen über dieses stark eingeschränkte Problem die Differentialgleichungen (XX; 5) in den rechtwinkligen Koordinaten des rotierenden Systems, die den Vorteil haben, von trigonometrischen Ausdrücken frei zu sein. Die HILLsche Analyse dieser Gleichungen, eine der glänzendsten Leistungen auf unserem an solchen Leistungen wahrlich nicht armen Gebiet, fehlt denn auch in kaum einem der einschlägigen Lehrbücher der Himmelsmechanik, so daß wir uns hier, ohne uns in Einzelheiten zu verlieren, darauf beschränken dürfen, den Gang der Untersuchung deutlich zu machen und über die hauptsächlichsten Ergebnisse zu berichten.

Die rasche Konvergenz der Reihenentwicklungen im Variationsproblem (Abschnitt 174), sofern man sich auf die bei der Bewegung des Erdmondes vorliegenden Verhältnisse beschränkt, war uns schon aufgefallen. Die HILLschen Untersuchungen über die Variationsbahn liefern aber mehr, nämlich diejenige Lösung des Systems (XX; 5) unter beliebigen Anfangsbedingungen, die auf einfach-periodische Bahnen, also auf eine einparametrige Schar von geschlossenen und zu beiden Achsen des rotierenden Systems symmetrischen Lösungskurven führt. Es stellt sich dabei allerdings heraus, daß die trigonometrischen Reihen, die wir in (XX; 10) für Polarkoordinaten angesetzt hatten, im Falle des Erdmondes ($a = 0.176$) sehr gut, für größere mittlere Erdabstände eines Satelliten aber rasch fortschreitend schlechter konvergieren. Dasselbe gilt natürlich auch für die rechtwinkligen Koordinaten. HILL sah sich daher gezwungen, für mittlere Abstände, die etwa 0.3 Längeneinheiten, also 0.3/69 AE, übertreffen (bzw. für Satelliten mit synodischen Umlaufszeiten von mehr als 70 Tagen), an Stelle der dann schon sehr langsam konvergierenden Reihen Lösungen durch numerische Integration der Differentialgleichungen zu suchen.

Die Differentialgleichungen (XX; 6)

$$\text{(XXI; 1)}\quad \begin{cases} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \xi\left(3 - \dfrac{1}{r^3}\right) = \dfrac{\partial \Omega}{\partial \xi}, \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = -\dfrac{\eta}{r^3} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial \eta}, \end{cases} \quad \left(r^2 = \xi^2 + \eta^2;\ \Omega = \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{r}\right)$$

haben das JACOBIsche Integral

$$2\Omega - C = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = 3\xi^2 + \frac{2}{r} - C. \quad \text{(XXI; 2)}$$

Die HILLsche Grenzkurve (s. Abschnitt 115) hat also die Gleichung

$$2\Omega - C = 0 = 3\xi^2 + \frac{2}{r} - C; \quad r = \frac{2}{C - 3\xi^2},$$

aus der hervorgeht, daß $\xi^2 < C/3$ sein muß, da $r > 0$ ist. Die Grenzkurve ist also zwischen den beiden Geraden $\xi = \pm\sqrt{C/3}$ eingeschlossen, die für $r \to \infty$ erreicht werden, also Asymptoten der Grenzkurve darstellen. Da ihre Gleichung nur ξ^2 und η^2 enthält, ist die Grenzkurve symmetrisch zu beiden Achsen des Koordinatensystems. Schnittpunkte mit der η-Achse ($\xi = 0$, $r = \pm\eta$) existieren immer und ausschließlich bei $\eta = \pm 2/C$. Um die Schnittpunkte mit der ξ-Achse zu bestimmen, genügt es, wegen der Symmetrie der Kurve, die mit der *positiven* ξ-Achse zu ermitteln. Ist deren Abszisse $\xi_0 > 0$, so gilt wegen $r = \xi_0$ die kubische Gleichung

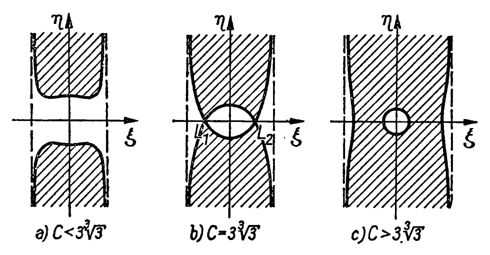


Abb. 71. Grenzkurven und verbotene Gebiete (schraffiert) im HILLschen Mondproblem

$$\xi_0^3 - \frac{1}{3} C\, \xi_0 + \frac{2}{3} = 0. \quad \text{(XXI; 3)}$$

Diese Gleichung hat nach einem Satz von DESCARTES (s. Band I, S. 270) höchstens zwei positive Wurzeln, da in der Folge der Glieder zwei Vorzeichenwechsel stattfinden. Die CARDANIsche Lösung

$$\xi_0 = \sqrt[3]{-\frac{1}{3} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{3} - \sqrt{D}}; \quad D = \frac{1}{9}\left(1 - \frac{C^3}{81}\right)$$

ergibt, wenn die Diskriminante $D > 0$, also $C^3 < 81$ ist, eine negative Wurzel, die dann auch die einzige reelle ist. Für

$$C < 3\sqrt[3]{3} = 4.326$$

existiert demnach kein positives ξ_0. Die Grenzkurve hat dann etwa die in Abb. 71a gezeichnete Gestalt. Die Bewegung ist überall außerhalb der schraffierten, von den beiden Ästen der Grenzkurve umschlossenen Gebiete freizügig.

Für den kritischen Fall $C = 3\sqrt[3]{3}$, $\xi_0 = x/\sqrt[3]{3}$ nimmt Gleichung (XXI; 3) die Form

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2 (x + 2) = 0$$

an, besitzt also die positive Doppelwurzel $\xi_0 = 1/\sqrt[3]{3} \approx 0.6934$, und die Form der Grenzkurve ist dann die in Abb. 71b skizzierte. Die beiden Doppelpunkte entsprechen den LAGRANGEschen Librationszentren L_1 und L_2 im eigentlichen „problème restreint". Es mag überraschen (obwohl es aus Symmetriegründen gar nicht anders sein kann), daß hier die Grenzkurve gleichzeitig Spitzen in L_1 und L_2 zeigt, was im „problème restreint" sonst nur zutrifft, wenn die beiden endlichen Massen gleich sind. Man bedenke aber, daß im HILLschen Problem die Massen (und daher auch ihr Verhältnis) überhaupt nicht in Erscheinung treten, da sie ganz in der Dimensionierung der Längeneinheit aufgegangen sind.

Wächst C über den kritischen Wert hinaus, so gilt der casus irreducibilis, und die positive Doppelwurzel trennt sich in zwei verschiedene zu beiden Seiten des Librationszentrums, während die dritte wegen des DESCARTESschen Satzes notwendig negativ bleibt. Es entstehen also (Abb. 71c) drei getrennte Gebiete, in denen Bewegung stattfinden kann: ein geschlossenes um den Koordinatenursprung (Erde), dessen Umrandung für wachsendes C immer mehr dem Kreis $r = 2/C$ ähnlich wird und das den Spielraum für Satellitenbahnen umschließt, ferner zwei unendlich ausgedehnte Bereiche jenseits der asymptotisch verlaufenden Kurven, die den planetaren Raum um die im unendlich fernen Punkt der ξ-Achse anzunehmende Sonne gegen den Einflußbereich der Erde abgrenzen.

Alle Lösungskurven der Gleichungen (XXI; 1) verlaufen, wie auch im allgemeinen „problème restreint", zur ξ-Achse spiegelbildlich. Da aber die Gleichungen ihre Form nicht ändern, wenn man ξ mit $-\xi$, η mit $-\eta$ vertauscht, so ist der Bewegungsverlauf in den Quadranten (I) und (III) bzw. (II) und (IV) kongruent, was nur möglich ist, wenn die Bahnkurven auch zur η-Achse symmetrisch sind. Alle einfach-periodischen Lösungen (die „Variationsbahnen" im Falle der Satellitenbewegung) sind also so beschaffen, daß beide Achsen in symmetrisch zum Koordinatenanfang liegenden Punkten senkrecht durchschritten werden und die Bahnkurven in allen vier Quadranten kongruent sind. Eine solche Bewegung, die periodisch in der Umlaufszeit $T = 2\pi/\nu = 2\pi m$ durchlaufen werde, läßt sich dann in Form der trigonometrischen Reihen

$$\text{(XXI; 4)} \quad \begin{cases} \xi(t) = A_1 \cos\nu t + A_3 \cos 3\nu t + A_5 \cos 5\nu t + \cdots, \\ \eta(t) = B_1 \sin\nu t + B_3 \sin 3\nu t + B_5 \sin 5\nu t + \cdots \end{cases}$$

darstellen. Für sehr erdnahe Satelliten, die nur geringfügig gestört werden und für die $m = 1/\nu$ sehr klein ist, nähern sich diese Kurven der Kreisform

$$\xi \to R \cos\nu t; \quad \eta \to R \sin\nu t,$$

da ja Kreise die einzigen Kegelschnitte sind, die auch im rotierenden System stets einfach-periodisch sind. Aus (XXI; 4) leitet man leicht

$$\text{(XXI; 5)} \quad r(t) = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = R_0 + R_2 \cos 2\nu t + R_4 \cos 4\nu t + \cdots$$

für den Radiusvektor ab, eine Gleichung, die der Form nach genau mit derjenigen für die Variationsbahn (XX; 10) übereinstimmt und für $m \to 0$ (wegen des dritten KEPLERschen Gesetzes) in

$$r \to R_0 = R = a = \nu'^{-2/3} = (\nu + 1)^{-2/3}$$

übergeht. Hieraus folgt, daß A_1, B_1 und R_0 den Faktor

$$\nu'^{-2/3} = m^{2/3}\left(1 - \frac{2}{3} m + \cdots\right)$$

enthalten. Im Falle des Erdmondes ist $\nu = 12.36875$, $m = 0.08085$.

Die Bestimmung der Koeffizienten A, B als Funktionen von m, das als Scharparameter der Variationsbahnen (XXI; 4) gelten kann, wird außerordentlich durch die auf den rechten Seiten der Differentialgleichungen (XXI; 1) auftretende Größe $1/r^3$ erschwert. Man könnte zwar die Gleichungen

$$\frac{\xi}{r^3} = 3\xi + 2\dot{\eta} - \ddot{\xi}; \quad \frac{\eta}{r^3} = -2\dot{\xi} - \ddot{\eta}$$

quadrieren und mit $r^6 = (\xi^2 + \eta^2)^3$ multiplizieren. Dann entständen aber Gleichungen 8. Grades in ξ, η und deren Ableitungen, und selbst wenn es gelänge, die sehr komplizierte Entwicklung der entstehenden Ausdrücke in trigonometrische Reihen durchzuführen, würde man bei der Koeffizientenvergleichung Rekursionsformeln gleich hohen Grades zwischen den unendlich vielen Konstanten A, B erhalten, deren Auswertung unüberwindliche Schwierigkeiten entgegenständen.

HILL gelingt es, dieses Problem auf ein solches vom zweiten Grade zu reduzieren, indem er das JACOBIsche Integral zu Hilfe nimmt. Multipliziert man nämlich die Gleichungen (XXI; 1) mit den Faktoren $-\eta, \xi$ bzw. ξ, η und addiert, so erhält man

$$\text{(XXI; 6)} \quad \begin{cases} \xi\ddot{\eta} - \eta\ddot{\xi} + 2(\xi\dot{\xi} + \eta\dot{\eta}) + 3\xi\eta = 0, \\ \xi\ddot{\xi} + \eta\ddot{\eta} - 2(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) - 3\xi^2 + \dfrac{1}{r} = 0. \end{cases}$$

Die zweite Gleichung nimmt aber, wenn man $1/r$ durch (XXI; 2) eliminiert, die Form

$$\text{(XXI; 7)} \quad \xi\ddot{\xi} + \eta\ddot{\eta} - 2(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) + \frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - \frac{9}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}C = 0$$

an. Es ist also r aus den Gleichungen (XXI; 6) und (XXI; 7), die das Problem vollständig repräsentieren, ganz verschwunden, und alle Terme sind vom zweiten Grad.

Um auch die für die Analyse unbequeme trigonometrische Form der Ansätze (XXI; 4) zu vermeiden, führt HILL statt ξ, η zwei neue Variable

$$s = \xi - i\eta; \quad u = \xi + i\eta$$

ein, so daß

$$\xi = \frac{1}{2}(s + u); \quad \eta = \frac{i}{2}(s - u)$$

zu setzen ist. Statt der Differentialgleichungen (XXI; 6) und (XXI; 7) ergibt sich dann nach kurzer Rechnung

$$u\ddot{s} - s\ddot{u} - 2i(u\dot{s} + s\dot{u}) + \frac{3}{2}(s^2 - u^2) = 0,$$

$$u\ddot{s} + s\ddot{u} - 2i(u\dot{s} - s\dot{u}) + \dot{u}\dot{s} - \frac{9}{4}(s + u)^2 + C = 0$$

oder, wenn man die halbe Summe und Differenz dieser Gleichungen bildet,

$$\text{(XXI; 8)} \quad \begin{cases} u\ddot{s} - 2iu\dot{s} + \frac{1}{2}\dot{u}\dot{s} - \frac{9}{4}us = \frac{3}{8}(s^2 + 5u^2) - \frac{C}{2}, \\ s\ddot{u} + 2is\dot{u} + \frac{1}{2}\dot{s}\dot{u} - \frac{9}{4}su = \frac{3}{8}(u^2 + 5s^2) - \frac{C}{2}. \end{cases}$$

Um aus diesen nun sehr symmetrisch aufgebauten Beziehungen die imaginäre Einheit zu eliminieren, ersetzt HILL die unabhängige Variable t durch

$$\zeta = e^{i\nu t}; \quad \dot{\zeta} = i\nu\zeta.$$

Es wird dann z.B., wenn man den Differentialoperator

$$D = \zeta\frac{d}{d\zeta}$$

verwendet,

$$\dot{u} = \frac{du}{d\zeta}\dot{\zeta} = i\nu\zeta\frac{du}{d\zeta} = i\nu Du; \quad \ddot{u} = i\nu D(i\nu Du) = -\nu^2 D^2 u,$$

und man erhält statt (XXI; 8) die Gleichungen

$$-\nu^2 uD^2 s + 2\nu uDs - \frac{1}{2}\nu^2 DuDs - \frac{9}{4}us = \frac{3}{8}(s^2 + 5u^2) - \frac{C}{2},$$

$$-\nu^2 sD^2 u - 2\nu sDu - \frac{1}{2}\nu^2 DsDu - \frac{9}{4}su = \frac{3}{8}(u^2 + 5s^2) - \frac{C}{2}$$

oder, wenn man mit $-\nu^{-2} = -m^2$ multipliziert und rechts eine neue Konstante K durch

$$\text{(XXI; 9)} \qquad m^2 C = 2a_0^2 K$$

einführt,

$$\text{(XXI; 10)} \quad \begin{cases} uD^2 s - 2muDs + \frac{1}{2}DuDs + \frac{9}{4}m^2 us = \\ \qquad = -\frac{3}{8}m^2(s^2 + 5u^2) + a_0^2 K, \\ sD^2 u + 2msDu + \frac{1}{2}DsDu + \frac{9}{4}m^2 su = \\ \qquad = -\frac{3}{8}m^2(u^2 + 5s^2) + a_0^2 K. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen sind u, s als Funktionen der unabhängigen Variablen ζ und des Parameters m zu bestimmen.

Um den Zusammenhang zwischen den Entwicklungen (XXI; 4) von ξ, η und denen von u, s klarzustellen, setze man in (XXI; 4)

$$\cos(2n+1)\,\nu t = \frac{1}{2}\left[e^{(2n+1)i\nu t} + e^{-(2n+1)i\nu t}\right] = \frac{1}{2}\left(\zeta^{2n+1} + \zeta^{-2n-1}\right),$$

$$\sin(2n+1)\,\nu t = \frac{1}{2i}\left[e^{(2n+1)i\nu t} - e^{-(2n+1)i\nu t}\right] = -\frac{i}{2}\left(\zeta^{2n+1} - \zeta^{-2n-1}\right).$$

Es ist dann

$$u = \xi + i\eta = \frac{1}{2}\sum_0^\infty (A_{2n+1} + B_{2n+1})\,\zeta^{2n+1} + \frac{1}{2}\sum_0^\infty (A_{2n+1} - B_{2n+1})\,\zeta^{-2n-1},$$

$$s = \xi - i\eta = \frac{1}{2}\sum_0^\infty (A_{2n+1} - B_{2n+1})\,\zeta^{2n+1} + \frac{1}{2}\sum_0^\infty (A_{2n+1} + B_{2n+1})\,\zeta^{-2n-1}.$$

Setzt man nun

$$a_n = \frac{1}{2}(A_{2n+1} + B_{2n+1}); \quad a_{-n-1} = \frac{1}{2}(A_{2n+1} - B_{2n+1}),$$

so daß man statt der beiden für alle ganzen positiven n und $n = 0$ definierten Folgen A_{2n+1}, B_{2n+1} eine einzige a_n erhält, die für alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ definiert ist, so kann man schreiben

$$u = \zeta\sum_0^\infty (a_n\zeta^{2n} + a_{-n-1}\zeta^{-2n-2}) = \zeta\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n\zeta^{2n},$$

$$s = \zeta^{-1}\sum_0^\infty (a_{-n-1}\zeta^{2n+2} + a_n\zeta^{-2n}) = \zeta^{-1}\sum_{-\infty}^{+\infty} a_{-n}\zeta^{2n},$$

und es ist schließlich

$$\text{(XXI; 11)} \quad \begin{cases} U = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} a_n\zeta^{2n}; \quad S = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} a_{-n}\zeta^{2n}, \\ u = \zeta U, \ s = \zeta^{-1}S; \ A_{2n+1} = a_n + a_{-n-1}, \ B_{2n+1} = a_n - a_{-n-1}. \end{cases}$$

Nun streben für $m \to 0$, wie oben bemerkt, A_1, B_1, also auch $a_0 = {}^1/_2(A_1 + B_1)$, gegen den Radius a einer sehr engen Kreisbahn, d. h., es wird im Grenzübergang

$$a_0 \to m^{2/3},$$

während alle übrigen a_n von höherer Ordnung gegen Null streben. Da nun die Gleichungen (XXI; 10), wenn wir von der Konstanten auf den rechten Seiten absehen, homogen vom zweiten Grade in u, s und ihren Ableitungen sind, wird man aus u, s, ebenso aus U, S und allen Koeffizienten a_n eine wesentlich positive Größe a_0^2 herausziehen dürfen. Ist diese mit der gleichnamigen, in (XXI; 9) eingeführten Größe identisch, so fällt a_0^2 aus sämtlichen Termen heraus. *Es bedeuten dann die Koeffizienten a_n nunmehr nicht ihre absoluten Werte,*

sondern ihre relativen in einer Skala, deren Einheit a_0 ist, und man darf dann in (XXI; 10) und (XXI; 11) auch den relativen Wert $a_0 = 1$ benutzen, vorbehaltlich einer Bestimmung des absoluten Betrages dieses „Skalenfaktors" in Abhängigkeit von m und der Multiplikation aller a_n mit diesem Faktor.

Die geistreiche, aber recht umständliche Analyse der Gleichungen (XXI; 10) durch HILL hat H. POINCARÉ[1]) durch einen nicht minder genialen Kunstgriff vereinfacht, indem er auf den linken Seiten von (XXI; 10) statt m eine zunächst noch unbestimmte Konstante p einführt, die nach Ausführung der Integration wieder durch m ersetzt werden muß. Die Gleichungen (XXI; 10) erhalten dann, nachdem man den Skalenfaktor herausdividiert hat, die Gestalt

$$\text{(XXI; 12)} \quad \begin{cases} u\left(D^2 s - 2pDs + \frac{9}{4}p^2 s\right) + \frac{1}{2} DuDs = -\frac{3}{8} m^2 (s^2 + 5u^2) + K, \\ s\left(D^2 u + 2pDu + \frac{9}{4}p^2 u\right) + \frac{1}{2} DsDu = -\frac{3}{8} m^2 (u^2 + 5s^2) + K. \end{cases}$$

Es kommt dann der Parameter m nur auf den rechten Seiten und nur als Quadrat vor, so daß der Schluß erlaubt ist, daß die Koeffizienten a_n durch Reihen darstellbar sind, die nach Potenzen von m^2 fortschreiten. Man darf dann auch

$$U = u_0 + u_1 m^2 + u_2 m^4 + \cdots; \quad S = s_0 + s_1 m^2 + s_2 m^4 + \cdots$$

schreiben, wo die Größen u_n, s_n Funktionen von p und ζ sein werden, und zwar ist speziell $u_0 = s_0 = 1$, da a_0 die einzige Größe der Folge a_n ist, die einen von m unabhängigen Term, nämlich 1, enthält. Die Konstanten K bzw. C sind ebenfalls durch derartige Reihen

$$K = k_0 + k_1 m^2 + k_2 m^4 + \cdots; \quad C = c_0 + c_1 m^2 + c_2 m^4 + \cdots$$

darstellbar. Wegen $D\zeta^n = \zeta(d\zeta^n/d\zeta) = n\zeta^n$ ist

$$Du = D(\zeta U) = \zeta(DU + U); \qquad D^2 u = \zeta(D^2 U + 2DU + U),$$
$$Ds = D(\zeta^{-1} S) = \zeta^{-1}(DS - S); \quad D^2 s = \zeta^{-1}(D^2 S - 2DS + S).$$

Setzt man dies in die zweite und die erste Gleichung (XXI; 12) ein, so ergibt sich nach einfacher Reduktion

$$\text{(XXI; 13)} \quad \begin{cases} SD^2U + fSDU + \frac{1}{2}(DU + U)DS + gUS = \\ \qquad = -\frac{3}{8} m^2 (U^2 \zeta^2 + 5S^2 \zeta^{-2}) + K, \\ UD^2S - fUDS + \frac{1}{2}(DS - S)DU + gSU = \\ \qquad = -\frac{3}{8} m^2 (S^2 \zeta^{-2} + 5U^2 \zeta^2) + K, \end{cases}$$

---

[1]) H. POINCARÉ, Leçons de mécanique céleste, Tome II, 2e Partie, S. 30ff. (1909).

wenn

(XXI; 13a) $$f = \frac{3}{2} + 2p; \quad g = \frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4}p^2$$

gesetzt wird. Nun sind aber, wegen $Du_0 = Ds_0 = 0$,

$$DU = m^2 Du_1 + m^4 Du_2 + \cdots; \quad D^2 U = m^2 D^2 u_1 + m^4 D^2 u_2 + \cdots \text{ usw.}$$

von der Ordnung m^2. Vergleicht man also in (XXI; 13) die von m^2 freien Terme auf beiden Seiten, so ergibt sich aus beiden Gleichungen übereinstimmend

$$k_0 = g = \frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4}p^2.$$

Um die weiteren Schlußfolgerungen dem Prinzip nach verständlich zu machen, braucht man nur noch den nächsten Schritt explizite auszuführen, d.h. neben den bereits bekannten Ergebnissen nullter Ordnung,

$$u_0 = 1; \quad s_0 = 1; \quad k_0 = g,$$

auch die Terme der Ordnung m^2 zu berücksichtigen. Entwickelt man also auf beiden Seiten von (XXI; 13) bis zu dieser Ordnung, so ergibt ein Vergleich der Glieder mit m^2

(XXI; 14) $$\begin{cases} D^2 u_1 + f D u_1 + \frac{1}{2} D s_1 + g(u_1 + s_1) = -\frac{3}{8}(\zeta^2 + 5\zeta^{-2}) + k_1, \\ D^2 s_1 - f D s_1 - \frac{1}{2} D u_1 + g(s_1 + u_1) = -\frac{3}{8}(5\zeta^2 + \zeta^{-2}) + k_1. \end{cases}$$

Diese linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für $u_1(\zeta)$ und $s_1(\zeta)$ sind nicht voneinander unabhängig, da u_1, s_1, ebenso wie u, s bzw. U, S bzw. ζ, ζ^{-1} konjugiert komplex sind. In der Tat: Setzt man für u_1, s_1 die konjugiert komplexen Ausdrücke

$$u_1 = \alpha_2 \zeta^2 + \alpha_{-2}\zeta^{-2}; \quad s_1 = \alpha_{-2}\zeta^2 + \alpha_2 \zeta^{-2}$$

an, so folgt

$$Du_1 = 2(\alpha_2 \zeta^2 - \alpha_{-2}\zeta^{-2}); \quad D^2 u_1 = 4(\alpha_2\zeta^2 + \alpha_{-2}\zeta^{-2}) = 4u_1,$$
$$Ds_1 = 2(\alpha_{-2}\zeta^2 - \alpha_2\zeta^{-2}); \quad D^2 s_1 = 4(\alpha_{-2}\zeta^2 + \alpha_2\zeta^{-2}) = 4s_1.$$

Die zweite Gleichung (XXI; 14) geht also aus der ersten hervor, wenn ζ mit ζ^{-1} vertauscht wird. Man kann daher aus beiden Gleichungen übereinstimmend die Konstanten $k_1, \alpha_2, \alpha_{-2}$ durch Vergleichung der Terme mit $\zeta^0, \zeta^2, \zeta^{-2}$ bestimmen, und zwar erhält man die linearen Beziehungen

$$\alpha_2(4 + 2f + g) + \alpha_{-2}(1 + g) = -\frac{3}{8},$$

$$-\alpha_2(1 - g) + \alpha_{-2}(4 - 2f + g) = -\frac{15}{8}$$

mit den Lösungen

$$\alpha_2 = \frac{3}{8}\,\frac{1+2f+4g}{15-4f^2+8g}; \quad \alpha_{-2} = -\frac{3}{8}\,\frac{21+2f+4g}{15-4f^2+8g}$$

oder, wenn man für f, g die Ausdrücke (XXI; 13a) einsetzt und nun, wie vorgesehen, wieder m statt p schreibt,

$$\alpha_2 = \frac{9}{16}\,\frac{2+4m+3m^2}{6-4m+m^2}; \quad \alpha_{-2} = -\frac{3}{16}\,\frac{38+28m+9m^2}{6-4m+m^2}$$

bzw. die Potenzreihen[1])

$$\text{(XXI; 15)} \quad \begin{cases} \alpha_2 = \frac{3}{16} + \frac{1}{2}m + \frac{7}{12}m^2 + \frac{11}{36}m^3 + \cdots, \\ \alpha_{-2} = -\left(\frac{19}{16} + \frac{5}{3}m + \frac{43}{36}m^2 + \frac{14}{27}m^3 + \cdots\right). \end{cases}$$

Fährt man in dieser Weise fort, so bemerkt man, daß die Glieder mit m^{2n} auf lineare Differentialgleichungen von derselben Form wie (XXI; 14), nämlich auf

$$\text{(XXI; 16)} \qquad D^2u_n + fDu_n + \frac{1}{2}Ds_n + g(u_n + s_n) = \Phi_n + k_n$$

und die entsprechende konjugiert komplexe führen, wo die Φ_n Funktionen der inzwischen bekannt gewordenen Größen $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$; $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ und von ζ^2, ζ^{-2} bezeichnen, die homogen vom n-ten Grade in ζ^2, ζ^{-2} sind, wenn man die u_i, s_i als Funktionen dieser Größen schreibt. Insbesondere wird

$$\Phi_2 = s_1(D^2u_1 + fDu_1) + u_1\left(\frac{1}{2}Ds_1 + gs_1\right) - \frac{3}{4}(u_1\zeta^2 + 5s_1\zeta^{-2})$$

homogen vom 2. Grade in ζ^2, ζ^{-2} sein, da $u_1, s_1, Du_1, Ds_1, D^2u_1$ vom 1. Grade sind. Allgemein werden also die rechten Seiten von (XXI; 16) und daher auch u_n, s_n lineare Funktionen von

$$\zeta^{2n};\ \zeta^{2n-4};\ \ldots;\ \zeta^{-2n+4};\ \zeta^{-2n}$$

sein. Es werden also die konjugiert komplexen Ansätze

$$u_1 = \alpha_2^{(1)}\zeta^2 + \alpha_{-2}^{(1)}\zeta^{-2}; \qquad s_1 = \alpha_{-2}^{(1)}\zeta^2 + \alpha_2^{(1)}\zeta^{-2},$$

$$u_2 = \alpha_4^{(2)}\zeta^4 + \alpha_0^{(2)} + \alpha_{-4}^{(2)}\zeta^{-4}; \qquad s_2 = \alpha_{-4}^{(2)}\zeta^4 + \alpha_0^{(2)} + \alpha_4^{(2)}\zeta^{-4},$$

$$u_3 = \alpha_6^{(3)}\zeta^6 + \alpha_2^{(3)}\zeta^2 + \alpha_{-2}^{(3)}\zeta^{-2} + \alpha_{-6}^{(3)}\zeta^{-6}; \quad s_3 = \alpha_{-6}^{(3)}\zeta^6 + \alpha_{-2}^{(3)}\zeta^2 + \alpha_2^{(3)}\zeta^{-2} + \alpha_6^{(3)}\zeta^{-6}$$

---

[1]) Diese Reihen konvergieren für $m < \sqrt{6}$, da der Nenner der Brüche die Nullstellen $2 + i\sqrt{2}$ hat, die als singuläre Punkte in der komplexen m-Ebene den Konvergenzradius $\varrho = \sqrt{2^2 + \sqrt{2}^2}$ bestimmen.

usw. zum Ziele führen. Beiträge zu der Konstanten K (Terme mit $\zeta^0 = 1$) werden daher nur in den Termen mit m^4, m^8, ... auftreten, Beiträge zu Gliedern mit ζ^2, ζ^{-2}, die erstmalig in u_1, s_1 erscheinen, erst wieder in u_3, s_3; u_5, s_5 usw., Beiträge zu Gliedern mit ζ^4, ζ^{-4} in u_2, s_2; u_4, s_4 usw.

Die Größenpaare $\alpha_4^{(2)}, \alpha_{-4}^{(2)}$; $\alpha_2^{(3)}, \alpha_{-2}^{(3)}$; $\alpha_6^{(3)}, \alpha_{-6}^{(3)}$; ... lassen sich, ebenso wie oben an $\alpha_2^{(1)} = \alpha_2$, $\alpha_{-2}^{(1)} = \alpha_{-2}$ gezeigt worden ist, aus linearen Gleichungen als Funktionen von p und damit von m in der Form

$$\frac{a' + b'm + c'm^2}{a + bm + cm^2} = \frac{a'}{a}(1 + \beta_1 m + \beta_2 m^2 + \cdots)$$

bestimmen. Setzt man nun wieder

$$U = \sum a_n \zeta^{2n} = 1 + u_1 m^2 + u_2 m^4 + \cdots$$

und führt statt der u_n die obigen Polynome ein, so erhält man

$$\begin{aligned}\sum a_n \zeta^{2n} = 1 &+ m^2(\alpha_2^{(1)}\zeta^2 + \alpha_{-2}^{(1)}\zeta^{-2}) + m^4(\alpha_4^{(2)}\zeta^4 + \alpha_0^{(2)} + \alpha_{-4}^{(2)}\zeta^{-4}) + \\ &+ m^6(\alpha_6^{(3)}\zeta^6 + \alpha_2^{(3)}\zeta^2 + \alpha_{-2}^{(3)}\zeta^{-2} + \alpha_{-6}\zeta^{-6}) + \\ &+ m^8(\alpha_8^{(4)}\zeta^8 + \alpha_4^{(4)}\zeta^4 + \alpha_0^{(4)} + \alpha_{-4}^{(4)}\zeta^{-4} + \alpha_{-8}^{(4)}\zeta^{-8}) + \cdots.\end{aligned}$$

Hieraus und gleichlautend aus der konjugiert komplexen Gleichung

$$S = \sum a_{-n}\zeta^{2n} = 1 + s_1 m^2 + s_2 m^4 + \cdots$$

ergibt sich durch Gleichsetzung der Koeffizienten von ζ^{2n}

$$\text{(XXI; 17)} \quad \left\{\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= \alpha_2^{(1)} m^2 + \alpha_2^{(3)} m^6 + \alpha_2^{(5)} m^{10} + \cdots, \\ a_2 &= \alpha_4^{(2)} m^4 + \alpha_4^{(4)} m^8 + \cdots, \\ a_3 &= \alpha_6^{(3)} m^6 + \alpha_6^{(5)} m^{10} + \cdots, \\ &\dots\dots\dots\dots, \\ a_{-1} &= \alpha_{-2}^{(1)} m^2 + \alpha_{-2}^{(3)} m^6 + \alpha_{-2}^{(5)} m^{10} + \cdots, \\ a_{-2} &= \alpha_{-4}^{(2)} m^4 + \alpha_{-4}^{(4)} m^8 + \cdots, \\ a_{-3} &= \alpha_{-6}^{(3)} m^6 + \alpha_{-6}^{(5)} m^{10} + \cdots, \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right.$$

und

$$\text{(XXI; 18)} \qquad K = \alpha_0^{(0)} + \alpha_0^{(2)} m^4 + \alpha_0^{(4)} m^8 + \cdots.$$

Man bemerkt, daß alle Ausdrücke (XXI; 17) und (XXI; 18) bereits durch das erste Glied bis zu den ersten vier vorkommenden Potenzen von m genau ausgedrückt werden und daß jedes weitere Glied die Genauigkeit um vier weitere Ordnungen erhöht. Die Konvergenz dieses Näherungsverfahrens ist also außerordentlich gut. Ist der Parameter m so klein, daß man sich mit Gliedern bis zur Ordnung m^5 zufriedengeben kann, so sind die Entwicklungen (XXI; 15) zur Bildung von a_1 und a_{-1} ausreichend: Für den Erdmond

($m = 0.08085$) werden die vernachlässigten Terme sechster Ordnung $<10^{-7}$ sein. Im einzelnen erhält man dann:

$$\text{(XXI; 19)} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{3}{16} m^2 + \frac{1}{2} m^3 + \frac{7}{12} m^4 + \frac{11}{36} m^5 + \cdots, \\ a_{-1} = -\left(\frac{19}{16} m^2 + \frac{5}{3} m^3 + \frac{43}{36} m^4 + \frac{14}{27} m^5 + \cdots\right), \\ a_2 = \frac{25}{256} m^4 + \frac{803}{1920} m^5 + \cdots, \\ a_{-2} = 0 \cdot m^4 + \frac{23}{640} m^5 + \cdots \end{cases}$$

und

$$K = \frac{1}{2}\left[1 + 4m + \frac{9}{2} m^2 + 0 \cdot m^3 - \frac{1147}{128} m^4 - \frac{1399}{96} m^5 - \frac{2047}{256} m^6 - \cdots\right]$$

bzw.

(XXI; 20)

$$C = \frac{2K}{m^2} = m^{-2}\left[1 + 4m + \frac{9}{2} m^2 - \frac{1147}{128} m^4 - \frac{1399}{96} m^5 - \frac{2047}{256} m^6 - \cdots\right].$$

181. *Der Skalenfaktor*

Der Skalenfaktor, den wir nun, da das Symbol a_0 schon für den Relativwert ($a_0 = 1$) dieser Konstante verbraucht worden ist, mit σ bezeichnen wollen, läßt sich aus irgendeiner der Gleichungen (XXI; 1) ableiten, deren Elemente ihn bereits enthalten. Sind also nun ξ', η', r' relative Größen, so ist in (XXI; 1) $\xi = \sigma\,\xi', \eta = \sigma\,\eta', r = \sigma\, r'$ usw. zu setzen. Diese Beziehungen nehmen also die Form

$$\text{(XXI; 21)} \quad \begin{cases} \sigma^3(\ddot{\xi}' - 2\dot{\eta}' - 3\xi') = -\frac{\xi'}{r'^3}, \\ \sigma^3(\ddot{\eta}' + 2\dot{\xi}') = -\frac{\eta'}{r'^3} \end{cases}$$

an, wobei σ eine nur von m abhängige Konstante bedeutet, die (da σ als Absolutwert von a_0 für enge Bahnen gegen $m^{2/3}$ strebt) in der Gestalt

$$\text{(XXI; 21a)} \qquad \sigma = m^{2/3}(1 + \sigma_1 m + \sigma_2 m^2 + \cdots)$$

geschrieben werden kann. Die Gleichungen (XXI; 21) gelten also mit unveränderlichem $\sigma(m)$ für beliebige Zeiten. Bezeichnet demnach $\xi', \eta', r' = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}$ den Ort des Mondes zu irgendeiner Zeit t, so gilt immer

$$\text{(XXI; 21b)} \quad \sigma^3 = \frac{\xi'}{r'^3(3\xi' + 2\dot{\eta}' - \ddot{\xi}')} = -\frac{\eta'}{r'^3(2\dot{\xi}' + \ddot{\eta}')}.$$

Ist z.B. $t_1 = 0$ der Zeitpunkt, in dem der Mond die positive ξ-Achse überschreitet, dann gilt für die Koordinaten und ihre Ableitungen in diesem Augenblick

$$\eta_1' = \dot{\xi}_1' = \dot{\eta}_1' = 0; \quad r_1' = \xi_1$$

und wegen $\nu = m^{-1}$, $\cos(2n+1)\nu t_1 = 1$

$$(\text{XXI}; 22) \quad \begin{cases} \xi_1' = A_1 + A_3 + A_5 + \cdots = \\ \quad = 1 + (a_1 + a_{-1}) + (a_2 + a_{-2}) + \cdots, \\ m\,\dot{\eta}_1' = B_1 + 3B_3 + 5A_5 + \cdots = \\ \quad = 1 + (3a_1 - a_{-1}) + (5a_2 - 3a_{-2}) + \cdots, \\ -m^2\,\ddot{\xi}_1' = A_1 + 9A_3 + 25A_5 + \cdots = \\ \quad = 1 + (9a_1 + a_{-1}) + (25a_2 + 9a_{-2}) + \cdots, \end{cases}$$

und es ist wegen (XXI; 21b) und (XXI; 21a)

$$\frac{m^2}{\sigma^3} = \xi'^2_1[-m^2\,\ddot{\xi}_1' + 2m(m\,\dot{\eta}_1') + 3m^2\,\xi_1'] = (1 + \sigma_1 m + \sigma_2 m^2 + \cdots)^{-3}.$$

Setzt man hierin (XXI; 22) und für die a_n die Potenzreihen (XXI; 19) ein, so ergeben sich die σ_n durch Koeffizientenvergleich, und man erhält nach etwas umständlicher, aber elementarer Rechnung

(XXI; 23)
$$\sigma = m^{2/3}\left(1 - \frac{2}{3}m + \frac{7}{18}m^2 - \frac{4}{81}m^3 + \frac{19565}{62208}m^4 - \frac{47161}{93312}m^5 + \cdots\right).$$

Multipliziert man dann die Relativwerte (XXI; 19) der a_n mit σ, so ergeben sich die Absolutwerte:

$$(\text{XXI}; 24) \quad \begin{cases} \sigma a_0 = \sigma \quad \text{nach (XXI; 23)}, \\ \sigma a_1 = m^{2/3}\left(\frac{3}{16}m^2 + \frac{3}{8}m^3 + \frac{31}{96}m^4 + \frac{11}{108}m^5 + \cdots\right), \\ \sigma a_{-1} = -m^{2/3}\left(\frac{19}{16}m^2 + \frac{7}{8}m^3 + \frac{157}{288}m^4 + \frac{101}{324}m^5 + \cdots\right), \\ \sigma a_2 = m^{2/3}\left(\frac{25}{256}m^4 + \frac{113}{320}m^5 + \cdots\right), \\ \sigma a_{-2} = m^{2/3}\left(\frac{23}{640}m^5 + \cdots\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Mit ihrer Hilfe lassen sich die Anfangsbedingungen $\xi_1, \dot{\eta}_1$ bestimmen, die für den Zeitpunkt $t_1 = 0$ neben $\dot{\xi}_1 = \eta_1 = 0$ bei gegebenem Parameter m (d.h. vorgegebener synodischer Umlaufszeit $T = 2\pi m$) die periodische „Variations-

bahn" bestimmen, und zwar erhält man nach (XXI; 22)

$$\text{(XXI; 25)}\quad \begin{cases} \xi_1 = r_1 = m^{2/3}\left(1 - \dfrac{2}{3}m - \dfrac{11}{18}m^2 - \dfrac{89}{162}m^3 + \dfrac{1477}{7776}m^4 - \right. \\ \qquad\qquad \left. - \dfrac{38051}{116640}m^5 + \cdots\right), \\ \dot{\eta}_1 = m^{-1/3}\left(1 - \dfrac{2}{3}m + \dfrac{77}{36}m^2 + \dfrac{158}{81}m^3 + \dfrac{36029}{15552}m^4 + \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{12901}{7209}m^5 + \cdots\right). \end{cases}$$

Setzt man $t = t_2 = \pi m/2 = T/4$, so stellt dieser Zeitpunkt den Durchgang durch die positive η-Achse (Mond in Quadraturstellung zur Sonne) dar. Dann ist $\xi_2 = \dot{\eta}_2 = 0$ und

$$\eta_2 = \sigma(B_1 - B_3 + B_5 - \cdots) = \sigma[1 - (a_1 + a_{-1}) + (a_2 + a_{-2}) - \cdots],$$
$$-m\,\dot{\xi}_2 = \sigma(A_1 - 3A_3 + 5A_5 - \cdots) = \sigma[1 - (3a_1 - a_{-1}) + + (5a_2 - 3a_{-2}) - \cdots]$$

oder, nach Reduktion,

$$\text{(XXI; 26)}\quad \begin{cases} \eta_2 = r_2 = m^{2/3}\left(1 - \dfrac{2}{3}m + \dfrac{25}{18}m^2 + \dfrac{73}{162}m^3 + \dfrac{4933}{7776}m^4 + \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{10909}{116640}m^5 + \cdots\right), \\ \dot{\xi}_2 = -m^{-1/3}\left(1 - \dfrac{2}{3}m - \dfrac{49}{36}m^2 - \dfrac{166}{81}m^3 - \right. \\ \qquad\qquad \left. - \dfrac{11059}{15552}m^4 - \dfrac{3901}{7290}m^5 - \cdots\right). \end{cases}$$

Zu dem gleichen Ergebnis wäre man gelangt, wenn man σ aus dem zweiten Ausdruck (XXI; 21b) als Funktion von

$$r_2' = \eta_2';\ \dot{\xi}_2';\ \dot{\eta}_2'$$

bestimmt hätte. Beide Verfahren ergeben die gleiche Potenzreihe $\sigma(m)$, eine Tatsache, die sehr deutlich die engen Bindungen erkennen läßt, die zwischen den Koeffizienten der Entwicklungen $a_n(m)$ bestehen.

In erster Näherung kann die Variationsbahn (für kleine m) als Ellipse mit den Halbachsen r_1 und r_2 angesehen werden, und es ist

$$\text{(XXI; 27)}\quad \begin{cases} r_0 = \dfrac{1}{2}(r_1 + r_2) = m^{2/3}\left(1 - \dfrac{2}{3}m + \dfrac{7}{18}m^2 - \dfrac{4}{81}m^3 + \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{3205}{7776}m^4 - \dfrac{13571}{116640}m^5 + \cdots\right), \\ \varepsilon = \dfrac{1}{2}(r_2 - r_1) = m^{8/3}\left(1 + \dfrac{1}{2}m + \dfrac{2}{9}m^2 + \dfrac{17}{81}m^3 + \cdots\right). \end{cases}$$

Der Unterschied der beiden Extrema des Abstandes r ist also, verglichen mit der Größenordnung der Abstände selbst, von der Ordnung $m^2 = \nu^{-2}$, d.h. von der Ordnung der Störungen durch die Sonne; denn es ist ja

$$\nu^{-2} = (\nu' - 1)^{-2} = \nu'^{-2}(1 - 2\nu'^{-1} + \cdots) = w(1 - 2\sqrt{w} + \cdots)$$

von der Größe $w = \nu'^{-2} \approx 1/180$, der alle Störungen proportional sind, nicht wesentlich verschieden.

Vergleicht man (XXI; 23) mit (XXI; 27), so bemerkt man, daß der Skalenfaktor σ mit dem arithmetischen Mittel der beiden extremen Abstände bis auf Abweichungen im Koeffizienten von m^4 übereinstimmt. Man wird also auch σ mit einiger Berechtigung als einen „Mittelwert" von r ansehen dürfen. Ist andererseits σ' derjenige Abstand, für den, bei gegebener siderischer Umlaufszeit $T' = 2\pi/\nu' = 2\pi m'$, das dritte KEPLERsche Gesetz

$$\sigma'^3 m'^{-2} = 1$$

gilt, so findet man

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma'}\right)^3 = \left(\frac{m}{m'}\right)^2 (1 + \sigma_1 m + \sigma_2 m^2 + \cdots)^3.$$

Da aber $m' = \dfrac{1}{\nu'} = \dfrac{1}{1+\nu} = \dfrac{m}{1+m}$ ist, folgt

(XXI; 28a)
$$\frac{\sigma}{\sigma'} = (1+m)^{2/3}\left(1 - \frac{2}{3}m + \frac{7}{18}m^2 - \frac{4}{81}m^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{19565}{62208}m^4 + \cdots\right) = 1 - \frac{1}{6}m^2 + \frac{1}{3}m^3 + \frac{12269}{62206}m^4 + \cdots$$

oder, mit $m = m'/(1 - m') = m' + m'^2 + m'^3 + \cdots$ und $m'^2 = w$,

(XXI; 28b)
$$\frac{\sigma}{\sigma'} = 1 - \frac{1}{6}w + \frac{43373}{62206}w^2 - \cdots.$$

Man trifft hier erneut auf die schon im Abschnitt 174 (XX; 14a) zuerst bemerkte Tatsache, daß infolge der Störungen durch die Sonne der mittlere Abstand des Mondes um einen Bruchteil $w/6 \approx 10^{-3}$ verkürzt wird. (XXI; 28b) zeigt, daß das nächste Störungsglied von der Ordnung w^2 ist, wenn man den mittleren Abstand durch σ definiert.

Die JACOBIsche Konstante C ist nach (XXI; 9) a_0^2 proportional. Um ihren Absolutwert zu erhalten, muß man also (XXI; 20) mit σ^2 multiplizieren und erhält

(XXI; 29)
$$C = m^{-2/3}\left(1 + \frac{8}{3}m + \frac{7}{18}m^2 - \frac{140}{81}m^3 - \frac{39533}{7776}m^4 - \frac{2549}{729}m^5 + \cdots\right).$$

In der Tat geht schon aus (XXI; 2) hervor, daß C für enge Bahnen mit derselben Ordnung wie $1/r$ und $\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2$ über alle Grenzen wächst, wenn m gegen Null abnimmt. Da diese Größen den Faktor $m^{-2/3}$ haben, gilt dasselbe auch für C.

182. *Geometrische Eigenschaften der Variationsbahn*

Während der Prozeß der Entwicklung der Potenzreihen $\xi(m), \eta(m)$ usw. nach der HILL-POINCARÉschen Methode außerordentlich rasch fördert, da bei jedem Schritt die Ordnung der Ausdrücke um weitere vier m-Potenzen verbessert wird, ist die Konvergenz der Reihen selbst nur für hinreichend kleines m befriedigend. Ist m sehr klein, etwa < 0.1, so stellt die Ellipse

$$\xi = r_1 \cos \nu t; \quad \eta = r_2 \sin \nu t \tag{XXI; 30}$$

die geometrische Form der Variationsbahn recht gut dar, zumal sich das Achsenverhältnis r_2/r_1 von der Einheit nur um Größen von der Ordnung m^2 unterscheidet.

Für größere m weicht die Gestalt der Variationsbahn immer mehr von der elliptischen ab. Abb. 72 zeigt die Entwicklung dieser Schar einfach-periodischer Lösungen in ihrem ersten Stadium. Das Achsenverhältnis der ovalartigen Kurven nimmt ständig zu. Während aber r_2 mit m monoton wächst, strebt r_1 einem Maximum zu, das für

$$\frac{dr_1}{dm} = \frac{d}{dm}\left\{m^{2/3}\left(1 - \frac{2}{3}m - \frac{11}{18}m^2 - \frac{89}{162}m^3 - \cdots\right)\right\} = 0,$$

d.h. für

$$\frac{2}{3} - \frac{10}{9}m - \frac{44}{27}m^2 - \frac{979}{486}m^3 - \cdots = 0 \tag{XXI; 31}$$

erreicht wird. Die Lösung dieser transzendenten Gleichung liegt in der Nähe von $m = 0.35$. Da dieser Wert verhältnismäßig groß ist, erfordert die exakte

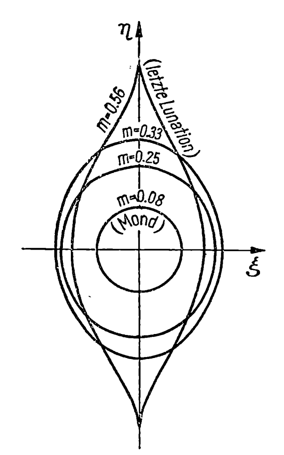


Abb. 72. Schar der einfach-periodischen Variationsbahnen

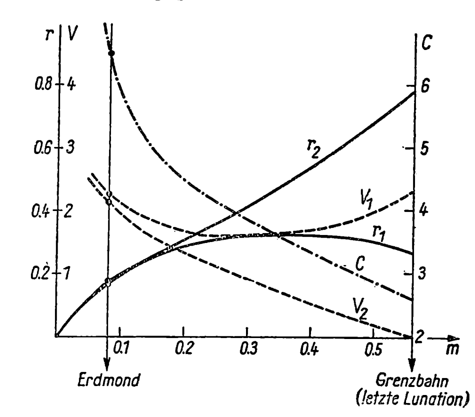


Abb. 73. Extrema des Abstandes (——, r_1, r_2), Extrema der Geschwindigkeit (– – –, V_2, V_1) und JACOBIsche Konstante (–·–·–, C) als Funktionen von m

Lösung von (XXI; 31), die hier nicht weiter interessiert, die Berücksichtigung von Termen sehr hoher Ordnung. In Abb. 73 ist $r_1(m)$ graphisch dargestellt, und man bemerkt, daß der Minimalabstand des Satelliten nach Erreichung

des Höchstwertes wieder um merkliche Beträge abnimmt. Der Maximalabstand r_2, der stets in den Quadraturen erreicht wird, nimmt dagegen stetig zu, bis für $m = 0.56097$ die Kurve bei $\xi = 0$, $\eta = 0.78190$ Spitzen ausbildet. Dort verschwinden nämlich $\dot{\xi}$ und $\dot{\eta}$ gleichzeitig, so daß für diesen Wert von m die Variationsbahn die Nullgeschwindigkeitskurve erreicht.

HILL war der Ansicht, daß mit dieser singulären Bahn die Klasse der periodischen Lösungen abgeschlossen sei, und er glaubte, bei einer Fortsetzung der Schar über den kritischen Wert für m hinaus würde die Bahnkurve in zwei getrennte, zu beiden Seiten der η-Achse liegende Äste zerfallen, so daß Himmelskörper, die sich auf ihnen bewegen, keine Quadraturstellung zur Sonne einnehmen könnten. Er bezeichnete die singuläre Grenzbahn daher auch als die Bahn des „Mondes der letzten Lunation", d.h. des äußersten Satelliten, der noch eines vollen synodischen Umlaufs und daher eines vollständigen Phasenwechsels fähig sei. H. POINCARÉ zeigte dagegen, daß dies nicht zutrifft. Er bewies, daß bei analytischer Fortsetzung über die Grenzbahn hinaus immer noch periodische Bahnen entstehen, die aber an den extremen Enden Schleifen bilden (Abb. 74), und daß also während jedes synodischen Umlaufs beide Quadraturen sogar dreimal durchlaufen werden, und zwar zweimal in rechtläufiger, dazwischen einmal in rückläufiger Bewegung. Wir dürfen hier auf die Wiedergabe des Beweises verzichten, der mathematisch interessant ist, aber astronomisch kaum Bedeutung hat. Die Tatsache der Schleifenbildung selbst wird aber verständlich, wenn wir diese Entwicklung der periodisch-rechtläufigen Satellitenbahnen im HILLschen Problem mit derjenigen der periodisch-rechtläufigen Bahnen im „problème restreint" (Abschnitt 168) vergleichen, wie sie in Abb. 57a–c, S. 474, dargestellt worden ist. Dort verlaufen die Bahnkurven (da die störende Masse in endlicher Entfernung vom Zentrum der Satellitenbahnen liegt) zur Ordinatenachse unsymmetrisch, während die entsprechenden im HILLschen Problem zu beiden Achsen symmetrisch liegen. In beiden Fällen zeigt sich aber, daß die Entwicklung der Schar von engen, kreisähnlichen Bahnen aus zunächst zu einer singulären Grenzbahn mit Spitzen führt (die im „problème restreint" in Richtung auf die größere Masse umgebogen sind) und daß in der nächsten Entwicklungsphase an Stelle der Spitzen Schleifen entstehen. Die weitere Entwicklung erwies sich als kompliziert und konnte nicht bis zu einem endgültigen Abschluß verfolgt werden. Insbesondere traten in ihrem weiteren Verlauf auch Spitzen auf der Abszissenachse und Schleifen um Punkte dieser Achse auf, nämlich um die dort liegenden Librationszentren, eine Erscheinung, die auch in der Geometrie der erweiterten HILLschen Variationsbahnen ihr Analogon findet.

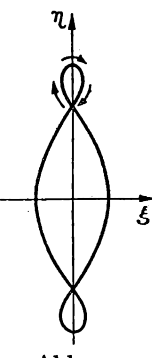


Abb. 74 Fortsetzung der Variationsbahnen über die Grenzbahn hinaus, schematisch

In Abb. 73 findet man die wichtigsten Größen aus der uns hier allein interessierenden ersten Entwicklungsphase der Variationsbahnen als Funktionen von m aufgezeichnet, nämlich außer r_1 und r_2 die Extrema der

Geschwindigkeit $V = \sqrt{\dot\xi^2 + \dot\eta^2}$ und die JACOBIsche Konstante C. Die für den Erdmond gültigen Werte sind besonders gekennzeichnet. Wie aus Abschnitt 180 folgt, ist am Ort der Spitzen $2/\eta_2 = \pm C$.

Während für genügend kleines m die Ellipse (XXI; 30) die geometrische Gestalt der Bahn genügend gut darstellt, ist dies für die *Bewegung* in der Bahn nicht mehr im selben Maße der Fall. Für die harmonische Bewegung (XXI; 30) gilt noch der Flächensatz

$$\xi\dot\eta - \eta\dot\xi = \nu r_1 r_2 = \text{const.}$$

Bezeichnet man aber mit $\varphi(t)$ die wahre Anomalie in der Variationsbahn, so ist $\xi = r\cos\varphi$, $\eta = r\sin\varphi$, und die Flächengeschwindigkeit

$$\xi\dot\eta - \eta\dot\xi = r^2\dot\varphi$$

darf nicht mehr als konstant angesehen werden. Für die Zeitpunkte t_1 (Syzygien) und t_2 (Quadraturen) erhält man ja mit Hilfe der Reihen (XXI; 25) und (XXI; 26) etwas verschiedene $r^2\dot\varphi$, nämlich

$$\text{(XXI; 32)}\quad \begin{cases} r_1^2\dot\varphi_1 = \xi_1\dot\eta_1 = r_1\dot\eta_1 = m^{1/3}\left(1 - \frac{4}{3}m + \frac{71}{36}m^2 - \cdots\right), \\ \dot\varphi_1 = \frac{\dot\eta_1}{r_1} = m^{-1}\left(1 + \frac{11}{4}m^2 + \frac{13}{3}m^3 + \cdots\right), \\ r_2^2\dot\varphi_2 = -\eta_2\dot\xi_2 = -r_2\dot\xi_2 = m^{1/3}\left(1 - \frac{4}{3}m + \frac{17}{36}m^2 - \cdots\right), \\ \dot\varphi_2 = -\frac{\dot\xi_2}{r_2} = m^{-1}\left(1 - \frac{11}{4}m^2 - \frac{13}{3}m^3 + \cdots\right). \end{cases}$$

Wenn wir Terme von der Ordnung m^4 unberücksichtigt lassen, folgt

$$\dot\varphi = m^{-1}(1 + 2b\cos 2\nu t + \cdots)$$

mit

$$b = \frac{11}{8}m^2 + \frac{13}{6}m^3 + \cdots.$$

Integration ergibt dann

$$\text{(XXI; 33)}\quad \varphi = m^{-1}\left(t + \frac{b}{\nu}\sin 2\nu t + \cdots\right) = \nu t + b\sin 2\nu t + \cdots$$

und damit die Konstante b der Variation in Länge. Der hier berechnete Ausdruck ist bis zum Term mit m^3 genau. Der nächste wäre es nicht mehr, da zu den Gliedern mit m^4 in (XXI; 32) auch die periodischen Glieder mit dem Argument $4\nu t$ in (XXI; 33) Beiträge liefern. Genauer ist die mit strengerem Ansatz berechnete Formel

$$\text{(XXI; 34)}\quad b = \frac{11}{8}m^2 + \frac{13}{6}m^3 + \frac{16}{9}m^4 + \cdots,$$

die für den Erdmond ($m = 0.08085$)

$$b = 0.010209 = 35'.1$$

liefert, einen Wert, den die vernachlässigten Glieder fünfter Ordnung nur noch um Bruchteile der Bogenminute zu ändern vermögen, wie (XX; 15) zeigt.

Wäre für kleine m der Flächensatz ohne merklichen Fehler gültig, so könnte man schreiben

$$\dot{\varphi} = \nu \frac{r_1 r_2}{r^2},$$

also beim Durchgang durch die Achsen

$$\dot{\varphi}_1 = \nu \frac{r_2}{r_1} = \nu \left(1 + \frac{r_2 - r_1}{r_1}\right) \quad \text{bzw.} \quad \dot{\varphi}_2 = \nu \frac{r_1}{r_2} = \nu \left(1 - \frac{r_2 - r_1}{r_2}\right).$$

Es wäre dann

$$b = \frac{r_2 - r_1}{2 r_1} \approx m^2 + \frac{7}{6} m^3 \approx \frac{r_2 - r_1}{2 r_2},$$

d.h., man erhielte für die Konstante der Variation in Länge einen Ausdruck, der zwar auch von der Ordnung m^2, aber mit (XXI; 34) nicht identisch ist.

183. *Die Differentialgleichung für den Radiusvektor*

Anstatt $\xi(t), \eta(t)$ aus den zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung (XXI; 1) könnte man auch den Radiusvektor $r(t)$ aus einer einzigen Differentialgleichung vierter Ordnung zu bestimmen suchen. Auch dadurch wäre das Problem vollständig gelöst; denn wäre r als Funktion der Zeit und von vier unabhängigen Integrationskonstanten bekannt, so würde man die zweite Polarkoordinate, die wahre Länge $\lambda(t)$, aus der Integralgleichung (XI; 96), gegebenenfalls durch ein Iterationsverfahren, ermitteln können.

Da nun das JACOBIsche Integral (XXI; 2) existiert, läßt sich die Ordnung der Differentialgleichung für $r(t)$ um eine Einheit vermindern. Differenziert man die Identität

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 \tag{XXI; 35}$$

dreimal nach der Zeit und eliminiert $\ddot{\xi}, \ddot{\eta}$, wo sie auftreten, durch (XXI; 1), $\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2$ durch (XXI; 2), so erhält man

$$\text{(XXI; 36)} \quad \begin{cases} r \dot{r} = \xi \dot{\xi} + \eta \dot{\eta}, \\ r \ddot{r} + \dot{r}^2 = 2(\xi \dot{\eta} - \eta \dot{\xi}) + 6\xi^2 + \dfrac{1}{r} - C, \\ r \dddot{r} + 3\dot{r} \ddot{r} = 6\xi(2\dot{\xi} - \eta) - \dfrac{\dot{r}}{r^2} - 4 r \dot{r}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (XXI; 35), (XXI; 36) und (XXI; 2) bilden ein System

$$\text{(XXI; 37)}\quad \begin{cases} \text{a)}\quad \varphi_0 = r^2 & = \xi^2 + \eta^2, \\ \text{b)}\quad \varphi_1 = r\,\dot{r} & = \xi\,\dot{\xi} + \eta\,\dot{\eta}, \\ \text{c)}\quad \varphi_2 = r\,\ddot{r} + \dot{r}^2 - \dfrac{1}{r} + C & = 2(\xi\,\dot{\eta} - \eta\,\dot{\xi}) + 6\xi^2, \\ \text{d)}\quad \varphi_3 = r\,\dddot{r} + 3\dot{r}\,\ddot{r} + \dfrac{\dot{r}}{r^2} + 4r\,\dot{r} & = 6\xi(2\dot{\xi} - \eta), \\ \text{e)}\quad \varphi_4 = \dfrac{2}{r} - C & = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 - 3\xi^2, \end{cases}$$

in dem fünf Funktionen $\varphi_0, \ldots, \varphi_4$ der Größen $r, \dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r}$ und C durch die vier Variablen $\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}$ ausgedrückt werden. Durch Elimination der letzteren entsteht dann eine algebraische Beziehung der Form

$$\text{(XXI; 38)}\qquad F(r; \dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r}, C) = 0,$$

also eine Differentialgleichung dritter Ordnung für $r(t)$, deren allgemeine Lösung alle Bahnen mit der vorgegebenen JACOBIschen Konstanten C umfaßt.

Das hier skizzierte Verfahren erinnert an dasjenige, das wir gelegentlich (Abschnitt 105) zur Lösung des ebenen Zweikörperproblems eingeschlagen haben, doch besteht dabei ein gewisser Unterschied. In jenem einfacheren Problem genügt $r(t)$ der Differentialgleichung (XII; 1),

$$\text{(XXI; 39)}\qquad f(r, \dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r}) = r\,\dddot{r} + 3\dot{r}\,\ddot{r} + \frac{\dot{r}}{r^2} = 0,$$

aus der r als Funktion der Zeit und der drei unabhängigen Konstanten

$$\alpha = -\frac{1}{a}; \quad \beta = -\frac{p}{2}; \quad \gamma = t_0$$

ohne Schwierigkeit ermittelt werden konnte. Die vierte Konstante ψ_0 des Problems, das ja ebenfalls von der vierten Ordnung ist, tritt erst bei der Integration des Flächensatzes

$$r^2\,\dot{\psi} = \sqrt{p}\,; \quad \psi - \psi_0 = \sqrt{p}\int_{t_0}^{t} \frac{dt}{[r(t)]^2}$$

auf, der die Differentialgleichung (XXI; 39) notwendig ergänzt. Der Unterschied zwischen dieser Lösung des ebenen Zweikörperproblems und der oben vorgeschlagenen des HILLschen Problems besteht also darin, daß die Differentialgleichung (XXI; 38) die vierte Integrationskonstante bereits als Parameter enthält, während die ihr entsprechende Gleichung (XXI; 39) von Parametern frei ist.

Die Elimination der Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten aus (XXI; 37a–e) läßt sich folgendermaßen[1]) durchführen:

Die Gleichungen (XXI; 37b, c) sind in $\dot{\xi}$ und $\dot{\eta}$ linear und ergeben

(XXI; 40) $$\begin{cases} 2\varphi_0\,\dot{\xi} = 2\varphi_1\,\xi - \varphi_2\,\eta + 6\xi^2\eta, \\ 2\varphi_0\,\dot{\eta} = 2\varphi_1\,\eta + \varphi_2\,\xi - 6\xi^3. \end{cases}$$

Hieraus erhält man

(XXI; 41) $$2\varphi_0(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) = 2\varphi_1^2 + (\xi\,\dot{\eta} - \eta\,\dot{\xi})\,(\varphi_2 - 6\xi^2) = \\ = 2\varphi_1^2 + \frac{1}{2}\,(\varphi_2 - 6\xi^2)^2.$$

Setzt man (XXI; 40) und (XXI; 41) in (XXI; 37d, e) ein und multipliziert (XXI; 37a) mit ξ^2, so wird

(XXI; 42) $$\begin{cases} \text{a)} & \varphi_0\,\varphi_3 = 6[2\varphi_1\,\xi^2 - \xi\,\eta(\varphi_0 + \varphi_2 - 6\xi^2)], \\ \text{b)} & \varphi_0\,\varphi_4 = \varphi_1^2 + \dfrac{1}{4}\,(\varphi_2 - 6\xi^2)^2 - 3\varphi_0\,\xi^2, \\ \text{c)} & \varphi_0\,\xi^2 = \xi^4 + (\xi\,\eta)^2. \end{cases}$$

Aus diesen drei Gleichungen lassen sich die beiden Größen

$$x = 6\xi^2; \quad y = 6\xi\,\eta$$

leicht eliminieren; denn setzt man

(XXI; 43) $$\lambda = \varphi_0 + \varphi_2 - x,$$

so ergibt sich aus (XXI; 42b)

$$4(\varphi_0\,\varphi_4 - \varphi_1^2) = (\lambda - \varphi_0)^2 - 2\varphi_0(\varphi_0 + \varphi_2 - \lambda) = \lambda^2 + \varphi_0^2 - 2\varphi_0(\varphi_0 + \varphi_2)$$

oder

(XXI; 44) $$\lambda^2 = \varphi_0^2 + 2\varphi_0(\varphi_2 + 2\varphi_4) - 4\varphi_1^2.$$

Aus (XXI; 42a, c) und (XXI; 43) folgt dann, wenn

(XXI; 45) $$\Phi = \varphi_0\,\varphi_3 - 2\varphi_1(\varphi_0 + \varphi_2)$$

gesetzt wird,

$$\lambda\,y = 2\varphi_1(\varphi_0 + \varphi_2 - \lambda) - \varphi_0\,\varphi_3 = -(\Phi + 2\lambda\,\varphi_1),$$
$$y^2 = 6\varphi_0(\varphi_0 + \varphi_2 - \lambda) - (\varphi_0 + \varphi_2 - \lambda)^2 = (\varphi_0 + \varphi_2 - \lambda)\,(5\varphi_0 - \varphi_2 + \lambda).$$

Hieraus eliminiert man y:

(XXI; 46) $$\begin{cases} (\Phi + 2\lambda\,\varphi_1)^2 = \lambda^2(\varphi_0 + \varphi_2 - \lambda)\,(5\varphi_0 - \varphi_2 + \lambda) \quad \text{oder} \\ \Phi = -2\lambda\,\varphi_1 \pm \lambda\sqrt{(\varphi_0 + \varphi_2 - \lambda)\,(5\varphi_0 - \varphi_2 + \lambda)}. \end{cases}$$

---

[1]) Siehe auch K. STUMPFF, Remarks on Hill's lunar theory, Part I. NASA Technical Report D-1540, Washington 1963.

Führt man nun aus (XXI; 39) den Ausdruck

$$f = r\ddot{r} + 3\dot{r}\ddot{r} + \frac{\dot{r}}{r^2}$$

ein, der für ungestörte Bahnen verschwindet, so folgt aus (XXI; 37d) und (XXI; 45)

$$f = \varphi_3 - 4\varphi_1; \quad \Phi = \varphi_0 f - 2\varphi_1(\varphi_2 - \varphi_0),$$

und man erhält statt (XXI; 46) in Verbindung mit (XXI; 44)

$$\text{(XXI; 47)} \quad \begin{cases} \varphi_0 f = r^2\left(r\ddot{r} + 3\dot{r}\ddot{r} + \dfrac{\dot{r}}{r^2}\right) = \\ \quad = 2\varphi_1(\varphi_2 - \varphi_0 - \lambda) \pm \lambda\sqrt{(\varphi_0 + \varphi_2 - \lambda)(5\varphi_0 - \varphi_2 + \lambda)}, \\ \qquad (\lambda^2 = \varphi_0^2 + 2\varphi_0(\varphi_2 + 2\varphi_4) - 4\varphi_1^2). \end{cases}$$

Die rechte Seite verschwindet für ungestörte Bahnen und enthält daher einen Faktor von der Ordnung der Störungen.

Die Gleichung (XXI; 47) stellt die für eine Anwendung auf Satellitenprobleme bequemste Form der Differentialgleichung (XXI; 38) dar. Man kann natürlich auch eine Form finden, in der λ nicht mehr enthalten ist. Man schreibe (XXI; 46) und (XXI; 44)

$$\lambda^4 + \alpha_1\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_3\lambda + \alpha_4 = 0,$$
$$\lambda^2 + \beta_1\lambda + \beta_2 = 0$$

mit den Koeffizienten

$$\text{(XXI; 48)} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 2(2\varphi_0 - \varphi_2); & \\ \alpha_2 = 4\varphi_1^2 - 9\varphi_0^2 + \dfrac{1}{4}\alpha_1^2; & \Phi = \varphi_0\varphi_3 - 2\varphi_1(\varphi_0 + \varphi_2), \\ \alpha_3 = 4\varphi_1\Phi; & \beta_1 = 0, \\ \alpha_4 = \Phi^2 = \dfrac{\alpha_3^2}{16\varphi_1^2}; & \beta_2 = 4\varphi_1^2 - \varphi_0^2 - 2\varphi_0(\varphi_2 + 2\varphi_4). \end{cases}$$

Die Elimination von λ aus diesen beiden algebraischen Gleichungen vierten und zweiten Grades führt auf das identische Verschwinden einer SYLVESTERschen Determinante sechster Ordnung,

$$S = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 1 & 0 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung, die aufgelöst

$$S = (\alpha_4 - \alpha_2\beta_2 + \beta_2^2)^2 + \beta_2(\alpha_3 - \alpha_1\beta_2)^2 = 0$$

geschrieben werden kann, ist mit (XXI; 38) und (XXI; 47) identisch, hat allerdings trotz ihres symmetrischen Aufbaus kaum praktischen Wert. Da die α_i, β_i homogene Ausdrücke i-ten Grades in $\varphi_0, \ldots, \varphi_4$ darstellen, ist S ein Polynom achten Grades in den Größen (XXI; 37) und daher eine außerordentlich komplizierte Funktion von $r, \dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r}$ und C.

Die Größe λ ist für Mondbahnen, die im rotierenden System rechtläufig sind, bestimmt positiv; denn es ist ja nach (XXI; 43) und (XXI; 37c), mit $\varphi = \arctan(\eta/\xi)$

$$\text{(XXI; 49)} \qquad \lambda = r^2 + 2(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) = r^2(1 + 2\dot{\varphi}) > 0$$

sogar für $\dot{\varphi} > -1/2$, also für alle rechtläufigen Bewegungen, deren Winkelgeschwindigkeit im *festen* System

$$\dot{\psi} = \dot{\varphi} + 1 > \frac{1}{2}$$

ist, d.h. für Mondbahnen, deren siderische Umlaufszeit weniger als zwei Jahre beträgt.

Die allgemeine Lösung des Problems (XXI; 47), und daher auch jede spezielle, ist von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig, da $r(t)$ eine „lokale Invariante" im Sinne von Abschnitt 40 bzw. 106 ist. Sie enthält die Schar der Variationsbahnen als partikuläre Lösungen, darüber hinaus aber auch alle übrigen möglichen Bahnen mit ihren von der Exzentrizität abhängigen Störungen, wie Evektion, Apsidenbewegung usw. HILL hat in einer glänzenden Deduktion auch diesen allgemeineren Fall als Störungsproblem für kleine Exzentrizitäten gelöst und diese Lösung auch auf Bahnen ausgedehnt, deren Ebene schwach gegen die Ekliptik geneigt ist. Diese Lösung, die dann nur noch um verhältnismäßig kleine, von der Sonnenparallaxe und der Erdbahnexzentrizität abhängige Störungen (schließlich auch um die geringfügigen Störungen durch die Planeten und infolge der Anisotropie des Gravitationsfeldes der Erde) zu verbessern wäre, bildet die Grundlage der von E. W. BROWN geschaffenen Theorie des Mondes. Es wird daher zweckmäßig sein, sie erst im dritten Band im Zusammenhang mit der Theorie der allgemeinen Störungen zu entwickeln, in der die vollständige Theorie des Erdmondes und der künstlichen Erdsatelliten einen wichtigen Platz einnehmen wird.

Eine Differentialgleichung von der Form (XXI; 38) für $r(t)$ ließe sich auch für das allgemeinere „problème restreint" aufstellen; denn auch da handelt es sich um ein Problem der vierten Ordnung, das mit Hilfe des JACOBIschen Integrals auf die dritte Ordnung reduziert werden kann. Hier sind allerdings die Schwierigkeiten größer, da außer den Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten des gestörten Körpers auch noch dessen Abstand von der störenden Masse eliminiert werden muß.

Es verdient noch bemerkt zu werden, daß die Differentialgleichung (XXI; 47) genauso gebaut ist wie die Gleichungen (XII; 45) des reduzierten allgemeinen

Dreikörperproblems. Wird dort unter m_1 die Masse der Sonne und unter r_1 der geozentrische Abstand des Mondes verstanden, so bedeutet der Störungsausdruck $F_1 = r_1^2 \gamma_1$ auf der rechten Seite der Differentialgleichung

$$r_1 \dddot{r}_1 + 3 \dot{r}_1 \ddot{r}_1 + \frac{\dot{r}_1}{r_1^2} = F_1 = m_1 (p_1 + 2 p_2)$$

eine Funktion der *neun* unabhängigen Invarianten $r_i, \dot{r}_i, \ddot{r}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ des reduzierten Dreikörperproblems. Der Störungsausdruck auf der rechten Seite von (XXI; 47) ist dagegen nur von *drei* Invarianten, nämlich $r, \dot{r}, \ddot{r}$, abhängig. Er ist also wesentlich einfacher als jener.

184. *Formale Integration der Differentialgleichung für den Radiusvektor*

Die Form der Differentialgleichung (XXI; 47) legt die Vermutung nahe, daß man bei ihrer Integration mit ähnlichen Methoden zum Ziel gelangen könnte, die bei der entsprechenden Gleichung (XXI; 39) bzw. (V; 32) des Zweikörperproblems erfolgreich angewandt worden sind. Dort ergab sich eine (sogar geschlossene) Lösung des Problems, indem man statt der Zeit t eine neue Variable q durch die Vorschrift

$$\dot{q} = \frac{1}{r}; \quad t = \int_0^q r(q)\, dq \tag{XXI; 50}$$

einführte. Werden, wie dort, Ableitungen nach q durch Striche bezeichnet, so ist

$$\dot{r} = r' \dot{q} = \frac{r'}{r}; \quad \ddot{r} = \frac{r''}{r^2} - \frac{r'^2}{r^3}; \quad \dddot{r} = \frac{r'''}{r^3} - 4 \frac{r' r''}{r^4} + 3 \frac{r'^3}{r^5}, \tag{XXI; 51}$$

und es wird

$$f = r \dddot{r} + 3 \dot{r} \ddot{r} + \frac{\dot{r}}{r^2} = \frac{1}{r^2} \left(r''' + \frac{1 - r''}{r} r' \right). \tag{XXI; 52}$$

Da nun

$$\frac{d}{dq} \left(\frac{1 - r''}{r} \right) = - \frac{1}{r} \left(r''' + \frac{1 - r''}{r} r' \right) = - r f \tag{XXI; 53}$$

ist, ergibt sich für den Fall der ungestörten Bewegung $f \equiv 0$

$$\frac{d}{dq} \left(\frac{1 - r''}{r} \right) = 0; \quad \frac{1 - r''}{r} = \alpha^2 = \text{const}$$

und daher die vollständig integrierbare Gleichung

$$r''' + \alpha^2 r' = 0.$$

Im HILLschen Problem ist dagegen nach (XXI; 47) und (XXI; 52)

$$r''' + \alpha^2 r' = r^2 f(q) = g(q) \neq 0,$$

und es bezeichnet $g(q)$ den Störungsausdruck auf der rechten Seite von (XXI; 47). Andererseits ist auf der linken Seite α^2 keine Konstante; denn es ist ja wegen (XXI; 53)

$$\frac{d\alpha^2}{dq} = -r f = -\frac{g}{r},$$

also

$$\alpha^2(q) = \alpha_0^2 - \int_0^q \frac{g(q)}{r(q)}\, dq,$$

wenn $\alpha_0^2 = (1 - r_0'')/r_0$ den Wert darstellt, den α^2 für $q = 0$ $(t = 0)$ annimmt. Setzt man daher

$$h(q) = g(q) + r'(\alpha_0^2 - \alpha^2) = g + r'\left(\alpha_0^2 - \frac{1 - r''}{r}\right),$$

so folgt

$$r''' + \alpha_0^2 r' = h(q), \qquad \text{(XXI; 54)}$$

und es kann g und daher auch h als Funktion von r, r', r'' und C aufgefaßt werden. In der Tat erhält man aus (XXI; 37) und (XXI; 51)

$$\varphi_0 = r^2; \quad \varphi_1 = r'; \quad \varphi_2 = \frac{r'' - 1}{r} + C = C - \alpha^2; \quad \varphi_4 = \frac{2}{r} - C,$$

also wegen (XXI; 47)

$$g = 2r'(C - \alpha^2 - r^2 - \lambda) \pm \lambda \sqrt{(r^2 + C - \alpha^2 - \lambda)(5r^2 - C + \alpha^2 + \lambda)} \qquad \text{(XXI; 55)}$$

mit

$$\alpha^2 = \frac{1 - r''}{r} \quad \text{und} \quad \lambda^2 = r^4 + 2r^2\left(\frac{4}{r} - C - \alpha^2\right) - 4r'^2,$$

also $g = g(r, r', r'', C)$.

Im HILLschen Problem ist die Störungsbeschleunigung durch die Sonne von der Ordnung r^3. Die ungestörte Bewegung

$$r''' + \alpha_0^2 r' = 0; \quad r'' + \alpha_0^2 r = \text{const} = 1$$

ergibt sich also nur im Grenzübergang $r \to 0$.

Beschränken wir uns auf enge Bahnen, für die h genügend klein ist, so läßt sich die Lösung $r(q)$ des Zweikörperproblems als erste Näherung der Lösung von (XXI; 54) auffassen. Es wird dann möglich sein, das Verfahren von Abschnitt 41 sinngemäß auf das HILLsche Problem auszudehnen, jenes Verfahren nämlich, $r(q)$ von einem Anfangszeitpunkt $q = 0$ aus (für den hier die Anfangsbedingungen $r = r_0$, $r' = r_0'$, $r'' = r_0''$ und die JACOBIsche Konstante C vorgegeben sind) in eine Reihe zu entwickeln. Setzt man nämlich die TAYLORsche Reihe

$$r(q) = r_0 + \frac{1}{1!} r_0' q + \frac{1}{2!} r_0'' q^2 + \frac{1}{3!} r_0''' q^3 + \cdots$$

an und eliminiert die reziproken Fakultäten durch die c-Funktionen (V; 42) und (V; 43),

$$c_n[(\alpha_0 q)^2] = \frac{1}{n!} - \frac{(\alpha_0 q)^2}{(n+2)!} + \frac{(\alpha_0 q)^4}{(n+4)!} - \cdots,$$

also mittels (V; 44)

$$\frac{1}{n!} = c_n + (\alpha_0 q)^2 c_{n+2},$$

so findet man auch hier

$$r(q) = r_0 + [c_1 + (\alpha_0 q)^2 c_3]\, r_0' q + [c_2 + (\alpha_0 q)^2 c_4]\, r_0'' q^2 + \cdots$$

oder, nachdem man wieder nach Potenzen von q geordnet hat,

$$r(q) = r_0 + c_1 r_0' q + c_2 r_0'' q^2 + c_3 [r_0''' + \alpha_0^2 r_0']\, q^3 + c_4 [r_0^{\mathrm{IV}} + \alpha_0^2 r_0'']\, q^4 + \cdots.$$

Sind nun $h_0, h_0', h_0'', \ldots$ die Werte, die $h(q)$ und die Ableitungen dieser Funktion für $q = 0$ annehmen, so folgt

$$\text{(XXI; 56)} \quad r(q) = r_0 + c_1 r_0' q + c_2 r_0'' q^2 + c_3 h_0 q^3 + c_4 h_0' q^4 + c_5 h_0'' q^5 + \cdots,$$

eine Entwicklung, die für $h(q) \to 0$ in die geschlossene Form

$$r = r_0 + c_1 r_0' q + c_2 r_0'' q^2$$

für die ungestörte KEPLERsche Bewegung übergeht und die für kleine h und nicht zu große Zwischenzeiten $q = q(t)$ rasch genug konvergieren wird. Es ist daher zu erwarten, daß man die Funktion $r(q)$ in einer ziemlich weiten Umgebung der Epoche $q = 0$ durch ein rasch förderndes Iterationsverfahren, für genügend kleine Zwischenzeiten sogar direkt darstellen kann. Vermittels der „Hauptgleichung"

$$\text{(XXI; 57)} \quad t = \int_0^q r(q)\, dq = r_0 q + c_2 r_0' q^2 + c_3 r_0'' q^3 + c_4 h_0 q^4 + \cdots,$$

die man aus (XXI; 50) und (XXI; 56) ableitet, indem man die aus (V; 45) folgenden Beziehungen

$$\int_0^q c_n q^n\, dq = c_{n+1} q^{n+1}$$

benutzt, ergibt sich dann $t = t(q)$ zurück.

Führt man statt q die Variable z durch

$$z t = r_0 q$$

ein, bestimmt die „lokalen Invarianten" σ_i durch

$$r_0' = r_0^2 \sigma_2, \quad r_0'' = r_0^3 \sigma_3; \quad h_0 = r_0^4 \sigma_4, \quad h_0' = r_0^5 \sigma_5, \ldots$$

und setzt man schließlich

$$\eta_2 = \sigma_2 t; \quad \eta_3 = \sigma_3 t^2; \quad \eta_4 = \sigma_4 t^3; \quad \ldots,$$

so kann man die Hauptgleichung (XXI; 57) auch

$$\text{(XXI; 58)} \qquad 1 = z + c_2\eta_2 z^2 + c_3\eta_3 z^3 + c_4\eta_4 z^4 + \cdots$$

schreiben, nach deren Auflösung $z = z(t)$ man $r(t)$ in der Form

$$\text{(XXI; 59)} \qquad r = r_0[1 + c_1\eta_2 z + c_2\eta_3 z^2 + c_3\eta_4 z^3 + \cdots]$$

erhält. Die c-Funktionen haben das Argument

$$\text{(XXI; 60)} \qquad (\alpha_0 q)^2 = \frac{\alpha_0^2 z^2 t^2}{r_0^2} = \frac{1 - r_0''}{r_0^3} z^2 t^2 = \left(\frac{1}{r_0^3} - \sigma_3\right) z^2 t^2.$$

Damit ist das Problem formal gelöst. In der Praxis können die Gleichungen (XXI; 58) bis (XXI; 60) benutzt werden, um $r(t)$ für ein breites Anfangsintervall zu berechnen, von dem aus eine weitere Verfolgung des Funktionsverlaufs durch numerische Integration leicht möglich ist. Da enge Satellitenbahnen durchweg wenig exzentrisch sind, bereitet die iterative Lösung der Hauptgleichung (XXI; 58) mit $z = 1$ als Ausgangshypothese keine Schwierigkeiten, zumal die Terme von z^4 an sehr klein von der Ordnung der Störungen sind und rasch gegen Null abnehmen.

Zum Abschluß haben wir noch zu klären, welches Vorzeichen der Quadratwurzel in dem Störungsausdruck (XXI; 47),

$$\text{(XXI; 61)} \quad g = r^2 f = 2\varphi_1(\varphi_2 - \varphi_0 - \lambda) \pm \lambda\sqrt{(\varphi_0 + \varphi_2 - \lambda)(5\varphi_0 - \varphi_2 + \lambda)},$$

zuzuordnen ist. Es ist nach (XXI; 37d)

$$r^2 f = r^2(-4r\dot{r} + 12\xi\dot{\xi} - 6\xi\eta).$$

Setzt man nun $r\dot{r} = \xi\dot{\xi} + \eta\dot{\eta}$ und $r^2 = \xi^2 + \eta^2$ bzw. nach (XXI; 43) $r^2 = \lambda - 2(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi})$, so folgt

$$\text{(XXI; 62)} \quad r^2 f = (\xi^2 + \eta^2)(8\xi\dot{\xi} - 4\eta\dot{\eta}) + 12\xi\eta(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) - 6\lambda\xi\eta = = 2r\dot{r}(4\xi^2 - 2\eta^2) - 6\lambda\xi\eta.$$

Andererseits ist nach (XXI; 43) auch

$$6\xi^2 = \varphi_0 + \varphi_2 - \lambda; \quad 6\eta^2 = 6(\varphi_0 - \xi^2) = 5\varphi_0 - \varphi_2 + \lambda;$$
$$4\xi^2 - 2\eta^2 = \varphi_2 - \varphi_0 - \lambda.$$

Setzt man dies ein, so erhält man (XXI; 61) zurück. Vergleicht man (XXI; 62) mit (XXI; 61), so erkennt man, da $\lambda > 0$ ist, daß die Quadratwurzel das Vorzeichen von $-\xi\eta$ besitzt, also im 1. und 3. Quadranten des rotierenden Systems negativ, im 2. und 4. Quadranten positiv ist. Auf den Achsen des Systems verschwindet die Wurzel, und zwar ist

$\varphi_0 + \varphi_2 - \lambda = 0$ beim Durchgang durch die η-Achse,

$5\varphi_0 - \varphi_2 + \lambda = 0$ beim Durchgang durch die ξ-Achse.

Die hier angegebene formale Lösung des HILLschen Problems eignet sich dazu, insbesondere für enge Satellitenbahnen, den Verlauf einer speziellen Bahn aus Anfangsbedingungen zu entwickeln, die für eine Ausgangsepoche

$t_0 = 0$ vorgegeben sind. Der Anfangszustand der Bewegung wird durch vier unabhängige Konstante charakterisiert, entweder durch $r_0, \dot{r}_0, \ddot{r}_0; C$ oder durch $\xi_0, \eta_0; \dot{\xi}_0, \dot{\eta}_0$. Beide Systeme von Anfangswerten stehen durch die aus (XXI; 37) folgenden Bedingungen

$$\text{(XXI; 63)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{a)} & r_0^2 = \xi_0^2 + \eta_0^2, \\ \text{b)} & r_0 \dot{r}_0 = \xi_0 \dot{\xi}_0 + \eta_0 \dot{\eta}_0, \\ \text{c)} & r_0 \ddot{r}_0 = 2(\xi_0 \dot{\eta}_0 - \eta_0 \dot{\xi}_0) + 6\xi_0^2 - \dot{r}_0^2 + \frac{1}{r_0} - C, \\ \text{d)} & C = \frac{2}{r_0} + 3\xi_0^2 - (\dot{\xi}_0^2 + \dot{\eta}_0^2) \end{array} \right.$$

miteinander in Zusammenhang. Besonders günstig ist es, wenn als Epoche ein Zeitpunkt gewählt wird, an dem eine symmetrische Konjunktion oder Opposition des Satelliten in bezug auf die Sonne stattfindet. Dann durchläuft der Satellit die ξ-Achse senkrecht, es ist $\dot{\xi}_0 = \eta_0 = 0$, und es verschwinden für diese Epoche alle ungeraden Ableitungen von $r(t)$ bzw. $r(q)$. Insbesondere ist, für positives ξ_0 und $\dot{\eta}_0$,

$$\text{(XXI; 64)} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_0 = \xi_0; \quad \dot{r}_0 = 0; \quad C = \frac{2}{r_0} + 3r_0^2 - \dot{\eta}_0^2, \\ r_0 \ddot{r}_0 = \dot{\eta}_0^2 + 2r_0 \dot{\eta}_0 + 3r_0^2 - \frac{1}{r_0}, \\ \lambda_0 = r_0^2 + 2r_0 \dot{\eta}_0; \quad (5\varphi_0 - \varphi_2 + \lambda)_0 = 0. \end{array} \right.$$

Da dann $h_0 = h_0'' = h_0^{\mathrm{IV}} = \cdots = 0$ ist, ist auch $\sigma_{2n} = \eta_{2n} = 0$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$, so daß in den Reihen (XXI; 58) und (XXI; 59) jedes zweite Glied verschwindet.

Die durch diese Anfangswerte determinierte Bahn läßt sich mit einer KEPLERschen Ellipse vergleichen, die durch dieselben Anfangswerte bestimmt wird. Diese Ellipse wird dann die gestörte Bahn im Punkt ξ_0, η_0 oskulieren. Aber nur im festen System hat die oskulierende Bahn die Form einer Ellipse. Im rotierenden System ist sie eine im allgemeinen nicht geschlossene Kurve, auf der der Satellit im Laufe der Zeit jeden Punkt innerhalb eines Kreisringes $r_1 \leqq r \leqq r_2$ erreichen wird, wenn r_1 die Perigäumsdistanz, r_2 die Apogäumsdistanz bezeichnet. Nur wenn die Umlaufszeit des Satelliten um den Planeten mit der des Planeten um die Sonne kommensurabel ist, beschränkt sich die Bewegung auf eine nach einer endlichen Zahl von Umläufen periodische rosettenartige Kurve.

Wählt man wieder $\xi_0 = r_0, \dot{\eta}_0 > 0, \dot{\xi}_0 = \eta_0 = 0$ als Anfangswerte zur Zeit einer symmetrischen Opposition, so ist auch die oskulierende Bahn symmetrisch zur ξ-Achse, und es ist $\dot{r}_0 = 0$. Aber für die KEPLERsche Bewegung gilt das JACOBIsche Integral nicht. Es ergibt sich daher für $\ddot{r}_0$ ein anderer Wert als aus (XXI; 64). Vielmehr ist für die Zweikörperbewegung nach S. 81

$$r \ddot{r} + \dot{r}^2 - \frac{1}{r} = -\frac{1}{a} = \text{const.}$$

Andererseits ergibt die Geschwindigkeitsrelation (III; 31)

$$-\frac{1}{a} = V^2 - \frac{2}{r},$$

wobei $V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ die Geschwindigkeit im festen System bedeutet. Aus

$$x = \xi \cos n\,t - \eta \sin n\,t; \quad \dot{x} = \dot{\xi} \cos n\,t - \dot{\eta} \sin n\,t - n\,\xi \sin n\,t - n\,\eta \cos n\,t,$$
$$y = \xi \sin n\,t + \eta \cos n\,t; \quad \dot{y} = \dot{\xi} \sin n\,t + \dot{\eta} \cos n\,t + n\,\xi \cos n\,t - n\,\eta \sin n\,t$$

folgt aber, mit $n = 1$,

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \xi^2 + \eta^2 + 2(\xi\,\dot{\eta} - \eta\,\dot{\xi}).$$

Für die oben gewählte Oskulationsepoche ist also

$$-\frac{1}{a} = r_0\,\ddot{r}_0 - \frac{1}{r_0} = \dot{\eta}_0^2 + r_0^2 + 2 r_0\,\dot{\eta}_0 - \frac{2}{r_0}$$

und daher

$$r_0\,\ddot{r}_0 = \dot{\eta}_0^2 + 2 r_0\,\dot{\eta}_0 + r_0^2 - \frac{1}{r_0}.$$

Vergleicht man dies mit (XXI; 64), so zeigt sich, daß

$$\ddot{r}_0\ (\text{Kepler}) = \ddot{r}_0\ (\text{Hill}) - 2 r_0$$

kleiner als der entsprechende Wert in der gestörten Bahn ist. In der Ellipse wird also r vom Minimum (Perigäum, das hier während der Opposition eintritt) langsamer zum Maximum ansteigen als in der gestörten. Für den Fall, daß beide Bahnen von der Kreisform nur wenig abweichen (was z.B. für die inneren Satelliten der großen Planeten zutrifft), werden aber die gestörten Örter für einen ziemlich langen Zeitraum vor und nach der Oskulationsepoche nur unbedeutend von den ungestörten abweichen.

185. *Neue Lösung des Variationsproblems*

Die HILLschen Variationsbahnen sind die einfachsten periodischen Lösungen des allgemeinen Problems (XXI; 38) im rotierenden System. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß $r(t)$ periodisch mit der Periode eines halben synodischen Monats verläuft und daß im Laufe dieser Periode $r(t)$ nur *ein* Maximum und *ein* Minimum besitzt. Beide Extrempunkte stellen dann Symmetriepunkte der Lösungskurve dar. Die Variationsbahnen zeichnen sich also dadurch aus, daß der gesamte Verlauf der Kurve $r(t)$ bekannt ist, wenn die zwischen Minimum und folgendem Maximum (oder die zwischen Maximum und folgendem Minimum) gelegene Hälfte der periodischen Bewegung bekannt ist, da sich beide Hälften spiegelbildlich zueinander verhalten. An beiden Extremen verschwinden sämtliche ungeraden Ableitungen von $r(t)$, und zwischen aufeinanderfolgenden Extremen steigt bzw. fällt die Kurve monoton. In jedem dieser Intervalle ist also die Funktion $r(t)$ eindeutig umkehrbar, d.h., es können innerhalb jedes Intervalls die Zeit t und die Ableitungen von $r(t)$ auch als Funktionen

von r aufgefaßt werden. Ein ähnlicher Sachverhalt ist aus der Zweikörperbewegung bekannt. Dort ist, wenn die exzentrische Anomalie E als unabhängige Variable benutzt wird,

$$r(E) = a(1 - e\cos E) = a - b\cos E$$

eine einfach-periodische Funktion von E, die zwischen dem symmetrischen Minimum $r(0) = a - b$ und dem symmetrischen Maximum $r(\pi) = a + b$ monoton wächst. Bezeichnet man die Ableitungen nach E durch Striche, so sind in der Tat

$$\text{(XXI; 65)} \quad \begin{cases} r' &= b\sin E = b\sqrt{1 - \cos^2 E} = \sqrt{b^2 - (a - r)^2}, \\ r'' &= b\cos E = a - r, \\ r''' &= -r', \ldots, \\ E &= \arccos\dfrac{a - r}{b} \end{cases}$$

im Intervall $0 \leqq E \leqq \pi$ bzw. $a - b \leqq r \leqq a + b$ eindeutig als Funktionen von r darstellbar. Das gleiche gilt auch für t und die Ableitungen von r nach der Zeit, doch sind hier die Zusammenhänge komplizierter und (ausgenommen für die Sonderfälle Kreis und Parabel) nicht in geschlossener Form darstellbar. Durch den Übergang von t auf E als unabhängige Variable wird also die Kurve $r(t)$ in eine reine Kosinuskurve $r(E)$ *entzerrt*. Den Zusammenhang zwischen t und E liefert die Differentialbeziehung

$$\dot{E} = \frac{n}{1 - e\cos E} = \frac{\text{const}}{r} = \dot{E}(r)$$

bzw. ihr Integral, die KEPLERsche Gleichung

$$E - e\sin E = n(t - t_0).$$

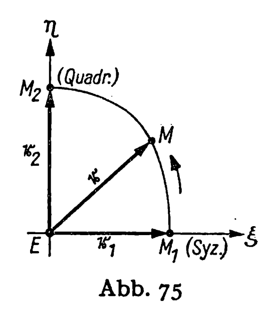


Abb. 75

Ebenso wie hier, könnte man auch versuchen, die Bewegung in der HILLschen Variationsbahn, in der (Abb. 75) $r(t)$ im ersten Quadranten des rotierenden Systems von dem Minimum r_1 bei M_1 (in der Syzygienstellung) bis zum Maximum r_2 bei M_2 (in der Quadratur) monoton wächst, durch Einführung einer neuen Variablen $q(t)$ in eine Kosinusfunktion

$$\text{(XXI; 66)} \qquad r(q) = r_0 - \varepsilon\cos q$$

zu entzerren. Die Bewegung in der Variationsbahn ist vollständig bekannt, wenn für einen vorgegebenen Parameter [etwa die JACOBIsche Konstante C, den HILLschen Periodenmodul $m = T/2\pi$ oder die mittlere Distanz $r_0 = {}^1/_2(r_1 + r_2)$] die Extrema

$$r_1 = r_0 - \varepsilon; \quad r_2 = r_0 + \varepsilon$$

und die Funktion $q = f(r) > 0$ bekannt sind; denn dann läßt sich $r(q)$ durch

$$dt = \frac{dq}{f(r)}; \quad t - t_0 = \int\limits_{q(t_0)}^{q} \frac{dq}{f[r(q)]},$$

die der KEPLERschen Gleichung entsprechende „Hauptgleichung" des Problems, auf $r(t)$ zurückführen.

Es sei nun $q(t)$ die Entzerrungsfunktion mit den gewünschten Eigenschaften. Ist $t_0 = 0$ ein Zeitpunkt, in dem r das Minimum r_1 annimmt, und T die synodische Umlaufszeit des Satelliten, so wird $q(0) = 0$, $q(T/4) = \pi$ sein und q in diesem Intervall monoton mit t und r wachsen. Bezeichnet man Ableitungen nach q durch Striche, so wird, entsprechend (XXI; 65),

$$r'^2 = \varepsilon^2 - (r - r_0)^2 = (r - r_1)(r_2 - r),$$

$$r'' = r_0 - r; \quad r''' = -r', \ldots$$

gelten, d.h., alle Ableitungen von $r(q)$ sind im Intervall $r_0 - \varepsilon \leqq r \leqq r_0 + \varepsilon$ eindeutig als Funktionen von r darstellbar. Für den Übergang von q auf t gilt dann

$$\frac{\dot{r}}{r'} = \frac{dq}{dt}, \quad \text{d.h.} \quad dt = \frac{r'}{\dot{r}}\, dq.$$

Führt man nun eine unbekannte Funktion von r,

$$A(r) = (r\dot{r})^2 = (r r' \dot{q})^2 = (r\dot{q})^2 (r - r_1)(r_2 - r)$$

ein, die für $r = r_1$ und $r = r_2$ verschwindet, so wird

$$\text{(XXI; 67)} \qquad \dot{r} = \frac{\sqrt{A}}{r}; \quad dt = \frac{r r'}{\sqrt{A}}\, dq = \frac{dq}{f(r)}$$

sein, und es sei

$$r f(r) = \sqrt{\frac{A}{r'^2}} = \sqrt{\frac{A(r)}{(r - r_1)(r_2 - r)}} = \Theta(r).$$

Nun sind aber enge Variationsbahnen wenig gestörte, kreisähnliche KEPLERsche Ellipsen, und es gilt für sie sehr angenähert die in der Zweikörperbewegung gültige Beziehung

$$\dot{q} \sim \frac{1}{r}, \quad \text{d.h.} \quad f(r) = \frac{\text{const}}{r}; \quad \Theta = \text{const}.$$

Ist $A(r)$ und damit auch $f(r)$ bekannt, so erhält man durch Integration von (XXI; 67) die Hauptgleichung

$$\text{(XXI; 68)} \qquad t - t_0 = \int\limits_0^q \frac{r(q)\, dq}{\Theta[r(q)]}$$

als Beziehung zwischen t und q, wobei für die willkürliche Integrationskonstante auch $t_0 = 0$ gesetzt werden darf. Das Variationsproblem ist damit auf die Bestimmung der Funktion $\Theta(r)$ zurückgeführt, die in erster Näherung konstant ist, bzw. auf die Bestimmung von

$$A(r) = (r - r_1)(r_2 - r)\,\Theta^2(r), \tag{XXI; 69a}$$

einer Funktion, die sich für kleine r von einer quadratischen,

$$A(r) \approx k^2(r - r_1)(r_2 - r) = k^2[\varepsilon^2 - (r - r_0)^2], \quad k = \text{const}, \tag{XXI; 69b}$$

nur wenig unterscheidet. Es wird sich zeigen, daß man mit dem provisorischen Ansatz (XXI; 69b) die ersten Glieder der HILLschen Reihenentwicklungen verifizieren kann, und es kommt dann nur noch darauf an, die Konstanten k und ε als Funktionen des Scharparameters der Variationsbahnen auszudrücken.

Wir werden in der Folge als Scharparameter den mittleren Abstand $r_0 = {}^1/_2(r_1 + r_2)$ benutzen. Durch Umkehrung der ersten Reihe (XXI; 27) ergibt sich, wenn man noch

$$\tau = r_0^{3/2} \tag{XXI; 70}$$

setzt,

$$m = \tau\left(1 + \tau + \frac{5}{4}\tau^2 + \frac{3}{2}\tau^3 + \cdots\right). \tag{XXI; 71}$$

Setzt man dies in (XXI; 27) und (XXI; 29) ein, so erhält man für die halbe Intervallbreite $\varepsilon = {}^1/_2(r_2 - r_1)$ und die JACOBIsche Konstante C die Reihen

$$\varepsilon = r_0^4\left(1 + \frac{19}{6}\tau + \frac{137}{18}\tau^2 + \cdots\right), \tag{XXI; 72}$$

$$C = \frac{1}{r_0}\left(1 + 2\tau + \tau^2 - \frac{1}{2}\tau^3 - \cdots\right). \tag{XXI; 73}$$

Im folgenden wird gezeigt werden, daß $A(r)$ die Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung ist und daß die genäherte Lösung (XXI; 69b) ausreicht, um die HILLschen Formeln (XXI; 71) bis (XXI; 73) bis zu den oben noch hingeschriebenen Termen zu bestätigen.

Um die Differentialgleichung (XXI; 46) in eine solche für $A(r)$ umzuformen, folgern wir, wenn Ableitungen nach r durch Indizes ($dA/dr = A_r$ usw.) gekennzeichnet werden, aus $\varphi_1 = r\dot{r} = \sqrt{A}$

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\dot{A}}{2\sqrt{A}} = \frac{1}{2\sqrt{A}} A_r r' \dot{q}$$

oder, da $\sqrt{A} = r\dot{r} = r r' \dot{q}$ ist,

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{1}{2r} A_r.$$

Nach (XXI; 37c) ist dann

$$\varphi_2 = \dot{\varphi}_1 - \frac{1}{r} + C = \frac{1}{2r}[A_r + 2(Cr - 1)] = \frac{1}{2r} B_r,$$

wenn zur Abkürzung

$$B = A - 2r + C r^2$$

geschrieben wird. Aus (XXI; 37d) folgt dann

$$\varphi_3 = \dot{\varphi}_2 + 4\varphi_1 = \frac{d\varphi_2}{dr} r' \dot{q} + 4\varphi_1 = \frac{d\varphi_2}{dr}\frac{\varphi_1}{r} + 4\varphi_1$$

oder

$$\varphi_3 = \frac{1}{2}\varphi_1\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{B_r}{r}\right) + 8\right] = \frac{1}{2r^3}\sqrt{A}\,(rB_{rr} - B_r + 8r^3).$$

Andererseits ergibt (XXI; 45)

$$\Phi = \varphi_0\varphi_3 - 2\varphi_1(\varphi_0 + \varphi_2) = \frac{1}{2r}\sqrt{A}\,(rB_{rr} - B_r + 8r^3) -$$

$$- 2\sqrt{A}\left(r^2 + \frac{1}{2r}B_r\right) =$$

$$= \frac{1}{2r}\sqrt{A}\,(rB_{rr} - 3B_r + 4r^3)$$

und (XXI; 44)

$$\lambda^2 = \varphi_0^2 + 2\varphi_0(\varphi_2 + 2\varphi_4) - 4\varphi_1^2 =$$

$$= r^4 + 2r^2\left(\frac{1}{2r}B_r + \frac{4}{r} - 2C\right) - 4A =$$

$$= r^4 + rB_r + 8r - 4Cr^2 - 4(B + 2r - Cr^2) =$$

$$= r^4 + rB_r - 4B.$$

Hieraus folgt durch Differenzieren

$$2\lambda\lambda_r = 4r^3 - 3B_r + rB_{rr} = \frac{2r\Phi}{\sqrt{A}}.$$

Man kann also die Differentialgleichung (XXI; 46),

(XXI; 74) $\qquad (\Phi + 2\lambda\varphi_1)^2 = \lambda^2(\varphi_0 + \varphi_2 - \lambda)(5\varphi_0 - \varphi_2 + \lambda),$

folgendermaßen umformen: Es ist

$$\Phi + 2\lambda\varphi_1 = \frac{1}{r}\lambda\lambda_r\sqrt{A} + 2\lambda\sqrt{A} = \frac{1}{r}\lambda\sqrt{A}(\lambda_r + 2r),$$

$$\varphi_0 + \varphi_2 - \lambda = r^2 + \frac{1}{2r}B_r - \lambda = \frac{1}{2r}(2r^3 + B_r - 2\lambda r),$$

$$5\varphi_0 - \varphi_2 + \lambda = 5r^2 - \frac{1}{2r}B_r + \lambda = \frac{1}{2r}(10r^3 - B_r + 2\lambda r),$$

also, wenn man (XXI; 74) durch $\lambda^2/4r^2$ dividiert, was erlaubt ist, da wegen (XXI; 49) stets $\lambda > 0$ ist,

$$4A(\lambda_r + 2r)^2 = (2r^3 + B_r - 2\lambda r)(10r^3 - B_r + 2\lambda r)$$

oder

(XXI; 75) $$\boxed{P^2 + 4A\,Q^2 = 36r^6}$$

mit den Bezeichnungen

(XXI; 76) $$\begin{cases} P = 4r^3 + 2\lambda r - B_r; & A = B + 2r - C r^2 = (r - r_1)(r_2 - r)\Theta^2(r), \\ Q = \lambda_r + 2r; & \lambda^2 = r^4 + rB_r - 4B. \end{cases}$$

Die Differentialgleichung (XXI; 75), die man wahlweise als Differentialgleichung zweiter Ordnung für $A(r)$, $B(r)$ oder $\Theta^2(r)$ auffassen kann, repräsentiert also das Problem der Variationsbahnen. Ihre Lösung wird dadurch erleichtert, daß die Näherung (XXI; 69b) zur Verfügung steht, aber auch erschwert, da A, A_r und A_{rr} auch unter Quadratwurzeln vorkommen. Daß man trotzdem für kleine Werte des Parameters r_0 bzw. $\tau = r_0\sqrt{r_0}$ eine genügend genaue Lösung rasch erhält, liegt daran, daß A, k, C und ε von sehr verschiedener Größenordnung sind. In der Tat zeigen die HILLschen Reihen (XXI; 72) und (XXI; 73), daß ε von der Ordnung r_0^4, C von der Ordnung r_0^{-1} ist. Ferner ist nach (XXI; 69b) $A(r)$ im Intervall $[r_1, r_2]$ höchstens gleich $k^2\varepsilon^2$. Andererseits gilt aber für enge Bahnen genähert statt (XXI; 66)

$$r \approx r_0 - \varepsilon\cos 2\nu t; \quad \nu = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{m},$$

also

$$\dot r^2 \approx 4\nu^2[\varepsilon^2 - (r - r_0)^2].$$

Für $r = r_0$ ist demnach, solange r_0 klein genug ist, genähert

(XXI; 77) $$A_0 = A(r_0) = (r_0\dot r_0)^2 \approx 4\frac{r_0^2}{m^2}\varepsilon^2,$$

also, wegen $m \approx \tau = r_0^{3/2}$,

(XXI; 77a) $$A_0 \approx \frac{4}{r_0}\varepsilon^2 \approx 4r_0^7; \quad k \approx \frac{2}{\sqrt{r_0}}.$$

Mit dem genäherten Ansatz (XXI; 69b) ist

(XXI; 78) $$\begin{cases} A_r = -2k^2(r - r_0), \\ A_{rr} = -2k^2, \\ B = k^2[\varepsilon^2 - (r - r_0)^2] - 2r + C r^2, \\ B_r = -2k^2(r - r_0) + 2(C r - 1), \\ B_{rr} = 2(C - k^2), \\ \lambda^2 = r^4 - 2k^2 r(r - r_0) - 4k^2[\varepsilon^2 - (r - r_0)^2] + 4r - 2r(C r - 1), \\ \lambda\lambda_r = 2r^3 + 3k^2(r - r_0) - k^2 r + 1 - 2(C r - 1). \end{cases}$$

Für $r = r_0$ gilt speziell

$$
\text{(XXI; 79)} \quad \left\{ \begin{aligned}
A_0 &= k^2 \varepsilon^2 \approx 4 r_0^7, \\
(A_r)_0 &= 0, \\
(A_{rr})_0 &= -2k^2, \\
B_0 &= k^2 \varepsilon^2 - 2r_0 + C r_0^2, \\
(B_r)_0 &= 2(C r_0 - 1), \\
(B_{rr})_0 &= 2(C - k^2), \\
\lambda_0^2 &= r_0^4 - 4k^2 \varepsilon^2 + 4r_0 - 2r_0(C r_0 - 1), \\
(\lambda \lambda_r)_0 &= 2r_0^3 - k^2 r_0 + 1 - 2(C r_0 - 1).
\end{aligned} \right.
$$

Für die beiden Nullstellen von $A(r)$ ist nach (XXI; 75)

$$P = \pm 6 r^3.$$

Da $P(r)$ stetig ist, wird also irgendwo im Intervall $[r_1, r_2]$ $P = 0$ sein, und zwar in der Nachbarschaft von r_0. Setzen wir die TAYLORsche Entwicklung

$$P(r) = P_0 + (r - r_0)(P_r)_0 + \frac{1}{2}(r - r_0)^2 (P_{rr})_0 + \cdots$$

an, so wird für $r = r_1$ bzw. $r = r_2$

$$P(r_1) = P_0 - \varepsilon (P_r)_0 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 (P_{rr})_0 - \cdots = -6 r_1^3,$$

$$P(r_2) = P_0 + \varepsilon (P_r)_0 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 (P_{rr})_0 + \cdots = +6 r_2^3$$

sein, wobei wir vorwegnehmen, daß $P(r_1) < 0$, $P(r_2) > 0$, also P_r positiv ist (der Beweis wird weiter unten nachgeholt werden). Dann ergibt die halbe Summe der beiden Reihen

$$P_0 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 (P_{rr})_0 + \cdots = 3(r_2^3 - r_1^3) = 6\varepsilon(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \approx 18 \varepsilon r_0^2,$$

so daß $P_0 = P(r_0)$ von der Ordnung $r_0^6 = \tau^4$ ist. Nach (XXI; 76) und (XXI; 79) ist aber

$$P_0 = 4 r_0^3 + 2 \lambda_0 r_0 - (B_r)_0 = 4 r_0^3 + 2 \lambda_0 r_0 - 2(C r_0 - 1),$$

also

$$\text{(XXI; 80a)} \qquad \lambda_0 r_0 = (C r_0 - 1) - 2\tau^2 + \frac{1}{2} P_0.$$

Andererseits erhält man aus (XXI; 79), wenn man den Ausdruck für λ_0^2 mit r_0^2 multipliziert,

$$\text{(XXI; 80b)} \qquad (\lambda_0 r_0)^2 = \tau^4 - 4k^2 \varepsilon^2 r_0^2 + 4\tau^2 - 2\tau^2 (C r_0 - 1).$$

Eliminiert man nun $\lambda_0 r_0$ aus (XXI; 80a) und (XXI; 80b), so ergibt sich

(XXI; 81) $$(C r_0 - 1)^2 - 2\tau^2(C r_0 - 1) - 4\tau^2 + 3\tau^4 + 4k^2 \varepsilon^2 r_0^2 +$$
$$+ P_0[(C r_0 - 1) - 2\tau^2] + \frac{1}{4} P_0^2 = 0.$$

Vernachlässigt man Größen von mindestens der Ordnung $r_0^9 = \tau^6$, so bleibt die quadratische Gleichung

$$(C r_0 - 1)^2 - (2\tau^2 - P_0)(C r_0 - 1) = 4\tau^2 - 3\tau^4$$

für $C r_0 - 1$, deren Lösung, bis zu Termen der Ordnung τ^4,

(XXI; 82) $$C r_0 - 1 = \tau^2 - \frac{1}{2} P_0 \pm \sqrt{4\tau^2 - 2\tau^4 - P_0 \tau^2 - \cdots} =$$
$$= \tau^2 - \frac{1}{2} P_0 \pm 2\tau\left(1 - \frac{1}{4}\tau^2 - \cdots\right)$$

lautet. Hier gilt das positive Vorzeichen der Quadratwurzel; denn mit dem negativen würde nach (XXI; 80a)

$$\lambda_0 r_0 = -2\tau - \tau^2 + \frac{1}{2}\tau^3 + \cdots < 0$$

sein, was wegen $\lambda > 0$ ausgeschlossen ist. Demnach erhält man

(XXI; 83) $$C r_0 - 1 = 2\tau + \tau^2 - \frac{1}{2}\tau^3 - \frac{1}{2} P_0 - \cdots,$$

also

$$C = \frac{1}{r_0}\left(1 + 2\tau + \tau^2 - \frac{1}{2}\tau^3 + \cdots\right),$$

bis zu den Termen der Ordnung τ^3 übereinstimmend mit der HILLschen Reihe (XXI; 73). Aus (XXI; 80a) und (XXI; 83) folgt dann

(XXI; 84) $$\lambda_0 r_0 = 2\tau - \tau^2 - \frac{1}{2}\tau^3 + O(\tau^5),$$

da sich die Terme mit P_0, die von der vierten Ordnung sind, aufheben. Ferner erhält man aus (XXI; 79) und (XXI; 83) bis zur dritten Ordnung

$$(\lambda \lambda_r)_0 = 1 - k^2 r_0 - 4\tau + \tau^3 \ldots,$$

also, wenn man λ_0 aus (XXI; 84) entnimmt,

(XXI; 85)
$$(\lambda_r)_0 = r_0 \frac{1 - k^2 r_0 - 4\tau + \tau^3 + \cdots}{2\tau - \tau^2 - \frac{1}{2}\tau^3 + O(\tau^5)} = \frac{1}{2\sqrt{r_0}} \frac{1 - k^2 r_0 - 4\tau + \tau^3 + O(\tau^4)}{1 - \frac{1}{2}\tau - \frac{1}{4}\tau^2 + O(\tau^4)}.$$

Entsprechende Reihen sind für k und ε zu entwickeln. Aus (XXI; 75),

$$P^2 = 36 r^6 - 4A Q^2,$$

folgt mit der provisorischen Lösung (XXI; 69b)

(XXI; 86a) $$P^2 = 36r^6 - 4k^2\varepsilon^2 Q^2 + 4k^2(r-r_0)^2 Q^2,$$

also für $r = r_0$

(XXI; 86b) $$P_0^2 = 36r_0^6 - 4k^2\varepsilon^2 Q_0^2 = O(\tau^8).$$

Aus der Differenz von (XXI; 86a, b) ergibt sich

$$P^2 = 36(r^6 - r_0^6) - 4k^2\varepsilon^2(Q^2 - Q_0^2) + 4k^2(r-r_0)^2 Q^2 + O(\tau^8).$$

In der Umgebung von r_0 wird man genau genug

(XXI; 87) $$P^2 = 4k^2(r-r_0)^2 Q^2; \quad 36r_0^6 - 4k^2\varepsilon^2 Q_0^2 = 0$$

setzen dürfen, also auch

(XXI; 88) $$P = \pm 2k(r-r_0)Q; \quad (P_r)_0 = \pm 2k Q_0.$$

Über das Vorzeichen entscheiden folgende Abschätzungen: Aus (XXI; 77a) folgt $1 - k^2 r_0 \approx -3$, also aus (XXI; 85), wenn man nur Glieder nullter Ordnung berücksichtigt,

$$(\lambda_r)_0 \approx -\frac{3}{2\sqrt{r_0}}$$

und daher aus (XXI; 76)

$$Q_0 = (\lambda_r)_0 + 2r_0 \approx -\frac{3}{2\sqrt{r_0}}[1 - O(\tau)].$$

Q_0 ist also negativ. Andererseits folgt aus (XXI; 76) durch Differenzieren

$$P_r = 12r^2 + 2\lambda + 2\lambda_r r - B_{rr},$$

also für $r = r_0$ nach (XXI; 79)

(XXI; 89) $$r_0(P_r)_0 = 12r_0^3 + 2\lambda_0 r_0 + 2(\lambda_r)_0 r_0^2 - 2(C r_0 - 1) - 2(1 - k^2 r_0).$$

Da nur das letzte Glied,

$$-2(1 - k^2 r_0) = 6 + O(\tau),$$

einen Term nullter Ordnung enthält, der positiv ist, folgt $(P_r)_0 > 0$, als Bestätigung einer oben schon ohne Beweis benutzten Ungleichung. Wegen $Q_0 < 0$ folgt dann aber, daß in (XXI; 88) das *negative* Vorzeichen gilt. Schreibt man die zweite Gleichung (XXI; 88)

(XXI; 90) $$r_0(P_r)_0 = -2k\sqrt{r_0}\, Q_0 \sqrt{r_0},$$

so ist nach (XXI; 89) und (XXI; 84) bis zu Termen der Ordnung τ^3

$$r_0(P_r)_0 = 12\tau^2 + 2\left(2\tau - \tau^2 - \frac{1}{2}\tau^3\right) + 2\tau\sqrt{r_0}\,(\lambda_r)_0 - 2\left(2\tau + \tau^2 - \frac{1}{2}\tau^3\right) + \\ + 2(k^2 r_0 - 1),$$

ferner

(XXI; 91) $$Q_0\sqrt{r_0} = [(\lambda_r)_0 + 2r_0]\sqrt{r_0} = \sqrt{r_0}\,(\lambda_r)_0 + 2\tau.$$

Setzt man diese Ausdrücke in (XXI; 90) ein, so folgt

$$2\sqrt{r_0}\,(\lambda_r)_0\,(\tau + k\sqrt{r_0}) + 4\tau k\sqrt{r_0} + 2k^2 r_0 - 2 + 8\tau^2 = 0.$$

Nach Elimination von $(\lambda_r)_0$ durch (XXI; 85) entsteht also für $x = k\sqrt{r_0}$ die kubische Gleichung

$$x^3 - 2x^2\left(1 - \tau - \frac{1}{4}\tau^2 - \cdots\right) - x(1 - 2\tau^2 - \cdots) =$$
$$= -2 + 2\tau + \frac{9}{2}\tau^2 - 4\tau^3 + \cdots,$$

deren Koeffizienten, da im Nenner von (XXI; 85) ein Glied mit τ^3 nicht vorkommt, sämtlich bis zur Ordnung τ^3 genau sind. Mit dem Ansatz

$$x = 2 + \alpha\tau + \beta\tau^2 + \gamma\tau^3$$

ergibt sich

$$\alpha = -2; \quad \beta = -\frac{1}{2}; \quad \gamma = 0,$$

also

$$k = \frac{2}{\sqrt{r_0}}\left[1 - \tau - \frac{1}{4}\tau^2 + O(\tau^4)\right]. \tag{XXI; 92}$$

Nachdem dies Ergebnis feststeht, läßt sich ε aus der zweiten Gleichung (XXI; 87) ermitteln, die bis auf Terme der Ordnung τ^8 gültig ist. Man erhält

$$\varepsilon^2 = \frac{9r_0^6}{k^2 Q_0^2}; \quad \varepsilon = \frac{3r_0^3}{k\,|Q_0|} = \frac{3r_0^4}{k\sqrt{r_0}\,|Q_0\sqrt{r_0}|}.$$

Da nun nach (XXI; 85), (XXI; 91) und (XXI; 92)

$$Q_0\sqrt{r_0} = 2\tau + \sqrt{r_0}\,(\lambda_r)_0 = -\frac{3 - 8\tau + 4\tau^2 + O(\tau^4)}{2 - \tau - \frac{1}{2}\tau^2 + O(\tau^4)}$$

und

$$k\sqrt{r_0} = 2\left(1 - \tau - \frac{1}{4}\tau^2 + O(\tau^4)\right)$$

ist, ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$\varepsilon = r_0\tau^2\left(1 + \frac{19}{6}\tau + \frac{137}{18}\tau^2 + \cdots\right),$$

also genau die HILLsche Formel (XXI; 72), die man auch

$$\varepsilon = r_0\tau^2\,\frac{1 + \frac{1}{6}\tau + \frac{1}{9}\tau^2 + \cdots}{(1 - \tau)(1 - 2\tau)} \tag{XXI; 93}$$

schreiben könnte.

Die Hauptgleichung (XXI; 68) lautet, sofern $\Theta = k = \text{const}$ gesetzt werden darf,

$$t - t_0 = \frac{1}{k}\int_0^q r(q)\,dq = \frac{\sqrt{r_0}}{2\left[1 - \tau - \frac{1}{4}\tau^2 + O(\tau^4)\right]}\int_0^q (r_0 - \varepsilon\cos q)\,dq$$

oder

$$2(t - t_0) = m\left(q - \frac{\varepsilon}{r_0}\sin q\right),$$

und es ist, wenn links über t von 0 bis $T/2$, rechts über q von 0 bis 2π integriert wird, die Umlaufszeit in der Variationsbahn

$$T = 2\pi m,$$

wo

$$m = \frac{\tau}{1 - \tau - \frac{1}{4}\tau^2 + O(\tau^4)} = \tau\left(1 + \tau + \frac{5}{4}\tau^2 + \frac{3}{2}\tau^3 + \cdots\right)$$

mit der HILLschen Entwicklung (XXI; 71) des Periodenmoduls übereinstimmt.

Es zeigt sich also, daß man mit dem quadratischen Ansatz (XXI; 69b) für $A(r)$ durch einfache mathematische Überlegungen zu einer intermediären Lösung des Variationsproblems gelangt, die mit den HILLschen Reihenentwicklungen in den ersten drei oder vier Gliedern übereinstimmt. Variiert man den Ansatz, indem man $\Theta = k$ durch eine Funktion $\Theta(r)$ ersetzt, die für mäßige Beträge des Parameters r_0 wahrscheinlich nur wenig von einer Konstanten abweicht, so wird man unschwer zu genaueren Ergebnissen fortschreiten. Hier genügt es, diesen Weg anzudeuten.

KAPITEL XXII

KÜNSTLICHE HIMMELSKÖRPER

186. *Übersicht über die Probleme*

Seitdem es der Technik gelungen ist, künstliche Himmelskörper, wenn auch kleinsten Ausmaßes, in den Raum zu entsenden, wo sie teils als „künstliche Erdsatelliten" die Erde umkreisen, teils den Anziehungsbereich der Erde ganz verlassen, um als „künstliche Planetoiden, Raumsonden oder Raumproben" der Sonne tributär bzw. zum Mond oder zu den nächsten Planeten entsandt zu werden, ist der Himmelsmechanik ein ganz neuer Problemkreis entstanden. Damit beginnt für diese Wissenschaft, nachdem das Interesse an ihr zeitweilig erlahmt war und nur von wenigen Spezialisten wachgehalten worden ist, ein neues, ungemein fruchtbares Zeitalter. Wenn bislang für die Erprobung der aus dem NEWTONschen Gravitationsgesetz abgeleiteten Folgerungen nur die natürlichen Himmelskörper selbst, vor allem die des Sonnensystems, zur Verfügung gestanden haben, deren Bahnformen trotz großer Mannigfaltigkeit nur einen begrenzten Ausschnitt aus dem großen Bereich der Möglichkeiten ausfüllen, so wird es künftig möglich sein, die Bedingungen künstlich zu variieren, unter denen sich Massenpunkte im Gravitationsfeld von Sonne, Mond und Planeten bewegen. Daß diese Entwicklung der Himmelsmechanik zu einer experimentellen Wissenschaft auch Verbindungen zwischen ihr und anderen Wissenschaftszweigen, wie Geodäsie, Geophysik, Meteorologie und Aerologie (sowie natürlich zu Physik und Technik) geschaffen hat, die neue Forschungsmöglichkeiten auf allen diesen Gebieten eröffnen, verdient besonders hervorgehoben zu werden.

Was die letztgenannten Überschneidungen zwischen der reinen Himmelsmechanik und „irdischen" Wissenschaften anbelangt, so verdanken sie ihren Ursprung dem Umstand, daß die Bahnen der künstlichen Satelliten zum Teil in großer Erdnähe und noch innerhalb der obersten Schichten der Atmosphäre (der Iono- und Exosphäre) verlaufen. In diesen Schichten wird die Bewegung dieser Kleinstkörper nicht nur durch Gravitationskräfte bedingt, sondern ist auch merklich den Wechselwirkungen zwischen dem bewegten Körper und den teils neutralen, teils elektrisch geladenen Teilchen unterworfen, die den dort nicht mehr als „leer" anzusehenden Raum mehr oder weniger dicht bevölkern. Aber auch außerhalb der Exosphäre und des (übrigens erst 1958 mit Hilfe des ersten „Vanguard"-Satelliten entdeckten) VAN-ALLEN-Strahlungsgürtels findet man die Bedingungen der klassischen Himmelsmechanik stark modifiziert infolge der Anisotropie des Gravitationsfeldes der Erde, die hier nicht mehr als kugelförmig-symmetrisch aufgebauter Körper angesehen werden kann und daher auch in den Differentialgleichungen der Bewegung eines Satelliten nicht mehr als Massenpunkt erscheint. Diese Abweichung der Erde von der Kugelgestalt spielt zwar auch in der strengen Theorie der Mondbewegung noch eine gewisse Rolle, aber in jener Entfernung von durchschnittlich 60 Erdhalbmessern sind diese Einflüsse nur noch geringfügig. Auf die Bewegung erdnaher

Satelliten übt aber die Asymmetrie des Erdfeldes einen so großen Einfluß aus, daß die durch sie hervorgerufenen „Störungen" nicht mehr deduktiv aus der bisher nur sehr unzureichend bekannten Verteilung der Massen im Innern des Erdkörpers abgeleitet werden können. Hier bietet sich vielmehr die umgekehrte Möglichkeit dar, aus den beobachteten Störungen der Satellitenbewegung auf die Gestalt des irdischen Gravitationspotentials zu schließen und dadurch bis zu einem gewissen Grade auch die geometrische Form des Erdkörpers (genauer gesagt des Geoids) und die Dichteverteilung im Erdinnern genauer zu bestimmen, als es mit den Mitteln möglich gewesen ist, die der Geodäsie und der Geophysik bisher zur Verfügung gestanden haben. Wir werden auf diese Dinge im nächsten Abschnitt noch etwas eingehender zurückkommen.

Es leuchtet ein, daß diese für die Astronomie wie die Geophysik gleich wichtigen Untersuchungen am genauesten an Satelliten durchgeführt werden können, die sich während ihres ganzen Umlaufs genügend weit außerhalb der Atmosphäre befinden, so daß die Bremswirkung der dort noch anzutreffenden atmosphärischen Partikeln vernachlässigt werden kann, aber auch noch in genügender Erdnähe, damit die Anisotropie des Erdpotentials deutlich genug ausgeprägt bleibt und damit die Satellitenbewegung von der Erde aus noch mit der für solche Untersuchungen erforderlichen großen Genauigkeit beobachtet werden kann. Die Überlagerung mehrerer heterogener Effekte, deren störende Wirkungen auf die Umlaufsbahn des Satelliten berücksichtigt und auseinandergehalten werden müssen, bringt es mit sich, daß mindestens drei Abstandsbereiche unterschieden werden sollten, in denen der Grad der Durchmischung dieser Effekte verschieden ist. Wir unterscheiden

1. einen äußeren Bereich, in dem die Störungen durch die großen Himmelskörper (insbesondere Sonne und Mond) praktisch allein wirksam sind,
2. einen mittleren Bereich, in dem die von der Anisotropie des Erdpotentials herrührenden Störungseffekte mindestens von gleicher Größenordnung sind wie die Gravitationswirkungen fremder Körper,
3. einen inneren Bereich, in dem die bremsende Wirkung der Atmosphäre berücksichtigt werden muß oder gar dominiert.

Eine besondere Schwierigkeit besteht darin, daß diese Bereiche nicht streng voneinander trennbar sind, sondern sich breit überlagern. So hat sich längst herausgestellt, daß die ersten Versuche, aus den Bewegungen von Satelliten im inneren Bereich, d.h. aus der Änderung der Bahnelemente und der mittleren Geschwindigkeit infolge des Energieverlustes aus der Wechselwirkung mit den Teilchen der oberen Atmosphärenschichten, auf die Luftdichte als Funktion der Höhe über der Erdoberfläche zu schließen, durch bedeutende systematische Fehler entstellt gewesen sind, die durch Vernachlässigung der Störungen durch Mond, Sonne und Erdabplattung entstanden waren.

Die Aufgabe, durch saubere Trennung der Effekte verschiedener Herkunft zuverlässige Ergebnisse zu sichern, ist sehr verwickelt und noch keineswegs befriedigend gelöst. Besondere Schwierigkeit bereiten natürlich die atmosphärischen Einflüsse auf die Satellitenbewegung. Es genügt nicht, die Bremswirkung neutraler Luftteilchen auf die Geschwindigkeit des Satelliten abzuschätzen, also etwa die aus der Ballistik bekannten und auf der kinetischen

Gastheorie beruhenden Gesetzmäßigkeiten der Deformation von Geschoßbahnen durch den Luftwiderstand einfach auf die hier vorliegenden Verhältnisse zu übertragen. In der Ionosphäre und Exosphäre herrschen, wenn auch in sehr geringer Dichte, elektrisch geladene Teilchen mehr oder weniger vor. Der metallische Satellitenkörper, der sich mit der großen Geschwindigkeit von 8 km/s und mehr in diesen leitenden Schichten bewegt, wird selbst elektrostatisch aufgeladen sein. In ihm werden daher, wenn er die Kraftlinien des erdmagnetischen Feldes schneidet, Induktionsströme entstehen, die (wie aus Schätzungen bekannt ist) bei einem Satelliten von 100 cm Durchmesser in einem Feld, dessen Elektronen- bzw. Ionendichte etwa 10^6 Partikel/cm^3 beträgt, Stromstärken von einigen Milliampere erreichen können. Diese gewiß nicht sehr bedeutenden Ströme erzeugen aber doch eine merkliche JOULEsche Wärme auf Kosten der Bewegungsenergie des Satelliten. Eine solche elektromagnetische Bremswirkung (engl. „inductive drag") oder „elektromagnetische Viskosität" ist in gewissen Höhen durchaus mit der mechanischen Bremswirkung („neutral drag") durch neutrale Luftpartikeln vergleichbar und nimmt sogar, im Verhältnis zu dieser, mit der Größe des Satelliten zu; denn der neutrale „drag" ist dem Querschnitt des bewegten Körpers senkrecht zur Flugrichtung proportional, der elektromagnetische aber seinem Volumen.

Wie wichtig diese noch wenig erforschten Dinge sind, beweist am besten die von L. G. JACCHIA[1]) gemachte Entdeckung, daß bei einigen Satelliten (insbesondere Vanguard I und Sputnik III) auffallende Korrelationen zwischen den Schwankungen der Bahngeschwindigkeit und der 27tägigen Rotationsperiode der Sonne bestanden haben. Den großen Einfluß der Fluktuationen der solaren Korpuskularstrahlung auf die elektromagnetische Viskosität des widerstehenden Mittels und daher auch auf die Satellitenbewegung zeigte darüber hinaus die Beobachtung einer stoßartigen Bewegungsänderung des Sputnik III rund 24 h nach einem starken Strahlungsausbruch („flare") der Sonne am 7. Juli 1958, Erscheinungen, die zweifellos in kausalem Zusammenhang stehen.

Erwähnt werden müssen auch die Wirkungen des Lichtdrucks, die sich besonders bei Satelliten der „Echo"-Klasse bemerkbar machen, deren Oberfläche im Verhältnis zur Masse sehr groß ist. Echo I besitzt eine durch Gasentwicklung aufgeblasene, mit stark lichtreflektierendem Aluminiumbelag versehene ballonartige Hülle von 30 m Durchmesser. Obwohl die wenig exzentrische Bahn dieses Satelliten in etwa 1500 km Höhe verläuft, also durch atmosphärischen Widerstand kaum beeinflußt wird, normalerweise also eine fast unbegrenzte „Lebensdauer" haben würde, bewirkt der durch die große reflektierende Oberfläche begünstigte Strahlungsdruck eine merkliche „säkulare" Abnahme des mittleren Abstandes von der Erde: Der Strahlungsdruck wirkt um die Konjunktionsstellung zur Sonne herum distanzverringernd, während um die Opposition herum der Satellit lange Zeit im Erdschatten verweilt, so daß ein Ausgleich durch Abtrieb von der Erde nicht stattfinden kann.

Alle in den oberen Atmosphärenschichten beobachteten nicht gravitationsbedingten Störungen nehmen sehr rasch mit der Höhe ab und dürften schon im

---

[1]) L. G. JACCHIA, Nature (London) *183*, 526 und 1662 (1959).

Abstand von zwei Erdhalbmessern ($2R$) vom Erdmittelpunkt, also $1R \approx \approx 6370$ km über der Erdoberfläche, praktisch bis zur Bedeutungslosigkeit abgesunken sein (über das Verhalten von Satelliten im VAN-ALLEN-Gürtel fehlen allerdings noch gesicherte Daten). Viel weiter reichen die Einflüsse der Anisotropie des irdischen Gravitationsfeldes, aber auch sie nehmen rasch mit dem Abstand von der Erde ab. Das Hauptglied dieser Störung ist der vierten Potenz des reziproken Abstandes vom Erdmittelpunkt proportional, zeigt also bereits bei $R = 10$ nur noch den 10^4ten Teil seines Betrages an der Erdoberfläche selbst. Der nächstgrößere Term dieser Störung, der schon an der Erdoberfläche selbst sehr klein ist, nimmt mit der sechsten Potenz der Entfernung ab und ist daher nur in verhältnismäßig kleinen Distanzen merklich. Der Hauptterm ist allerdings auch in der Mondentfernung ($R = 60$) noch in einer geringfügigen periodischen Störung spürbar: So zeigt die Länge des Mondes eine Schwankung von der Periode des Knotenumlaufs, deren Amplitude nur deshalb den merklichen, wenn auch geringfügigen Betrag von etwa $7''\!.6$ erreicht, weil der Störungseffekt infolge der langen Dauer der Periode genügend Zeit hat, sich integrierend auszuwirken. Für die Theorie der Erdsatelliten, die eine so minutiöse Genauigkeit nicht verlangt, sind dagegen für $R > 10$ alle Effekte, die von der sphäroidähnlichen Gestalt des Erdkörpers herrühren, praktisch bedeutungslos. Jenseits dieser Grenze, die den mittleren vom äußeren der obengenannten drei Bereiche trennt, werden also alle Bewegungen der künstlichen Raumkörper genau genug durch die Differentialgleichungen der klassischen Himmelsmechanik beschrieben, in der alle gravitierenden Körper, die Erde nicht ausgenommen, als Massenpunkte angesehen werden dürfen.

187. *Die Gestalt des Gravitationspotentials des Erdkörpers*

Die Frage nach der Gestalt des Potentialfeldes der von ausgedehnten Himmelskörpern auf „Aufpunkte" außerhalb ihrer Begrenzung ausgeübten Gravitationskraft ist bereits in Abschnitt 28 angeschnitten und teilweise beantwortet worden, nämlich für Planeten von sphäroidischem Aufbau mit kleiner Abplattung, so daß der Hauptanteil der Potentialfunktion durch das radialsymmetrische Potential einer homogen geschichteten Kugel gegeben ist, das sich so verhält, als sei die Gesamtmasse in ihrem Mittelpunkt vereinigt.

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem, dessen Ursprung im Massenmittelpunkt des Planeten liegt und dessen xy-Ebene mit der Ebene des Äquators, dessen z-Achse mit der Rotationsachse zusammenfällt, seien x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten, m die Masse eines im Aufpunkt befindlichen Massenpunktes, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ sein Radiusvektor, $\beta = \arcsin(z/r)$ seine Deklination. Dann läßt sich die Potentialfunktion, wie in Abschnitt 28 bewiesen, in eine Reihe entwickeln, deren erste Glieder durch (III; 100),

$$\text{(XXII; 1)} \qquad U = k^2 \frac{mM}{r}\left[1 + \frac{C-A}{2Mr^2}(1 - 3\sin^2\beta) + \cdots\right],$$

dargestellt werden, wenn M die Gesamtmasse des Planeten und C, A seine Trägheitsmomente in bezug auf die Rotationsachse bzw. eine in der Äquatorebene liegende, durch den Massenmittelpunkt gehende Achse bedeuten.

Da M, C, A Konstanten sind, ist U nur von r und dem Betrag von β bzw. von $\sin^2\beta$ abhängig. Bei sphäroidischen Planeten mit geringer Abplattung ist $C - A$ positiv und gegen M klein. Man kann (XXII; 1) auch in der Form

$$U = \frac{\varkappa^2}{r}\left[1 - J_2\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_2(\sin\beta) + \cdots\right] \tag{XXII; 2}$$

schreiben, wo J_2 eine vom Massenaufbau des Planeten abhängige kleine Konstante, a den Äquatorhalbmesser bezeichnen und

$$P_2(\sin\beta) = \frac{1}{2}(3\sin^2\beta - 1)$$

das LEGENDREsche Polynom zweiter Ordnung mit dem zwischen den Grenzen ± 1 eingeschlossenen Argument $\sin\beta$ darstellt. Die Formel (XXII; 2) erweist sich als Spezialfall einer allgemeineren Entwicklung von U nach LEGENDREschen Polynomen (zonalen Kugelfunktionen) der Form

$$U = \frac{\varkappa^2}{r}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\left(\frac{a}{r}\right)^n P_n(\sin\beta)\right], \qquad (\varkappa^2 = k^2 mM), \tag{XXII; 3}$$

in der C_n $(C_2 = -J_2)$ wiederum Funktionen der Massenverteilung und P_n die LEGENDREschen Funktionen

$$\left\{\begin{aligned} P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\ P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{XXII; 4}$$

mit dem Argument $x = \sin\beta$ bedeuten. Daß (XXII; 3) tatsächlich die allgemeinste Form der Potentialfunktion eines rotationssymmetrisch aufgebauten Körpers wiedergibt, folgt aus (III; 96),

$$U = k^2 m \int\limits_{(K)} \frac{dm'}{r'} = \varkappa^2 \int\limits_{(K)} \frac{dm'}{Mr'}, \qquad (\varkappa^2 = k^2 mM), \tag{XXII; 5}$$

wo dm' ein Massenelement des Körpers K und r' dessen Abstand vom Aufpunkt bezeichnet. Sind x', y', z' die rechtwinkligen Koordinaten dieses Massen-

elementes und ist φ der Winkel, den die vom Planetenschwerpunkt aus nach dem Aufpunkt und dm' führenden Strahlen miteinander bilden, so ist offenbar

$$\frac{1}{r'} = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{-1/2} = \frac{1}{r}\left[1 - 2\frac{r'}{r}\cos\varphi + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right]^{-1/2},$$

und man kann diesen Ausdruck in die nach LEGENDREschen Polynomen fortschreitende Reihe

$$\text{(XXII; 6)} \quad \frac{1}{r'} = \frac{1}{r}\left[1 + \frac{r'}{r}P_1(\cos\varphi) + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 P_2(\cos\varphi) + \cdots\right]$$

entwickeln. Es ist dann nur noch zu zeigen, daß unter den angenommenen Verhältnissen (rotationssymmetrische Verteilung der Massen im Innern des Körpers K) das Integral (XXII; 5) in eine Reihe von der Form (XXII; 3) übergeht.

An der planetozentrischen Sphäre seien (Abb. 76) P, Q, Z die sphärischen Örter des Aufpunktes, des Massenelementes dm' und des Rotationspols. Dann wird der in (XXII; 6) eingeführte Winkel φ durch den Bogen $\widehat{PQ}$ dargestellt, und es sind β, β' die Deklinationen oder, besser gesagt, die planetozentrischen Breiten von P und Q, während λ den Unterschied ihrer Längen bezeichnet. Nach dem Kosinussatz im sphärischen Dreieck ZPQ ist dann das Argument der LEGENDREschen Polynome in (XXII; 6)

$$\cos\varphi = \sin\beta\sin\beta' + \cos\beta\cos\beta'\cos\lambda.$$

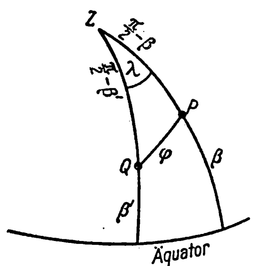


Abb. 76. Örter zweier Richtungen (P = Aufpunkt, Q = Massenelement) an der geozentrischen Sphäre

Schreibt man nun die Terme von (XXII; 6) in der Form

$$\frac{1}{r^{2n}}(r r')^n P_n(\cos\varphi)$$

und setzt

$$r\sin\beta = z; \quad r'\sin\beta' = z',$$

$$\varrho = r\cos\beta = \sqrt{r^2 - z^2}; \quad \varrho' = r'\cos\beta' = \sqrt{r'^2 - z'^2},$$

so kann man in den ersten Termen dieser Entwicklung

$$r r' P_1(\cos\varphi) = z z' + \varrho\varrho'\cos\lambda,$$

$$(r r')^2 P_2(\cos\varphi) = \frac{1}{2}[3(z z' + \varrho\varrho'\cos\lambda)^2 - (r r')^2],$$

$$(r r')^3 P_3(\cos\varphi) = \frac{1}{2}[5(z z' + \varrho\varrho'\cos\lambda)^3 - 3(r r')^2(z z' + \varrho\varrho'\cos\lambda)],$$

. . . .

setzen. Diese Ausdrücke lassen sich leicht nach den Kosinus der Vielfachen von λ entwickeln. Da nun vorausgesetzt wurde, daß die Massenverteilung rotationssymmetrisch ist, wird das Integral (XXII; 5) von λ unabhängig sein,

und die Integration, bei der die dem Aufpunkt zugehörigen Größen z, r, ϱ als Konstanten gelten, braucht sich also nur über die von $\cos\lambda, \cos 2\lambda, \ldots$ freien Terme zu erstrecken.

So ergibt das Integral des ersten Terms,

$$\frac{1}{r^2}\int r\,r' P_1\,dm' = \frac{z}{r^2}\int z'\,dm' = \frac{1}{r}\sin\beta\int z'\,dm',$$

einen Ausdruck, der mit dem Glied erster Ordnung in (XXII; 3),

$$C_1\frac{a}{r}P_1(\sin\beta),$$

übereinstimmt, wenn man

$$C_1 = \frac{1}{M\,a}\int z'\,dm'$$

setzt. Diese Konstante ist aber offenbar Null, wenn der Koordinatenursprung im Massenmittelpunkt des Planeten angenommen wird, der ja durch die Bedingungen

$$\int x'\,dm' = \int y'\,dm' = \int z'\,dm' = 0$$

definiert ist. Man wird aber im allgemeinen von Null verschiedene Werte C_1 erhalten, wenn man den Koordinatenursprung in den geometrischen Mittelpunkt des (sphäroidähnlich geformten) Planeten verlegt, der mit dem Massenmittelpunkt nicht zusammenzufallen braucht. Für die Erde darf man immer $C_1 = 0$ setzen, da aus geodätischen Untersuchungen (insbesondere aus Schweremessungen) gefolgert werden kann, daß die beiden Zentren um nicht mehr als 0.2 km voneinander entfernt sind. Das ist so wenig, daß es selbst für erdnahe Satelliten praktisch belanglos ist, ob man den dynamischen oder den geometrischen Mittelpunkt der Erde als Koordinatenanfang wählt.

Das Integral des zweiten Terms liefert, wenn man die periodischen Glieder fortläßt,

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^4}\int (r\,r')^2 P_2\,dm' &= \frac{1}{2r^4}\int\left[3(z\,z')^2 + \frac{3}{2}(\varrho\,\varrho')^2 - (r\,r')^2\right]dm' =\\ &= \frac{1}{2r^4}\int\left[3(z\,z')^2 + \frac{3}{2}(r^2 - z^2)(r'^2 - z'^2) - (r\,r')^2\right]dm' =\\ &= \frac{1}{2r^4}\left(\frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}r^2\right)\int (3z'^2 - r'^2)\,dm' =\\ &= \frac{1}{2r^2}P_2(\sin\beta)\int 2r'^2 P_2(\sin\beta')\,dm' = C_2\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_2(\sin\beta).\end{aligned}$$

Dies ist aber mit dem zweiten Term von (XXII; 3) identisch, wenn

$$C_2 = \frac{1}{2M\,a^2}\int (3z'^2 - r'^2)\,dm' = \frac{1}{2M\,a^2}\int (2z'^2 - x'^2 - y'^2)\,dm'$$

gesetzt wird. Führt man nach (III; 99) die Hauptträgheitsmomente A, $B = A$ und C ein, so ist

$$\int (2z'^2 - x'^2 - y'^2)\, dm' = 2(A - C),$$

also

$$C_2 = -J_2 = -\frac{C-A}{M a^2},$$

übereinstimmend mit (III; 100).

Entsprechende Umformungen lassen sich für die nächsthöheren Terme nach dem hier angedeuteten Verfahren leicht durchführen. Für zur Äquatorebene symmetrische Massenverteilungen verschwinden alle Terme ungerader Ordnung. Für die Erde ist das, wie die im nächsten Abschnitt zu beschreibenden Untersuchungen an Satelliten gezeigt haben, nicht ganz der Fall. Es ergibt sich vielmehr ein geringer Massenunterschied zwischen beiden Halbkugeln, der zu kleinen Termen dritter (und vielleicht auch fünfter) Ordnung in der Entwicklung des Gravitationspotentials der Erde Anlaß gibt.

Die Koeffizienten der geraden Terme dieser Entwicklung bis zur vierten Ordnung einschließlich lassen sich auch aus geodätischen Untersuchungen (Messungen der Schwerebeschleunigung) bestimmen. Diese gravimetrischen Werte leiden allerdings darunter, daß eine sichere Ausgleichung der an zahlreichen Stellen der Erdoberfläche vorgenommenen Messungen schwierig und ungenau ist, da die Meßpunkte sehr ungleichmäßig verteilt sind und in weit ausgedehnten Bereichen ganz fehlen. Die gemessene Schwerebeschleunigung enthält zudem lokale Anomalien, die von der sehr ungleichförmigen Massenverteilung in der Erdrinde herrühren und deren Eliminierung ohne hypothetische Annahmen über eine von diesen Anomalien freie Normalgestalt des Erdkörpers (die man gewöhnlich als die eines Rotationsellipsoids mit der Abplattung 1 : 297 ansieht) nicht möglich ist. Die Bestimmung der Gestalt der Potentialflächen durch Beobachtung von erdnahen Satellitenbahnen ist von solchen Annahmen weitgehend frei und kann daher zur Kontrolle und Verbesserung der geodätischen Ergebnisse sowie zur Korrektion der ihnen zugrunde gelegten Hypothesen dienen.

Immerhin lassen die aus der Geodäsie bekannten Daten eine bereits ziemlich genaue Abschätzung der Beträge der Glieder zweiter und vierter Ordnung zu, wie nachstehend gezeigt werden soll. Angenommen, die Potentialfunktion $U(r)$ ist rotationssymmetrisch und symmetrisch zur Äquatorebene. Dann kann man sie, wenn man den Ausdruck (XXII; 5) mit Um statt U bezeichnet, in der Form

$$U = \frac{U_0}{r} + \frac{U_2}{r^3} P_2(\sin\beta) + \frac{U_4}{r^5} P_4(\sin\beta) + \cdots \tag{XXII; 7}$$

schreiben, wo β die geozentrische Breite des Aufpunktes bedeutet. Die Schwerebeschleunigung an einem Aufpunkt mit den Koordinaten r, β wird dann hinreichend genau durch

$$g(r, \beta) = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{U_0}{r^2} + 3\frac{U_2}{r^4} P_2(\sin\beta) + 5\frac{U_4}{r^6} P_4(\sin\beta) + \cdots$$

dargestellt. Speziell kann man der Funktion $g(r, \beta)$ auch diejenigen Werte zuschreiben, die auf einem Punkt (r, β) der Erdoberfläche gemessen wurden, nachdem man sie von den lokalen Anomalien und von der Wirkung der Zentrifugalkraft (die auf der rotierenden Erde die Schwerebeschleunigung vermindert) befreit hat. Schreibt man statt (XXII; 7)

$$G(r, \beta) = r^2 g = U_0 + 3 \frac{U_2}{r^2} P_2(\sin\beta) + 5 \frac{U_4}{r^4} P_4(\sin\beta) + \cdots,$$

so hat G die Dimension $\mathrm{cm^3\, s^{-2}}$ und U_n die Dimension $\mathrm{cm}^{n+3}\,\mathrm{s}^{-2}$.

Für eine kugelförmige Erde ist $U_2 = U_4 = \cdots = 0$, für den nur wenig abgeplatteten Erdkörper wird die sphäroidische Deformation der Potentialflächen hauptsächlich durch das Glied zweiter Ordnung dargestellt werden, während der Term mit U_4 dagegen stark zurücktritt. Wählen wir also $\beta = \beta_1$ speziell so, daß

$$P_2(\sin\beta_1) = \frac{1}{2}(3\sin^2\beta_1 - 1) = 0$$

ist, d.h., setzen wir $\sin^2\beta_1 = 1/3$, $\beta_1 = 35°\, 15'\!.9$, so wird man das Hauptglied U_0, bis auf eine kleine Korrektion, schon erhalten, wenn man die mittlere Schwerebeschleunigung für die geozentrische Breite β_1 bzw. für die ihr entsprechende geographische Breite $\varphi_1 = \beta_1 + 10'\!.9 = 35°\, 26'\!.8$ kennt.

Aus der international in Stockholm (1930) festgesetzten Schwereformel, die seither durch neuere Untersuchungen (insbesondere von H. JEFFREYS) nur unbedeutende Korrektionen erfahren hat,

$$g = g_0(1 + \gamma_1 \sin^2\varphi + \gamma_2 \sin^2 2\varphi),$$
$$g_0 = 978.0490\ \mathrm{cm\, s^{-2}}; \quad \gamma_1 = 0.0052884, \quad \gamma_2 = -59 \cdot 10^{-7},$$

entnimmt man für $\varphi = \varphi_1$

$$g_1 = 979.7844\ \mathrm{cm\, s^{-2}}.$$

Dieser Wert ist noch von der Zentrifugalbeschleunigung

$$z = -3.3917 \cos\beta \cos\varphi\ \mathrm{cm\, s^{-2}}$$

zu befreien, so daß schließlich

$$g_1 = 982.0405\ \mathrm{cm\, s^{-2}}$$

zu setzen ist. Nimmt man nun als ausgeglichene Gestalt der Erdoberfläche im Meeresniveau ein Rotationsellipsoid mit den HAYFORDschen Abmessungen

Äquatorhalbmesser . . . . $r_0 = 6.378388 \cdot 10^8$ cm,

Polarhalbmesser . . . . $r_2 = 6.356936 \cdot 10^8$ cm

an, so wird für $\beta = \beta_1$

$$r_1 = r_2 \sqrt{\frac{3r_0^2}{r_0^2 + 2r_2^2}} = 6.371217 \cdot 10^8\ \mathrm{cm}.$$

Vernachlässigt man also die kleine Korrektion vierter Ordnung, so erhält man[1])

$$U_0 = g_1 r_1^2 = 3.986339 \cdot 10^{20} \text{ cm s}^{-2} = 398.6339 \text{ Mm}^3 \text{ ks}^{-2}.$$

Genauer bestimmt man U_0, U_2, U_4 aus den bekannten Werten r, G für $\beta_0 = 0°, \beta_1 = \arcsin(1/\sqrt{3}), \beta_2 = 90°$. Es ist dann

$$\begin{aligned} G_0 &= U_0 - \frac{3}{2}\frac{U_2}{r_0^2} + \frac{15}{8}\frac{U_4}{r_0^4}, \\ G_1 &= U_0 \qquad\qquad - \frac{35}{18}\frac{U_4}{r_1^4}, \\ G_2 &= U_0 + 3\frac{U_2}{r_2^2} + 5\frac{U_4}{r_2^4} \end{aligned}$$

oder, mit den entsprechenden numerischen Werten,

$$\begin{aligned} 399.2879 &= U_0 - 0.036870\,U_2 + 0.0011328\,U_4, \\ 398.6339 &= U_0 \qquad\qquad\quad - 0.0011801\,U_4, \\ 397.3259 &= U_0 + 0.074238\,U_2 + 0.0030618\,U_4. \end{aligned}$$

Aus diesen linearen Gleichungen ermittelt man

$$\begin{aligned} U_0 &= 398.6373 \text{ Mm}^3 \text{ ks}^{-2}, \\ U_2 &= -17.675 \text{ Mm}^5 \text{ ks}^{-2}, \\ U_4 &= +\ 1.0 \text{ Mm}^7 \text{ ks}^{-2}. \end{aligned}$$

Andererseits haben sich aus Satellitenbeobachtungen (insbesondere von Vanguard I, der für diese Zwecke besonders geeignet war, da er sich in großer Höhe – zwischen 652 und 3965 km über der Erdoberfläche – bewegt) auf Grund der Untersuchungen von Jacchia, King-Hele und Kozai[2]) die Werte

$$\text{(XXII; 8)} \qquad \left\{ \begin{aligned} U_0 &= 398.618 \pm 0.003 \text{ Mm}^3 \text{ ks}^{-2}, \\ U_2 &= -17.555 \pm 0.001 \text{ Mm}^5 \text{ ks}^{-2}, \\ U_4 &= +\ 1.12 \pm 0.04 \text{ Mm}^7 \text{ ks}^{-2} \end{aligned} \right.$$

ergeben.[3]) Die kleinen mittleren Fehler dieser Zahlen und die Tatsache, daß die oben abgeleiteten gravimetrischen Werte (obwohl sie größenordnungsmäßig ausgezeichnet ins Bild passen) doch merklich außerhalb der Grenzen der inneren Genauigkeit der astronomischen liegen, unterstreichen die Zuverlässigkeit der letzteren. Es mag noch hinzugefügt werden, daß außer diesen Termen noch der ungerade

$$U_3 = +0.25 \pm 0.03 \text{ Mm}^6 \text{ ks}^{-2}$$

---

[1]) Um die hohen Zehnerpotenzen zu vermeiden, führt man statt Zentimeter und Sekunde die Maßeinheiten 1 Mm (Megameter) = 10^6 m = 10^8 cm und 1 ks (Kilosekunde) = 10^3 s ein. Es wäre dann auch $g_1 = 9.8204$ Mm ks^{-2}.

[2]) J. A. O'Keefe, A. Eckels und R. K. Squires, A.J. *64*, 245 (1959).

[3]) $U_0 = k^2 M$ wird nicht aus der Satellitenbahn bestimmt, sondern mit Hilfe der Mondbewegung, aus der die Erdmasse M sehr genau abgeleitet werden kann.

gefunden wurde, während ein Versuch zur Bestimmung von U_5 keinen überzeugenden Erfolg hatte, da der mittlere Fehler größer war als der Betrag der gefundenen Größe selbst.

Es mag überraschen, daß schon nach verhältnismäßig kurzer Zeit so klare und vertrauenswürdig erscheinende Ergebnisse aus Satellitenbeobachtungen erzielt werden konnten. Aber die Umlaufszeiten dieser künstlichen Himmelskörper sind sehr kurz und liegen im allgemeinen zwischen $1^1/_2$ und $2^1/_2$ h (die Umlaufszeit von Vanguard I betrug nach dem Start 134 min). Schon in wenigen Monaten hat also ein solcher Satellit einige tausend Umläufe vollendet, so daß man dessen Bahneigenschaften, insbesondere die langperiodischen und säkularen Störungen, schon nach sehr viel kürzerer Zeit aus Beobachtungen kennenlernt, als dies bei den langsam bewegten großen Planeten der Fall ist. Für die Ermittlung der Störungen durch die Anisotropie des Erdfeldes ist es vorteilhaft, daß die Satellitenbahnen meist große Neigungen gegen die Äquatorebene haben. Sie tasten also gewissermaßen das von der Breite abhängige Potentialfeld beständig ab.

Es ist versucht worden, die Frage zu klären, ob auch eine Potentialanisotropie in Abhängigkeit von der geographischen *Länge* besteht. Das würde bedeuten, daß die Form des Geoids besser durch ein dreiachsiges Ellipsoid als durch einen Rotationskörper dargestellt wird oder daß die beiden äquatorealen Trägheitsmomente A und B voneinander verschieden sind. Von den Geophysikern ist eine solche, wenn auch geringfügige, „Elliptizität des Erdäquators" schon lange für wahrscheinlich gehalten worden. Neuere gravimetrische Messungen haben diese Vermutung bestätigt, wenn auch die Genauigkeit der erzielten Ergebnisse unbefriedigend gewesen ist. Auch hier haben sich Satellitenbeobachtungen als nützlich erwiesen. Allgemein wird man, um auch die Längenabhängigkeit der Potentialfunktion in Rechnung zu stellen, $U = U(r, \beta, \lambda)$ nach zonalen *und* tesseralen Kugelfunktionen entwickeln und den Ansatz

$$\frac{1}{m} U = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P_{n,m}(\sin\beta) \{A_{n,m} \cos m\lambda + B_{n,m} \sin m\lambda\}$$

an die Stelle der Formel (XXII; 3) treten lassen müssen, in die dieser Ausdruck wieder übergeht, wenn man alle Koeffizienten mit $m > 0$ gleich Null setzt und $P_{n,0} = P_n$ als abgekürzte Bezeichnung für die zonalen, d.h. nur von der Breite abhängigen, Kugelfunktionen einführt. Zur Bestimmung einer Elliptizität des Äquators genügt es, in dem obigen Ansatz außer den Koeffizienten $A_{n,0}$ der zonalen Glieder noch die der sektoralen Glieder $A_{2,2}$ und $B_{2,2}$ als von Null verschiedene Größen anzunehmen.

Die Bestimmung der Elliptizität des Erdäquators aus gravimetrischen Messungen ergab für den Unterschied zwischen dem größten und dem kleinsten Äquatorhalbmesser,

$$a\varepsilon = a - a(1 - \varepsilon),$$

Werte, die zwischen $\varepsilon = 5.4 \cdot 10^{-5}$ (Heiskanen 1924) und $2.1 \cdot 10^{-5}$ (Uotila 1957) schwanken, während man für die geographische Länge λ_0 der großen

Achse der Äquatorellipse Werte zwischen $-17°$ (HELMERT) und $+18°$ (HEISKANEN) erhielt. H. JEFFREYS (1959) nahm als wahrscheinlichste Werte $\varepsilon = (2.5 \pm 0.9)\, 10^{-5}$, $\lambda_0 = 0°$, KAULA (1959) $\varepsilon = 3.7 \cdot 10^{-5}$, $\lambda_0 = -20{,}^\circ 8$ an, während M. F. SUBBOTIN im dritten Band seines „Course of Celestial Mechanics" (1949) angesichts der ziemlich weiten Streuung dieser Zahlen den runden Wert $\varepsilon = 1 : 30000$ bevorzugte.

Erste Versuche, die Größen ε und λ_0 durch Satellitenbeobachtungen genauer einzuschätzen, sind seit 1957 mehrfach unternommen worden, unter anderem von O'KEEFE (1957), P. MUSEN (1960) und I.G. IZSAK (1961). Der letztgenannte Autor[1]) findet aus Beobachtungen der Satelliten Vanguard II (1959 α 1) und Vanguard III (1959 η), deren Bahnen in so großer Höhe verlaufen (Perigäumsdistanz von der Erdoberfläche >500 km), daß die Störungen durch den atmosphärischen Widerstand nur klein sind, in guter Übereinstimmung

$$\varepsilon = (3.21 \pm 0.29) \cdot 10^{-5}; \quad \lambda_0 = -33{,}^\circ 15 \pm 0{,}^\circ 53.$$

Die Abplattung des Erdäquators, die diesem Ergebnis zufolge recht gut durch den SUBBOTINschen runden Wert $^1/_3 \cdot 10^{-4}$ dargestellt wird, ist demnach etwa hundertmal kleiner als die der Meridianellipse. Der Unterschied der beiden Halbachsen der Äquatorellipse beträgt $a\,\varepsilon = 6378$ km : 30000 = 0.21 km. Besonders bemerkenswert ist die anscheinend sehr genaue astronomische Bestimmung von λ_0, während die gravimetrischen Ergebnisse sehr weit streuen.

Zu diesen ersten Resultaten einer Bestimmung von Koeffizienten der tesseralen Terme des Erdpotentials muß noch bemerkt werden, daß sie keineswegs unter optimalen Bedingungen erzielt worden sind. Infolge der raschen Bewegung des Satelliten über die Längengrade der Erde hinweg werden die sehr kleinen periodischen Effekte, die von der Äquatorabplattung herrühren, durch Integration stark verwischt. Das gleiche ist natürlich auch für die zonalen Glieder der Fall, doch bleiben diese wegen ihrer relativ großen Beträge trotz dieses Glättungseffektes deutlicher erkennbar. Was die längenabhängigen Störungseffekte anbelangt, so werden sie zudem weniger die Positionen des Satelliten als die Zeiten verändern, zu denen diese Positionen erreicht werden; ihre Analyse erfordert also bei der großen Geschwindigkeit, mit der sich diese Himmelskörper, vom Standpunkt des Beobachters aus gesehen, bewegen, außerordentlich genaue Zeitmessungen. Sehr viel günstigere Bedingungen für eine solche Untersuchung würden Satelliten darbieten, deren mittlerer Erdabstand so bemessen ist, daß die Umlaufsperiode ganz oder nahezu mit der Rotationsperiode der Erde übereinstimmt, die gleich einem Sterntag ist. Ein solcher „stationärer Satellit", der eine Kreisbahn in der Äquatorebene der Erde beschreibt, hätte einen konstanten geozentrischen Abstand von 42164 km oder eine Höhe von 35786 km über einem Punkt des Äquators und würde, von irgendeinem Beobachtungsort aus gesehen, stets in der gleichen Position (nach Azimut und Höhe) erscheinen. Die zonalen Terme des Erdpotentials hätten auf seine Bewegung keinen Einfluß, aber die tesseralen würden zu langperiodischen Librationen um den mittleren Ort führen, die leicht und genau zu beobachten wären

---

[1]) I. G. IZSAK, A.J. *66*, 226 (1961).

und aus denen man die Koeffizienten der tesseralen Terme (auch höherer Ordnung) mit großer Genauigkeit müßte bestimmen können. Allerdings würde ein solcher Körper beträchtlichen außerirdischen Störungen, insbesondere durch den Mond, unterworfen sein, die eine Stabilität seiner Bahn in Frage stellen. Das bisher schon mehrfach unternommene Experiment, einen stationären Satelliten („Syncom" I—III) in die erforderliche Umlaufsbahn zu bringen, wird sehr zur Vervollständigung und Sicherung unserer Kenntnisse von der Gestalt des Erdpotentials beitragen (s. auch Abschnitt 191).

188. *Bewegung eines Satelliten im anisotropen Gravitationsfeld der Erde*

Die Theorie der Bewegung eines Satelliten im Gravitationsfeld eines nicht kugelförmig-symmetrisch aufgebauten Planeten ohne Berücksichtigung eines etwa vorhandenen atmosphärischen Widerstandes und der Gravitationswirkung anderer Himmelskörper wird auch als das Hauptproblem der Satellitenbewegung bezeichnet, da die Bewegung in größeren Abständen vom Planeten, in denen dieser als Massenpunkt angesehen werden darf, mit den Methoden der klassischen Himmelsmechanik allein untersucht werden kann. Die Lösungen dieses Hauptproblems, angewandt auf künstliche Erdsatelliten, werden die wirklichen Bewegungen dieser Körper annähernd richtig in dem mittleren der drei in Abschnitt 186 definierten Bereiche wiedergeben, in jenen Abständen von der Erde also, in denen atmosphärische Störungen keine oder nur eine untergeordnete Rolle spielen (etwa oberhalb 1000 km über der Erdoberfläche) und in denen die Störungen durch Sonne und Mond klein gegen die von der Anisotropie des Erdfeldes herrührenden Einflüsse sind. Die obere Grenze dieses Bereichs liegt, wie schon erwähnt, etwa bei $R = 10R_0$, wenn $R_0 = 6371$ km den mittleren Halbmesser der Erde bedeutet.

Die maximale Beschleunigung, die ein Körper auf oder wenig über der Erdoberfläche durch den Mond erleidet, beträgt relativ zur Erde

$$g_{☾} = k^2 m\left(\frac{1}{(r-R)^2} - \frac{1}{r^2}\right) = k^2 m \frac{2rR - R^2}{r^2(r-R)^2} \approx 2k^2 m \frac{R_0}{r^3},$$

wenn $R = R_0 + h$ (Erdradius + Höhe) die Entfernung vom Erdmittelpunkt, $r \approx 60R_0$ den (mittleren) Erdabstand des Mondes und m dessen Masse bedeuten. Andererseits beträgt die Beschleunigung desselben Körpers durch die Schwerkraft der Erde, wenn $M = 81m$ die Erdmasse bezeichnet,

$$g = k^2 \frac{M}{R^2} \approx 81 k^2 \frac{m}{R_0^2} = 982 \text{ cm s}^{-2}.$$

Setzt man also $k^2 m = {}^{982}/_{81} R_0^2 \text{ cm s}^{-2}$, so folgt maximal

$$g_{☾} \approx 2 \cdot \frac{982}{81}\left(\frac{R_0}{r}\right)^3 \text{cm s}^{-2} \approx \frac{1964}{81 \cdot 60^3} \text{cm s}^{-2} = 1.12 \cdot 10^{-4} \text{ cm s}^{-2}.$$

Die Beschleunigung durch die Sonne, deren Masse rund $^1/_3 \cdot 10^6$ Erdmassen und deren Entfernung 23465 Erdradien beträgt, errechnet man auf dieselbe Weise zu

$$g_\odot = 1964 \cdot \frac{10^6}{3 \cdot 23465^3} = 0.51 \cdot 10^{-4} \,\mathrm{cm\,s^{-2}}.$$

Beide Größen ändern sich innerhalb mäßiger Abstände von der Erde etwa proportional dem Abstand; ihre Summe beträgt für $R = nR_0$ maximal etwa $1.73 \cdot 10^{-4} n \,\mathrm{cm\,s^{-2}}$.

Andererseits sind, wenn im folgenden r den geozentrischen Abstand des Aufpunkts und R den Erdhalbmesser bezeichnet, die Beträge der Beschleunigungen infolge der Terme zweiter und vierter Ordnung des Erdpotentials im Abstand $r = nR$ vom Erdmittelpunkt

$$g_2 = 3 \cdot \frac{17.555}{r^4} = \frac{52.665}{n^4 R^4} \,\mathrm{Mm^5\,ks^{-2}} = \frac{3.2}{n^4} \,\mathrm{cm\,s^{-2}},$$

$$g_4 = 5 \cdot \frac{1.22}{r^6} = \frac{6.1}{n^6 R^6} \,\mathrm{Mm^7\,ks^{-2}} = \frac{0.009}{n^6} \,\mathrm{cm\,s^{-2}}.$$

Das bedeutet, daß erst für $n > 7$ die Störungen durch Mond und Sonne zusammengenommen die Beschleunigung g_2 überwiegen, während dies für g_4 schon für $n = 2$ der Fall ist, so daß man zur Bestimmung dieses Terms nur Satelliten benutzen sollte, deren mittlerer Erdabstand kleiner als $2R$ ist.

Wir werden uns bei der Lösung des Hauptproblems zunächst auf den Einfluß des Hauptterms g_2 beschränken, setzen also für die Potentialfunktion nach (XXII; 3) den Ausdruck

$$\text{(XXII; 9)} \qquad U = \frac{\mu}{r}\left[1 + C_2\left(\frac{R}{r}\right)^2\left(\frac{3}{2}\sin^2\beta - \frac{1}{2}\right)\right], \qquad (\mu = \varkappa^2 = k^2 M)$$

an, wo[1]) $C_2 = -0.001085$ eine dimensionslose Konstante bedeutet.

Die Bewegung des Satelliten beschreiben wir durch die DELAUNAYschen Differentialgleichungen (XV; 72)

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial F}{\partial l}; \quad \frac{dG}{dt} = \frac{\partial F}{\partial g}; \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial F}{\partial h},$$

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L}; \quad \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial G}; \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial H},$$

wo

$$F = \frac{\mu^2}{2L^2} + \left(U - \frac{\mu}{r}\right) = F_0 + F_1$$

---

[1]) Nach (XXII; 7, 8) ist $C_2 R^2 \mu = C_2 R^2 \cdot 398.62 \,\mathrm{Mm^3\,ks^{-2}} = -17.555 \,\mathrm{Mm^3\,ks^{-2}}$, woraus mit $R = 6.371$ der obige Wert folgt. In der Literatur findet man häufig die Bezeichnung $J_2 = -C_2$, die aber leicht zu Verwechslungen mit den BESSELschen Funktionen führt.

die HAMILTONsche Funktion bedeutet, $F_1 = U - \mu/r$ die durch die Anisotropie des Feldes bedingten Störungsterme zusammenfaßt und

$$L = \varkappa \sqrt{a} = \sqrt{\mu a}; \quad G = L\sqrt{1 - e^2}; \quad H = G \cos i,$$
$$l = M = n(t - T); \quad g = \omega; \quad h = \Omega$$

die DELAUNAYschen Variablen als Funktionen der oskulierenden Kegelschnittselemente $a, e, i, T, \omega, \Omega$ bedeuten. Für einen kugelförmig-symmetrisch aufgebauten Planeten $(F = F_0)$ sind alle DELAUNAYschen Elemente konstant außer l, für das sich

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{\partial F_0}{\partial L} = \frac{\mu^2}{L^3} = \frac{\varkappa}{a^{3/2}} = n; \quad l = n\,t + \text{const}$$

ergibt. Andernfalls ist

$$F = F_0(L) + F_1(L, G, H; l, g),$$

d.h., F enthält die Variable h nicht. Nach (IV; 13) ist nämlich

$$z = r \sin\beta = r \sin u \sin i; \quad u = \omega + v,$$

also

$$\sin^2\beta = \frac{1}{2}\sin^2 i(1 - \cos 2u).$$

Daraus folgt aber

$$F_1 = \frac{\mu C_2 R^2}{r^3}\left[\frac{3}{4}\sin^2 i(1 - \cos 2u) - \frac{1}{2}\right] =$$
$$= -\frac{\mu C_2 R^2}{a^3}\left[\frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3}(3\cos^2 i - 1) + \frac{3}{4}\frac{a^3}{r^3}\cos 2u(1 - \cos^2 i)\right]$$

oder, wegen $\mu/a^3 = \mu^4/L^6$, $\cos^2 i = H^2/G^2$,

$$F_1 = -\frac{\mu^4 C_2 R^2}{L^6}\left[\frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3}\left(3\frac{H^2}{G^2} - 1\right) + \frac{3}{4}\frac{a^3}{r^3}\cos 2u\left(1 - \frac{H^2}{G^2}\right)\right].$$

Ferner (s. Anhang VI) gelten die Entwicklungen

$$(\text{XXII}; 10)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{a}{r}\right)^3 = (1 - e^2)^{-3/2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k \cos kM = \dfrac{L^3}{G^3} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k \cos k\,l, \\ \left(\dfrac{a}{r}\right)^3 \cos 2u = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} q_k \cos(2\omega + kM) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} q_k \cos(2g + k l), \quad q_0 = 0, \end{cases}$$

in der die Größen p_k, q_k nach Potenzen der Exzentrizität e entwickelbar, also auch Funktionen von $\sqrt{1 - e^2} = G/L$ sind. F_1 ist daher von h frei, und es gilt $dH/dt = 0$ oder

$$H = \varkappa\sqrt{p}\cos i = \text{const}, \quad [p = a(1 - e^2)].$$

Außer dem Energiesatz $F = \text{const}$, der erfüllt ist, da F die Zeit nicht explizite enthält, gilt also hier als zweites Integral der Flächensatz (V; 7) für die in der Äquatorebene liegende Komponente der Bewegung. Für einen Satelliten,

der sich in der Äquatorebene selbst bewegt ($i = 0$), gilt dieser Satz also ohne Einschränkung, was auch unmittelbar einzusehen ist, da es sich dann um eine Zentralbewegung handelt.

Die Lösung des Hauptproblems, das ja eine aktuelle Bedeutung erlangt hat, ist in der neueren Literatur auf verschiedene Weise angestrebt worden. Für die theoretische Lösung im Sinne der allgemeinen Störungstheorie empfiehlt sich ein Verfahren, das DELAUNAY in seiner Theorie des Mondes angewandt hat und das auf einer schrittweisen Eliminierung der Winkelvariablen l, g beruht. Dieses Verfahren ist unter anderem von D. BROUWER[1]) ausführlich beschrieben worden; wir werden es hier, ohne die zum Teil recht umständlichen mathematischen Entwicklungen in extenso wiederzugeben, so weit durchführen, daß der Gedankengang und die wichtigsten Ergebnisse verständlich werden.

Wir erinnern uns (Kapitel XIV), daß es unter Umständen möglich ist, kanonische Differentialgleichungssysteme durch geeignete Transformation der Variablen in eine andere kanonische Form überzuführen, die leichtere Integration verspricht. Unser Ziel wird es sein, eine kanonische Transformation folgender Art zu finden: 1. soll die HAMILTONsche Funktion F nicht wesentlich, sondern nur insofern geändert werden, als in ihr die alten Variablen mit Hilfe der Transformationsgleichungen durch die neuen ersetzt werden, 2. sollen in ihr die Elemente l und g (für h ist dies ja in unserem Problem schon der Fall) nicht mehr explizite vertreten sein. Die neue Gestalt der HAMILTONschen Funktion wird also

$$\overline{F}(L', G', H') \equiv F(L, G, H; l, g)$$

lauten, und es wird dann

$$\frac{dL'}{dt} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial l'} = 0; \quad \frac{dG'}{dt} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial g'} = 0; \quad \frac{dH'}{dt} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial h'} = 0$$

sein, so daß

$$L' = \text{const}, \quad G' = \text{const}, \quad H' = H = \text{const}$$

drei Integrale des Systems sind, während die konjugierten Variablen aus

$$\frac{dl'}{dt} = -\frac{\partial \overline{F}}{\partial L'}; \quad \frac{dg'}{dt} = -\frac{\partial \overline{F}}{\partial G'}; \quad \frac{dh'}{dt} = -\frac{\partial \overline{F}}{\partial H'}$$

durch Quadratur als lineare Funktionen der Zeit erhalten werden.

Man wird die hierzu nötige Transformation in zwei Schritten vornehmen, indem man zuerst l, dann g eliminiert. Infolge der ersten Transformation werden die neuen Elemente L', G' nur noch von g abhängen, also im wesentlichen langperiodische bzw. säkulare Änderungen zeigen, während $H' = H = \text{const}$ erhalten bleibt. Durch die zweite Transformation werden auch die langperiodischen Terme verschwinden.

---

[1]) D. BROUWER und G. M. CLEMENCE, Methods of celestial mechanics. New York und London 1961, Kap. 17.

Es sei nun

$$w = w(L', G', H'; l, g, h)$$

die in (XIV; 51) eingeführte Hilfsfunktion, die als „erzeugende Funktion“ der kanonischen Transformation mit den gewünschten Eigenschaften dienen soll. Da in ihr die Zeit nicht explizite vorkommt, ist $\partial w/\partial t = 0$, so daß die durch sie erzeugte Transformation die HAMILTONsche Funktion nicht ändert. Diese Transformation kann dann gemäß (XIV; 52)

$$\text{(XXII; 11)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial w}{\partial l} = L; \quad \dfrac{\partial w}{\partial g} = G; \quad \dfrac{\partial w}{\partial h} = H = H' = \text{const}, \\ \dfrac{\partial w}{\partial L'} = l'; \quad \dfrac{\partial w}{\partial G'} = g'; \quad \dfrac{\partial w}{\partial H'} = h' \end{array} \right.$$

geschrieben werden. Im Falle unseres Problems wird

$$\text{(XXII; 12)} \qquad w = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$$

sein, wo w_0 von dem Störungsparameter C_2 frei ist und $w_1, w_2, \ldots$ von der Ordnung $C_2, C_2^2, \ldots$ sind. Es genügt dann,

$$\text{(XXII; 12a)} \qquad w_0 = L'l + G'g + H'h$$

zu setzen, da aus (XXII; 11) mit $w = w_0$ die identische Transformation

$$L = L'; \quad G = G'; \quad \ldots; \quad h = h'$$

hervorgeht, die dem ungestörten Problem angemessen ist, das ja bereits integrabel ist und daher einen Übergang auf neue Variable nicht erfordert. Andererseits wird man für $i = 1, 2, \ldots$

$$w_i = w_i(L', G', H'; l, g)$$

setzen, da ja $\partial w/\partial h = \partial w_0/\partial h$ ist.

Für die durch die Deformation des Erdfeldes nur schwach gestörte Bewegung werden die Zusatzterme $w_1, w_2, \ldots$ rasch kleiner werden. Man wird sich in erster Näherung auf w_1 beschränken dürfen. Will man die Untersuchung auch auf w_2 ausdehnen, so wird man berücksichtigen müssen, daß C_2^2 von derselben Größenordnung wie C_4 ist,[1]) der Term vierter Ordnung der Potentialfunktion also nicht vernachlässigt werden darf.

Nach (XXII; 10) sind sämtliche Glieder der Reihen

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cos k\,l; \quad \sigma_2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_k \cos(2g + k\,l)$$

Funktionen der mittleren Anomalie l, da (s. Anhang VI) $q_0 = 0$ ist, der von l unabhängige Term $q_0 \cos 2g$ von σ_2 also ausfällt. Setzt man zur Abkürzung

$$A = \frac{1}{2}\left(3\frac{H^2}{G^2} - 1\right); \quad B = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{H^2}{G^2}\right), \quad \left(\frac{H}{G} = \cos i\right),$$

[1]) Aus $C_4 R^4 \varkappa^2 = 1.12\,\text{Mm}^5\,\text{ks}^{-2}$ erhält man $C_4 = 1.71 \cdot 10^{-6}$, also $C_4/C_2^2 = 1.4$.

so ist $F = F_0 + F_1$ mit

$$
(\text{XXII; 13})\quad
\left\{
\begin{aligned}
&F_0 = F_0(L) = \frac{\mu^2}{2L^2},\\
&F_1 = F_1(L, G, H; l, g) = F_{10}(L, G, H) + F_{11}(L, G, H; l, g) =\\
&\quad = -\frac{A}{2}\,\frac{\mu^4\, C_2 R^2}{L^3\, G^3} - \frac{\mu^4\, C_2 R^2}{2L^6}\,(A\,\sigma_1 + B\,\sigma_2).
\end{aligned}
\right.
$$

Es läßt sich also der von C_2 abhängige Term F_1 in zwei Summanden aufspalten, von denen der erste von l und g unabhängig ist.

Es sei nun (XXII; 12) die erzeugende Funktion einer Transformation (XXII; 11), durch die l eliminiert werden soll, und es sei w_0 durch (XXII; 12a) definiert. Dann wird man in $F_0(L)$ wegen (XXII; 11), (XXII; 12) und (XXII; 12a)

$$L = \frac{\partial w}{\partial l} = \frac{\partial w_0}{\partial l} + \frac{\partial (w_1 + w_2)}{\partial l} = L' + \frac{\partial (w_1 + w_2)}{\partial l}$$

setzen und F_0 durch eine TAYLORsche Reihe bis zu Termen zweiter Ordnung

$$(\text{XXII; 14})\qquad F_0(L) = F_0(L') + \left(\frac{\partial w_1}{\partial l} + \frac{\partial w_2}{\partial l}\right)\frac{\partial F_0}{\partial L'} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial l}\right)^2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2}$$

entwickeln, in der die abgekürzte Schreibweise

$$\frac{\partial F_0}{\partial L'} = \left(\frac{\partial F_0}{\partial L}\right)_{L=L'};\quad \frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2} = \left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial L^2}\right)_{L=L'}$$

benutzt wird. In F_1, das ja bereits von der ersten Ordnung ist, genügt es,

$$L = L' + \frac{\partial w_1}{\partial l};\quad G = G' + \frac{\partial w_1}{\partial g};\qquad H = H',$$

außerdem wegen $g' = \partial w/\partial G' = g + \partial w_1/\partial G' + \cdots$

$$g = g' - \frac{\partial w_1}{\partial G'}$$

zu setzen, so daß

$$
\begin{aligned}
(\text{XXII; 15})\quad & F_1(L, G, H; l, g) =\\
&= F_1(L', G', H'; l, g') + \frac{\partial w_1}{\partial l}\,\frac{\partial F_1}{\partial L'} + \frac{\partial w_1}{\partial g}\,\frac{\partial F_1}{\partial G'} - \frac{\partial w_1}{\partial G'}\,\frac{\partial F_1}{\partial g'}
\end{aligned}
$$

ist, wenn man

$$\frac{\partial F_1}{\partial L'} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial L}\right)_{L=L',\, G=G',\, H=H',\, g=g'};\ \ldots$$

schreibt. Sammelt man nun, nachdem man (XXII; 14) und (XXII; 15) in $F = F_0 + F_1$ eingesetzt hat, die Terme nullter, erster und zweiter Ordnung, so erhält man

$$\text{(XXII; 16)} \quad \begin{cases} \bar{F}_0 = F_0(L'), \\ \bar{F}_1 = F_1(L', G', H'; l, g') + \dfrac{\partial w_1}{\partial l} \dfrac{\partial F_0}{\partial L'} = \\ \qquad = F_{10}(L', G', H') + F_{11}(L', G', H'; l, g') + \dfrac{\partial w_1}{\partial l} \dfrac{\partial F_0}{\partial L'}, \\ \bar{F}_2 = \dfrac{\partial w_2}{\partial l} \dfrac{\partial F_0}{\partial L'} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_1}{\partial l}\right)^2 \dfrac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2} + \dfrac{\partial w_1}{\partial l} \dfrac{\partial F_1}{\partial L'} + \dfrac{\partial w_1}{\partial g} \dfrac{\partial F_1}{\partial G'} - \\ \qquad - \dfrac{\partial w_1}{\partial G'} \dfrac{\partial F_1}{\partial g'}, \end{cases}$$

und es müssen dann w_1 und w_2 so bestimmt werden, daß die Ausdrücke $\bar{F}_0, \bar{F}_1, \bar{F}_2$ von l frei sind. Ist dies geschehen, so bestimmt $w = w_0 + w_1 + w_2$ die gesuchte Transformation, und es ist $\bar{F} = \bar{F}_0 + \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ die neue Gestalt der HAMILTONschen Funktion, die nun außer h auch l nicht mehr enthält. Um dies zu erreichen, muß zunächst

$$\frac{\partial w_1}{\partial l} \frac{\partial F_0}{\partial L'} + F_{11}(L', G', H'; l, g') = 0$$

gesetzt werden. Es ist dann

$$\frac{\partial w_1}{\partial l} \frac{\mu^2}{L'^3} = -\frac{\mu^4 C_2 R^2}{2L'^6} (A'\sigma_1' + B'\sigma_2'),$$

wenn man unter $A', B', \sigma_1', \sigma_2'$ die Größen A, B, σ_1, σ_2 versteht, in denen L, G, H, g durch L', G', H', g' ersetzt worden sind. Man bestimmt also w_1 aus

$$\frac{\partial w_1}{\partial l} = \frac{d w_1}{d l} = -\frac{\mu^2 C_2 R^2}{2L'^3} (A'\sigma_1' + B'\sigma_2')$$

zu

$$w_1 = -\frac{\mu^2 C_2 R^2}{2L'^3} \int (A'\sigma_1' + B'\sigma_2')\, dl.$$

Dieses Integral, dem eine Integrationskonstante nicht hinzugefügt zu werden braucht, da ja nur seine partiellen Ableitungen verwendet werden, läßt sich leicht auswerten. Aus (XXII; 10) folgt

$$\int \sigma_1\, dl = \int \left[\left(\frac{a}{r}\right)^3 - \left(\frac{L}{G}\right)^3\right] dl; \quad \int \sigma_2\, dl = \int \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos(2g + 2v)\, dl.$$

Zur Berechnung der Störungen erster Ordnung genügt es, in den Integranden die Formeln der ungestörten Bewegung

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + e\cos v); \quad r^2\,dv = \varkappa\sqrt{p}\,dt; \quad a^{3/2}\,dl = \varkappa\,dt; \quad dl = \frac{r^2\,dv}{a\sqrt{a\,p}}$$

anzuwenden. Es ist dann auch

$$\frac{1}{\sqrt{a\,p}} = \frac{1}{a\sqrt{1-e^2}} = \frac{L}{a\,G}, \quad \frac{a}{r} = \left(\frac{L}{G}\right)^2 (1 + e\cos v)$$

und

$$\sigma_1\,dl = \left(\frac{a}{r}\right)^3 \frac{r^2}{a^2}\frac{L}{G}\,dv - \left(\frac{L}{G}\right)^3 dl = \left(\frac{L}{G}\right)^3 [(1 + e\cos v)\,dv - dl],$$

$$\sigma_2\,dl = \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos(2g + 2v)\frac{r^2}{a^2}\frac{L}{G}\,dv = \left(\frac{L}{G}\right)^3 (1 + e\cos v)\cos(2g + 2v)\,dv.$$

Integriert man nun über v bzw. l und ersetzt die ungestrichenen Größen durch die gestrichenen, so erhält man schließlich

$$w_1 = -\frac{\mu^2 C_2 R^2}{2G'^3}\Big\{A'(v - l + e'\sin v) + \\ + \frac{1}{2}B'\left[\sin(2g + 2v) + e'\sin(2g + v) + \frac{e'}{3}\sin(2g + 3v)\right]\Big\},$$

wo $e' = \sqrt{1 - (G'/L')^2}$ die von den kurzperiodischen Störungen befreite Exzentrizität und $v - l$ die Mittelpunktsgleichung (VII; 66) bedeutet, in der ebenfalls e durch e' ersetzt werden muß.

Verzichtet man auf Berücksichtigung von Störungen zweiter Ordnung, so genügt es,

$$\text{(XXII; 17)} \qquad \overline{F} = \overline{F}_0 + \overline{F}_1 = F_0(L') + F_{10}(L', G', H') = \\ = \frac{\mu^2}{2L'^2} - \frac{A'}{2}\frac{\mu^4 C_2 R^2}{L'^3 G'^3}$$

zu setzen. Das System

$$\frac{dL'}{dt} = \frac{\partial\overline{F}}{\partial l'} = 0; \quad \frac{dG'}{dt} = \frac{\partial\overline{F}}{\partial g'} = 0; \quad \frac{dH'}{dt} = \frac{\partial\overline{F}}{\partial h'} = 0,$$

$$\frac{dl'}{dt} = -\frac{\partial\overline{F}}{\partial L'}; \quad \frac{dg'}{dt} = -\frac{\partial\overline{F}}{\partial G'}; \quad \frac{dh'}{dt} = -\frac{\partial\overline{F}}{\partial H'}$$

ist dann integrabel und liefert

$$\text{(XXII; 17a)} \qquad L' = \text{const}; \quad G' = \text{const}; \quad H' = \text{const}$$

bzw.

$$a' = \text{const}; \quad e' = \text{const}; \quad i' = \text{const}$$

sowie, mit $n'_0 = \mu^2/L'^3 = \varkappa\, a'^{-3/2}$,

$$\text{(XXII; 17b)} \left\{ \begin{aligned} \frac{dl'}{dt} &= n' = -\frac{\partial \bar{F}}{\partial L'} = \frac{\mu^2}{L'^3} - \frac{3}{2} A' \frac{\mu^4 C_2 R^2}{L'^4 G'^3} = \\ &= n'_0 \left[1 - \frac{3}{2} A' \frac{\mu^2 C_2 R^2}{L' G'^3}\right], \\ \frac{dg'}{dt} &= \frac{d\omega'}{dt} = -\frac{\partial \bar{F}}{\partial G'} = -\frac{3}{2} A' \frac{\mu^4 C_2 R^2}{L'^3 G'^4} + \frac{\mu^4 C_2 R^2}{L'^3 G'^3} \frac{\partial A'}{\partial G'} = \\ &= -\frac{3}{2} n'_0 \frac{\mu^2 C_2 R^2}{G'^4} \left(A' + \frac{H'^2}{G'^2}\right), \\ \frac{dh'}{dt} &= \frac{d\Omega'}{dt} = -\frac{\partial \bar{F}}{\partial H'} = \frac{\mu^4 C_2 R^2}{2 L'^3 G'^3} \frac{\partial A'}{\partial H'} = 3 n_0 \frac{\mu^2 C_2 R^2}{2 G'^3} \frac{H'}{G'^2}. \end{aligned} \right.$$

Führt man hierin statt C_2 $(= -0.001085)$ die positive Konstante

$$\gamma_2 = -\frac{\mu^2 C_2 R^2}{L'^4} = -C_2 \left(\frac{R}{a'}\right)^2$$

ein und bedenkt, daß

$$\frac{G'}{L'} = \eta = \sqrt{1 - e'^2}; \quad \frac{H'}{G'} = \cos i'; \quad A' = \frac{1}{2} (3 \cos^2 i' - 1)$$

geschrieben werden kann, so ergeben sich für die säkularen Störungen der mittleren Bewegung, des Perihelabstandes vom Knoten und der Knotenlänge die einfachen Formeln

$$\text{(XXII; 18)} \left\{ \begin{aligned} n' &= n'_0 \left[1 + \frac{3}{4} \gamma_2 \eta^{-3} (3 \cos^2 i' - 1)\right], \\ \frac{d\omega'}{dt} &= \frac{3}{4} n'_0 \gamma_2 \eta^{-4} (5 \cos^2 i' - 1), \\ \frac{d\Omega'}{dt} &= -\frac{3}{2} n'_0 \gamma_2 \eta^{-4} \cos i'. \end{aligned} \right.$$

Die Knoten zeigen also eine rückläufige, die Apsiden für kleine und mäßige Bahnneigungen eine fortschreitende Bewegung. Da bei den meist ziemlich großen Bahnneigungen der Satelliten die rückläufige Knotenbewegung gut beobachtbar ist, eignet sich die letzte dieser Formeln besonders gut zur empirischen Bestimmung von γ_2 bzw. C_2.

Die kurzperiodischen Schwankungen der oskulierenden Bahnelemente, sofern sie von der ersten Ordnung in γ_2 sind, erhält man aus

$$
\text{(XXII; 19)} \quad \left\{
\begin{aligned}
L &= L' + \frac{\partial w_1}{\partial l} = L' - \frac{\mu^2 C_2 R^2}{2L'^3}(A'\sigma_1' + B'\sigma_2') = \\
&= L'\left[1 + \frac{1}{4}\gamma_2\left\{(3\cos^2 i' - 1)\left(\frac{a'^3}{r^3} - \eta^{-3}\right) + \right.\right.\\
&\quad \left.\left. + \sin^2 i' \frac{a'^3}{r^3}\cos(2g + 2v)\right\}\right],\\
G &= G' + \frac{\partial w_1}{\partial g} = G'\left[1 + \frac{3}{4}\gamma_2\eta^{-4}\sin^2 i'\left\{\cos(2g + 2v) + \right.\right.\\
&\quad \left.\left. + e'\cos(2g + v) + \frac{e'}{3}\cos(2g + 3v)\right\}\right]
\end{aligned}
\right.
$$

und entsprechenden Gleichungen für die übrigen Elemente, deren elementare Ableitung dem Leser überlassen werden darf.

Diese Lösung, in der Terme zweiter Ordnung ganz vernachlässigt worden sind und in der außer kurzperiodischen nur noch die in g', h' enthaltenen säkularen Störungen auftreten, ist unvollständig. Es wird sich zeigen, daß bei Mitnahme der Glieder zweiter Ordnung der Potentialfunktion außer kurzperiodischen Störungen zweiter Ordnung noch langperiodische Störungen erster Ordnung erscheinen, die der Bewegung des Satelliten charakteristische Züge verleihen und auf deren Berechnung man nicht verzichten darf, selbst wenn man auf die Berücksichtigung der sehr kleinen Terme zweiter Ordnung in den oskulierenden Bahnelementen keinen Wert legt. Man setze also jetzt statt (XXII; 16)

$$
\text{(XXII; 20)} \qquad \bar{F} = \bar{F}_0(L') + \bar{F}_{10}(L', G', H') + \bar{F}_2(L', G', H'; g'),
$$

wo nach (XXII; 16) in

$$
\bar{F}_2 = \frac{\partial w_2}{\partial l}\frac{\partial F_0}{\partial L'} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial l}\right)^2\frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2} + \frac{\partial w_1}{\partial l}\frac{\partial F_1}{\partial L'} + \frac{\partial w_1}{\partial g}\frac{\partial F_1}{\partial G'} - \frac{\partial w_1}{\partial G'}\frac{\partial F_1}{\partial g'}
$$

w_2 so beschaffen sein muß, daß $\bar{F}_2$ von der mittleren Anomalie l frei wird. Man schreibe also

$$
\bar{F}_2 = \frac{\partial w_2}{\partial l}\frac{\partial F_0}{\partial L'} + \bar{F}_{20}(L', G', H'; g') + \bar{F}_{21}(L', G', H'; l, g'),
$$

indem man aus $\bar{F}_2$ diejenigen Terme abspaltet, die l nicht enthalten. Dann läßt sich w_2 aus

$$
\frac{\partial w_2}{\partial l}\frac{\partial F_0}{\partial L'} = \frac{d w_2}{d l}\frac{\partial F_0}{\partial L'} = -\bar{F}_{21}(L', G', H'; l, g')
$$

durch Integration bestimmen. Wir führen diese elementare, aber etwas umständliche Rechnung nicht aus, sondern bemerken nur, daß, sobald $w_2 = w_2(L', G', H'; l, g)$ vorliegt, die kurzperiodischen Terme zweiter Ordnung in den oskulierenden Elementen aus den partiellen Ableitungen von w_2 unmittelbar erhalten werden. Von $\overline{F}_2$ bleibt dann der Ausdruck zweiter Ordnung

$$\overline{F}_2 = \overline{F}_{20}(L', G', H'; g') \tag{XXII; 21}$$

übrig, den man, auch ohne w_2 zu kennen, als den von l freien Teil der Summe

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial l}\right)^2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2} + \frac{\partial w_1}{\partial l}\frac{\partial F_1}{\partial L'} + \frac{\partial w_1}{\partial g}\frac{\partial F_1}{\partial G'}$$

hinschreiben kann, da $\partial F_1/\partial g'$ kein von l unabhängiges Glied enthält.

Nachdem nun $\overline{F}$ bis zur zweiten Ordnung vorliegt, kann man eine weitere Transformation vornehmen, um auch g' und damit die langperiodischen Terme zu eliminieren. Die erzeugende Funktion dieser Transformation sei

$$\overline{w} = \overline{w}_0(L'', G'', H''; l', g', h') + \overline{w}_1(L'', G'', H''; g'),$$

und es sei

$$\overline{w}_0 = L''l' + G''g' + H''h',$$

ferner $\overline{w}_1$ eine Funktion erster Ordnung, die so zu bestimmen ist, daß die neue Hamiltonsche Funktion $\overline{\overline{F}} \equiv \overline{F}$ auch von g' frei wird. Die neuen Variablen $L'', \ldots, h''$ sind nach (XXII; 11) mit den alten durch die Beziehungen

$$\left\{\begin{aligned} &L' = \frac{\partial \overline{w}}{\partial l'} = L''; \qquad G' = \frac{\partial \overline{w}}{\partial g'} = G'' + \frac{\partial \overline{w}_1}{\partial g'};\\ &H' = \frac{\partial \overline{w}}{\partial h'} = H'',\\ &l'' = \frac{\partial \overline{w}}{\partial L''} = l' + \frac{\partial \overline{w}_1}{\partial L''}; \quad g'' = \frac{\partial \overline{w}}{\partial G'} = g' + \frac{\partial \overline{w}_1}{\partial G''};\\ &h'' = \frac{\partial \overline{w}}{\partial H''} = h' + \frac{\partial \overline{w}_1}{\partial H''} \end{aligned}\right. \tag{XXII; 22}$$

verbunden. Setzt man nun (XXII; 22) in (XXII; 20) ein, so erhält man

$$\overline{\overline{F}} = \overline{F}_0(L'') + \overline{F}_{10}\left(L'', G'' + \frac{\partial \overline{w}_1}{\partial g'}, H''\right) + \overline{F}_{20}(L'', G'', H''; g'),$$

da in $\overline{F}_2$, das ohnehin von der zweiten Ordnung ist, durch die unvollständige Substitution $G' = G''$ nur ein Fehler dritter Ordnung entsteht. Schließlich ist

$$\overline{\overline{F}}_{10}\left(L'', G'' + \frac{\partial \overline{w}_1}{\partial g'}, H''\right) = \overline{F}_{10}(L'', G'', H'') + \frac{\partial \overline{w}_1}{\partial g'}\frac{\partial \overline{F}_{10}}{\partial G''} +$$
$$+ \langle\text{Glieder dritter und höherer Ordnung}\rangle.$$

Sammelt man also in

$$\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{F}}_0 + \overline{\overline{F}}_1 + \overline{\overline{F}}_2$$

die Terme nullter, erster und zweiter Ordnung getrennt, so wird

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{F}}_0 &= \overline{F}_0(L''), \\
\overline{\overline{F}}_1 &= \overline{F}_{10}(L'', G'', H''), \\
\overline{\overline{F}}_2 &= \overline{F}_{20}(L'', G'', H''; g') + \frac{\partial \overline{w}_1}{\partial g'} \frac{\partial \overline{F}_{10}}{\partial G''} = \\
&= \overline{F}_{200}(L'', G'', H'') + \overline{F}_{201}(L'', G'', H''; g') + \frac{\partial \overline{w}_1}{\partial g'} \frac{\partial \overline{F}_{10}}{\partial G''},
\end{aligned}$$

wenn in $\overline{F}_{20}$ (XXII; 21) die Terme mit g' von denen ohne g' abgetrennt werden. Ist dies geschehen, so erhält man $\overline{w}_1$ aus

$$\text{(XXII; 23)} \qquad \frac{\partial \overline{w}_1}{\partial g'} \frac{\partial \overline{F}_{10}}{\partial G''} = \frac{d \overline{w}_1}{d g'} \frac{\partial \overline{F}_{10}}{\partial G''} = -\overline{F}_{201}(L'', G'', L''; g')$$

durch Quadratur. Es wird dann

$$\overline{\overline{F}} = \overline{F}_0(L'') + \overline{F}_{10}(L'', G'', H'') + \overline{F}_{200}(L'', G'', H'')$$

die HAMILTONsche Funktion des vollständig integrablen Systems

$$\frac{dL''}{dt} = \frac{\partial \overline{\overline{F}}}{\partial l''} = 0; \qquad \frac{dG''}{dt} = \frac{\partial \overline{\overline{F}}}{\partial g''} = 0; \qquad \frac{dH''}{dt} = \frac{\partial \overline{\overline{F}}}{\partial h''} = 0,$$

$$\frac{dl''}{dt} = -\frac{\partial \overline{\overline{F}}}{\partial L''} = \text{const}; \quad \frac{dg''}{dt} = -\frac{\partial \overline{\overline{F}}}{\partial G''} = \text{const}; \quad \frac{dh''}{dt} = -\frac{\partial \overline{\overline{F}}}{\partial H''} = \text{const},$$

und es ist wegen (XXII; 22)

$$\text{(XXII; 24)} \quad \left\{ \begin{array}{lll}
L' = L'' = \text{const}; & & l' = l'' - \dfrac{\partial \overline{w}_1}{\partial L''}, \\[2ex]
G' = G'' + \dfrac{\partial \overline{w}_1}{\partial g'}, & G'' = \text{const}; & g' = g'' - \dfrac{\partial \overline{w}_1}{\partial G''}, \\[2ex]
H' = H'' = \text{const}; & & h' = h'' - \dfrac{\partial \overline{w}_1}{\partial H''}.
\end{array} \right.$$

In den Formeln (XXII; 19), die $L, G, \ldots, h$ als Funktionen der Zeit liefern, hat man also statt $L', G', \ldots, h'$ die Größen (XXII; 24) einzusetzen. Dabei bleiben L', H' unverändert, während die Konstante G' und die linear mit der Zeit veränderlichen Größen l', g', h' um langperiodische Terme zu ergänzen sind.

Wie schon in Abschnitt 173 vorausbemerkt wurde, entspricht die hier benutzte Methode der schrittweisen Eliminierung der Elementenstörungen im Prinzip derjenigen, die DELAUNAY in seiner (in Band III ausführlich zu be-

handelnden) Theorie des Mondes entwickelt und angewandt hat. In dem hier behandelten einfacheren Problem führt diese schöne und elegante Methode besonders rasch zum Ziel. Es erübrigt sich, die Ergebnisse dieser Analyse explizite hinzuschreiben. Der Leser möge das selbst versuchen und seine Resultate mit denjenigen vergleichen, die er in der neueren Literatur[1]) findet. Wichtiger ist es, auf einige bemerkenswerte Eigenschaften dieser Ergebnisse hinzuweisen, die auch ohne deren explizite Darstellung leicht ins Auge fallen:

In (XXII; 23) tritt links der Faktor

$$\frac{\partial \overline{F}_{10}}{\partial G''} = \left(\frac{\partial \overline{F}_{10}}{\partial G'}\right)_{G'=G''}$$

auf, in dem nach (XXII; 16) und (XXII; 13)

$$\overline{F}_{10} = F_{10}(L'', G'', H'') = -\frac{A''}{2} \frac{\mu^4 C_2 R^2}{L''^3 G''^3}$$

zu setzen ist. Wie in den zweiten Gleichungen der Systeme (XXII; 17b) bzw. (XXII; 18) folgt auch hier

$$\frac{\partial \overline{F}_{10}}{\partial G''} = \frac{3}{4} n_0'' \gamma_2' \eta'^{-4} (5\cos^2 i'' - 1),$$

wo

$$n_0'' = \varkappa a''^{-3/2}; \quad \gamma_2' = -C_2\left(\frac{R_0}{a''}\right)^2; \quad \eta' = \sqrt{1 - e''^2}; \quad \cos i'' = \frac{H''}{G''}$$

gesetzt ist. Wegen $L'' = L'$ ist aber $a'' = a'$, also auch $n_0'' = n_0'$, $\gamma_2' = \gamma_2$.

Obwohl also in (XXII; 23) die rechte Seite von der Ordnung γ_2^2 ist, wird $\partial \overline{w}_1/\partial g'$ von der ersten Ordnung sein, da die linke Seite γ_2 als Faktor enthält. Daraus erklärt sich die merkwürdige, weiter oben schon bemerkte Tatsache, daß die langperiodischen Störungen erster Ordnung erst in Erscheinung treten, wenn man die HAMILTONsche Funktion bis zur zweiten Ordnung entwickelt, während man ohne die Terme zweiter Ordnung außer kurzperiodischen Störungen nur säkulare, d.h. der Zeit proportionale, Störungen erhält.

Ferner ergibt sich, daß $\partial \overline{w}_1/\partial g'$ und daher auch $\overline{w}_1$ selbst den Ausdruck

$$5\cos^2 i'' - 1 = 5\left(\frac{H''}{G''}\right)^2 - 1$$

im Nenner enthält, und aus (XXII; 24) folgt daher, daß auch G', l' diesen Ausdruck, g', h' sogar dessen Quadrat im Nenner haben. Die langperiodischen Terme wachsen also für

$$5\cos^2 i'' \to 1, \quad \text{d.h. für} \quad \tan i'' \to 2, \quad i'' \to 63^\circ\, 26'$$

über alle Grenzen, und die entsprechenden Formeln werden daher in der Nähe dieser „kritischen Neigung" der Bahnebene unbrauchbar.

---

[1]) Zum Beispiel schon in dem S. 604 erwähnten Lehrbuch von D. BROUWER und G. M. CLEMENCE, ausführlicher und genauer in dem Beitrag von Y. V. BATRAKOV in: Dynamics of Satellites (Symposium Paris 1962), Berlin, Göttingen und Heidelberg 1963.

189. *Die intermediäre Lösung von Vinti*

Es sind verschiedene Versuche unternommen worden, die Schwierigkeiten zu umgehen, die die Ergebnisse des vorigen Abschnitts in der Umgebung der kritischen Bahnneigung illusorisch machen. Ähnliche Schwierigkeiten ergeben sich auch, wenn die Exzentrizität der oskulierenden Bahn sehr groß ist; denn dann wird $\eta = \sqrt{1 - e^2}$ sehr klein und werden die in (XXII; 19) auftretenden negativen Potenzen dieser Größe so beträchtlich, daß sie die Konvergenz des Verfahrens gefährden. Auch sehr kleine Exzentrizitäten geben zu Schwierigkeiten Anlaß, da in den kurzperiodischen Störungen der mittleren Anomalie und der Perihellänge Glieder mit dem Faktor e^{-1} auftreten, die allerdings in der Summe beider herausfallen, so daß es zweckmäßig ist, bei schwach exzentrischen Bahnen die mittlere Länge statt der mittleren Anomalie zu verwenden und statt des Perihelabstandes vom Knoten oder der Perihellänge die Größen $e \cos\omega$ und $e \sin\omega$ einzuführen bzw. statt der Delaunayschen Elemente die Poincaréschen zu benutzen, wodurch alle Komplikationen vermieden werden, die durch die Unsicherheit der Lage der Apsiden und Knoten bei sehr kleinen Exzentrizitäten und Neigungen entstehen. So läßt sich auch die Singularität bei $\tan i = 2$ durch Abänderung des Verfahrens vermeiden, etwa, wie G.-J. Hori[1]) gezeigt hat, indem man Entwicklungen nach $\sqrt{\gamma_2}$ statt nach γ_2 ansetzt.

Als besonders interessant und fruchtbar erweist sich die von J. P. Vinti[2]) vorgeschlagene Lösung dieses Problems. Er hat gezeigt, daß die Differentialgleichungen der Bewegung eines Massenpunktes in einem rotations- und äquatorsymmetrischen Potentialfeld in geschlossener Form durch Quadraturen lösbar sind, wenn die Potentialfunktion die Gestalt

$$U = \frac{\varkappa^2}{r}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma^n \left(\frac{R}{r}\right)^{2n} P_{2n}(\sin\beta)\right] \qquad \text{(XXII; 25)}$$

besitzt, und daß diese Lösungen außer der trivialen Singularität bei $r = 0$ keine weiteren Singularitäten aufweisen. Die Formel (XXII; 25) würde das Potential des Erdfeldes bis zur Ordnung C_4 wiedergeben, wenn man

$$\sigma = C_2; \quad \sigma^2 = C_4, \quad \text{also } \frac{C_4}{C_2^2} = 1$$

setzen dürfte. Das ist nun nicht der Fall; denn geophysikalische und Satellitenbeobachtungen haben ja (siehe S. 605, Fußnote) mit guter Übereinstimmung $C_4/C_2^2 = 1.4$ ergeben. Immerhin wird man mit dem Ansatz (XXII; 25), wenn man $\sigma = C_2 = -1.085 \cdot 10^{-3}$ setzt, eine Lösung erzielen, die alle Terme erster Ordnung in C_2 und einen großen Teil der Terme zweiter Ordnung berücksichtigt. Die Vintische Lösung ergibt also eine intermediäre Bahn, die mit der

---

[1]) G.-J. Hori, A.J. *65*, 291 (1960).

[2]) J. P. Vinti, New method of solution for unretarded satellite orbits. Journal of Research of the National Bureau Standards (B) *62*, 105 (1959).

wirklichen schon sehr nahe übereinstimmt und die man dann nötigenfalls durch einfache Anwendung der Methode der Variation der Konstanten verbessern kann, da alle noch übriggebliebenen „Störungen", die von dem unberücksichtigt gebliebenen Rest $C_4 - C_2^2$ und eventuell noch von $C_3, C_5, C_6, \ldots$ herrühren, mindestens von der Ordnung C_2^2 sind.

VINTI hat bewiesen, daß bei einer Potentialfunktion von der Gestalt (XXII; 25) die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\mathfrak{r}} = \operatorname{grad} U$$

des Satelliten in ähnlicher Weise vollständig integriert werden können wie die des klassischen Zweikörperproblems, für das speziell $\sigma = 0$, $U = \varkappa^2/r$ ist. Es läßt sich nämlich zeigen, daß auch für beliebiges $\sigma > 0$ das Problem auf die Lösung einer HAMILTON-JACOBIschen partiellen Differentialgleichung (XIV; 49) zurückgeführt werden kann, in der nur die *Quadrate* der partiellen Ableitungen der die Lösung vermittelnden Funktion w vorkommen. Gleichungen dieser Art sind aber nach dem in Abschnitt 125 erwähnten Theorem von STÄCKEL integrierbar, wie dort am Beispiel der Bewegung eines Massenpunktes in einem kugelförmig-symmetrischen Gravitationsfeld in extenso gezeigt worden ist. Den im wesentlichen auf diese Weise geführten Beweis des VINTIschen Satzes möge man in der Originalabhandlung oder in der außerordentlich eingehenden Studie über dieses Problem nachlesen, die I. G. IZSAK[1]) durchgeführt hat. Bedeutend kürzer und nicht weniger schlüssig ist der folgende Beweis für die Integrabilität des VINTIschen Problems, auf den D. BROUWER hingewiesen hat:

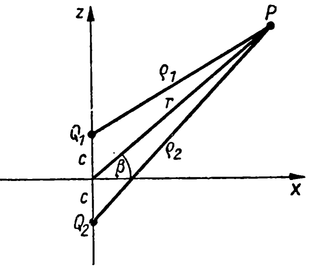


Abb. 77. Anziehung von zwei festen Zentren (Q_1, Q_2) auf einen Aufpunkt P in einer beliebigen, durch die Symmetrieachse $Q_1 Q_2$ gehenden Meridianebene

In Abschnitt 28 ist gezeigt worden, daß man die Hauptterme des Potentials eines sphäroidisch abgeplatteten Planeten auch dadurch darstellen kann, daß man den Planetenkörper durch einen Massenpunkt (in dem der größte Teil der Masse konzentriert ist) und einen ihn ringförmig umgebenden, mit der Restmasse belegten Faden darstellt. Eine andere Möglichkeit, zu demselben Ziel zu gelangen, bietet sich dar, wenn man statt eines im Koordinatenanfang ruhenden Massenpunktes von der Masse M (Erdmasse) zwei getrennte, in den Punkten $x = y = 0$, $z = \pm c$ der z-Achse (Rotationsachse des Planeten) liegende Attraktionszentren Q_1, Q_2 (Abb. 77) annimmt, von denen jedes mit der Masse $M/2$ belegt ist. In einem beliebigen Aufpunkt $P(x, y, z)$, dessen Polarkoordinaten in der betreffenden Meridianebene r, β seien, ist dann

$$\text{(XXII; 26)} \qquad U \sim \frac{M}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right),$$

[1]) I. G. IZSAK, S.A.O. Special Report No. 52, 1960.

und es sind die Abstände ϱ_1, ϱ_2 des Aufpunktes von den beiden Attraktionszentren durch

$$\varrho_1^2 = r^2 + c^2 - 2rc\sin\beta = (r-c)^2 + 2rc(1-\sin\beta),$$
$$\varrho_2^2 = r^2 + c^2 + 2rc\sin\beta = (r+c)^2 - 2rc(1-\sin\beta)$$

bestimmt. Andererseits hat, wie in Abschnitt 187 bewiesen worden ist, die Potentialfunktion eines rotationssymmetrisch aufgebauten Planeten die allgemeine Form (XXII; 3):

$$U = \frac{\varkappa^2}{r}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\sin\beta)\right].$$

Wird speziell die Massenverteilung im Planetenkörper auch symmetrisch zur Äquatorebene angenommen, so verschwinden die Terme ungerader Ordnung, so daß

$$\text{(XXII; 27)} \qquad U = \frac{\varkappa^2}{r}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} \left(\frac{R}{r}\right)^{2n} P_{2n}(\sin\beta)\right]$$

gesetzt werden darf. Da nun die C_{2n} Konstante sind, gilt insbesondere für Punkte auf der z-Achse ($\beta = \pm\pi/2$)

$$\text{(XXII; 28)} \qquad U_0 \sim \frac{M}{r}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} \left(\frac{R}{r}\right)^{2n}\right],$$

da nach (XXII; 4) $P_{2n}(x) = 1$ für $x = \sin(\pm\pi/2) = \pm 1$ ist. Hat nun U die spezielle Gestalt (XXII; 26), so ist für jeden Punkt $z > c$ der positiven z-Achse

$$\varrho_1 = r - c; \quad \varrho_2 = r + c,$$

also

$$U_0 \sim \frac{M}{2}\left(\frac{1}{r-c} + \frac{1}{r+c}\right) = M\frac{r}{r^2 - c^2} = \frac{M}{r}\left[1 - \left(\frac{c}{r}\right)^2\right]^{-1}$$

oder

$$\text{(XXII; 29)} \qquad U_0 \sim \frac{M}{r}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c}{r}\right)^{2n}\right].$$

Vergleicht man dies mit (XXII; 28), so folgt

$$c^{2n} = C_{2n}R^{2n}; \quad C_{2n} = \left(\frac{c}{R}\right)^{2n}.$$

Die Entwicklung (XXII; 27) ist also, mit $c^2 = \sigma R^2$, von der Form (XXII; 25) und stimmt mit der Entwicklung des Erdpotentials bis zu dem Glied mit C_2 überein, wenn

$$\sigma = C_2; \quad c = R\sqrt{C_2} = iR\sqrt{1.085 \cdot 10^{-3}} \approx 0.033\, iR$$

gesetzt wird.

Das VINTIsche Problem läßt sich also auf das der Anziehung von zwei festen Zentren aus zurückführen, dessen Integration in Abschnitt 103 für eine ebene Bewegung durchgeführt worden ist, aber auch für den räumlichen Fall keine

Schwierigkeit macht. Allerdings zeigt sich, daß hier (im Falle eines abgeplatteten Planeten) der Abstand der beiden symbolischen Attraktionszentren imaginär ist, was aber weder die Gültigkeit der obigen Überlegungen beeinflußt noch für die Ergebnisse wesentlich ist, denn es kommen ja nur gerade Potenzen von c in (XXII; 27) vor. Für Planeten von eiförmiger Gestalt, die also nach den Polen zu verlängert sind, würde c reell sein. Das trifft wahrscheinlich für den Mond zu, von dem angenommen wird, daß sein Durchmesser in Richtung auf die Erde ein wenig größer ist als senkrecht dazu. Man wird über diese hypothetische Mondgestalt vielleicht schon in naher Zukunft Genaueres erfahren, wenn es gelingen sollte, Raumkörper in Umlaufsbahnen um den Mond zu bringen.

Daß die VINTIsche intermediäre Lösung die Singularität bei $i = 63° 26.'1$ nicht aufweist, läßt sich auch direkt zeigen, wenn man die Analyse des vorigen Abschnitts auf die Potentialterme mit C_4 ausdehnt. Es zeigt sich dann, daß alle Störungsglieder, die negative Potenzen von $5\cos^2 i - 1$ enthalten, sowohl mit dem Faktor $-C_2$ als auch mit dem Faktor C_4/C_2 auftreten, so daß diese sich gegenseitig aufheben, wenn $C_4 = C_2^2$ ist.

190. *Einfluß des atmosphärischen Widerstandes auf die Bewegung erdnaher Satelliten*

Die Bewegung aller künstlichen Satelliten, die während ihres Umlaufs ständig oder wenigstens in der Umgebung des Perigäums in geringerer Höhe als etwa 10^3 km über der Erdoberfläche verweilen, wird maßgeblich durch den mechanischen (bzw. elektromagnetischen) Widerstand durch die neutralen (bzw. ionisierten) Luftpartikeln beeinflußt. Die Berücksichtigung dieses Einflusses ist sehr kompliziert, und wir müssen uns hier darauf beschränken, ihn unter stark vereinfachten Annahmen abzuschätzen, die aber gleichwohl ausreichen werden, um die wichtigsten Veränderungen der Bahnelemente durch ihn erkennen zu lassen. Die quantitative Bestimmung dieser Veränderungen leidet unter ähnlichen Schwierigkeiten wie die numerische Deduktion der Gravitationsstörungen infolge der Abplattung des Erdkörpers: Ebenso wie die Konstanten der Anisotropie des Gravitationsfeldes der Erde aus geodätischen Messungen nur unzureichend bekannt sind, gilt dasselbe (und zwar in weit höherem Maße) für unsere Kenntnis der Dichte der höheren Atmosphäre. Man wird also auch hier den umgekehrten Weg einschlagen und genauere Daten über den Aufbau der oberen Atmosphärenschichten aus den Störungen der Satellitenbahnen zu gewinnen suchen.

Ein Modell der Atmosphäre, das man einer analytischen Lösung dieses Problems zugrunde legen kann, wird gegenüber den äußerst komplexen Verhältnissen in der Wirklichkeit eine Reihe unerläßlicher Vereinfachungen aufweisen, die aber so beschaffen sein müssen, daß sie das Ergebnis nicht wesentlich verfälschen. Folgende Übersicht über diese Vereinfachungen zeigt, wie verwickelt das Problem in Wirklichkeit ist:

1. Es werde angenommen, daß der mittlere Dichteaufbau der Atmosphäre kugelförmig-symmetrisch in bezug auf den Erdmittelpunkt ist. Das ist sicher

nicht ganz richtig; denn die Schichten gleicher Luftdichte sind, von örtlichen Anomalien und zeitlichen Variationen abgesehen, in guter Annäherung Sphäroide, deren Abplattung mindestens ebenso groß ist wie die der Erdoberfläche selbst. Ein erdnaher Satellit, der in einer gegen den Äquator stark geneigten Kreisbahn um die Erde läuft, wird also über dem Äquator dichtere, über höheren Breiten weniger dichte Luftmassen antreffen. Seine Bewegung wird also durch den Luftwiderstand periodisch stärker und schwächer gebremst. Die Hauptperiode dieser Störung ist gleich der halben Umlaufszeit, also sehr kurz, und ihr Effekt ist, wie eingehende Untersuchungen gezeigt haben,[1] sehr gering. Die Annahme sphärischer Symmetrie schließt ebenfalls aus, daß die Schichtung der Atmosphäre abhängig von der geographischen Länge ist. Auch das stimmt in Wirklichkeit nicht ganz, da die Luftdichte als Funktion der Höhe auf der Tag- und Nachtseite der Erde etwas verschieden ist. Dadurch wird eine ebenfalls periodische Variation des Luftwiderstandes mit einer Periode erzeugt, die ungefähr gleich der Umlaufszeit des Satelliten ist. Variationen mit langer Periode entstehen durch den Einfluß der Sonnenstrahlung, durch die die Luftdichte infolge verschieden starker Erwärmung und Ionisation verändert wird, so eine jahreszeitliche Schwankung und eine solche von etwa 28tägiger Periode, die durch die Rotation der Sonne bedingt ist. Alle diese Einflüsse müssen strenggenommen berücksichtigt werden, dürfen aber hier vernachlässigt werden, da ihre Wirkungen stark gegen die Hauptstörungen zurücktreten, die man aus der Annahme einer sphärisch aufgebauten Atmosphäre ableiten kann.

2. Wenn wir die Flächen gleicher Luftdichte als unveränderliche konzentrische Kugelflächen ansehen, wird die Luftdichte lediglich eine Funktion des Abstandes r vom Erdmittelpunkt bzw. der Höhe $h = r - R$ ($R =$ mittlerer Erdhalbmesser) über der Erdoberfläche sein. In den untersten Luftschichten ist die mittlere Dichte ϱ sehr genau durch eine Exponentialfunktion

$$\varrho = \varrho_0 \, e^{-h/H}$$

darstellbar, in der $\varrho_0 = \varrho(h = 0)$ die Luftdichte am Erdboden (im Meeresniveau), h die Höhe in km und H eine ebenfalls in km auszudrückende Konstante bedeuten, und zwar ist

$$\frac{d\varrho}{dh} = -\frac{1}{H}\varrho_0 \, e^{-h/H} = -\frac{\varrho}{H}; \quad H = -\varrho \frac{dh}{d\varrho}.$$

In größeren Höhen gelten ähnliche Formeln, doch nimmt H mit der Höhe zu, die Dichteabnahme mit der Höhe wird kleiner. Setzt man aber

$$\varrho(h + \delta h) = \varrho_h \, e^{-\delta h/H},$$

so kann man innerhalb eines ziemlich großen Bereichs $|\delta h| \leqq \Delta h$ einen konstanten Wert $H(h)$ für die „Skalenhöhe" oder „Maßstabshöhe" H ansetzen. Der physikalischen Theorie zufolge ist $H = RT/gM$, wo R die Gaskonstante,

[1] G. E. Cook, D. G. King-Hele und D. M. C. Walker, Proceedings Royal Society (London) (A) *257*, 224 (1960); *264*, 88 (1961).

T die absolute Temperatur, g die Schwerebeschleunigung und M das mittlere Molekulargewicht der Luftgase ist. Die großen H-Unterschiede zwischen Tag und Nacht (Abb. 78) in großen Höhen sind vor allem temperaturbedingt. Das Molekulargewicht nimmt mit der Höhe wegen der fortschreitenden Dissoziation und Ionisation der Gase ab und trägt daher wesentlich zum Anwachsen von H bei. Auch g nimmt langsam mit der Höhe ab, aber erst bei $h = 1000$ km um 25% seines Wertes am Erdboden. Im Meeresniveau ist $H \approx 8$ km; dieser Wert entspricht der „Höhe der homogenen Atmosphäre". Die Zunahme von

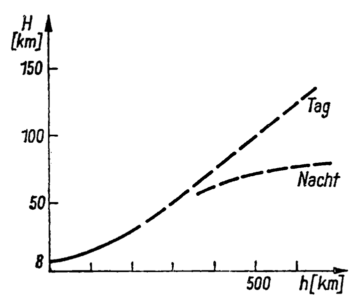


Abb. 78. Maßstabhöhe $H = RT/gM$ als Funktion der Höhe über dem Meeresniveau

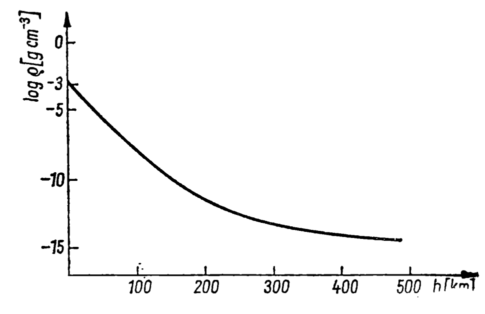


Abb. 79. Logarithmus der Luftdichte in Abhängigkeit von der Höhe über dem Meeresniveau

H mit der Höhe und die Abnahme der Dichte mit der Höhe zeigen die Abbildungen 78 und 79. Für die oberen Schichten (obere Stratosphäre, Ionosphäre und Exosphäre) sind diese Zahlen um 20% und mehr unsicher und auch zeitlich stark variabel.

Für die Bewegung eines Satelliten ist wegen der starken Abnahme der Dichte mit der Höhe praktisch nur diejenige Schicht maßgebend, die unmittelbar oberhalb der Perigäumshöhe liegt. Für Satelliten, die sich in Kreisbahnen bewegen, wird man also H konstant gleich dem Wert setzen dürfen, der jener Höhe entspricht, in der sich der Körper lange Zeit hindurch aufhält. Für Satelliten mit stark exzentrischen Bahnen wird es genügen, für H einen Mittelwert derjenigen Beträge einzusetzen, die es in der Schicht unmittelbar oberhalb des Perigäums der Bahn annimmt: Die Dichte in geringeren Höhen ist hier uninteressant, die in größeren Höhen bis zum Apogäum ist gegen die im Perigäum so gering, daß der Fehler ihrer Bestimmung mit einem zu kleinen H nicht stärker ins Gewicht fällt als die ohnehin ziemlich bedeutende Ungenauigkeit dieser Konstante selbst. Für exzentrische Satellitenbahnen mit geringer Perigäumshöhe ist es dagegen gelegentlich notwendig, den H-Wert in verschiedenen Bewegungsphasen zu wechseln.

3. Man darf annehmen, daß die Bremswirkung der Atmosphäre proportional der Luftdichte, dem mittleren Querschnitt des Satelliten (der während seiner Rotation um die Hauptträgheitsachse, falls er nicht kugelförmig ist, dem „drag" verschieden große Querschnitte aussetzt) und dem Quadrat der Relativgeschwindigkeit gegen die Luft, aber umgekehrt proportional der Masse des

Satelliten ist. Man darf also die Störbeschleunigung als einen Vektor darstellen, dessen Richtung derjenigen des Vektors $\mathfrak{v}$ ($|\mathfrak{v}| = v$) der Relativgeschwindigkeit des Satelliten entgegengesetzt ist und dessen Betrag man in der Form

$$f = \frac{1}{2} D \varrho v^2 \qquad \text{(XXII; 30)}$$

schreiben kann, wo D eine dem Satelliten eigentümliche, dem Verhältnis Querschnitt : Masse proportionale Konstante bedeutet.

4. Es soll angenommen werden, daß die Atmosphäre starr mit der Erde rotiert, d.h. also, daß (in den hier allein in Frage kommenden oberen Schichten) stationäre Strömungen (Winde) unberücksichtigt bleiben. Die Vernachlässigung der Effekte solcher stationärer Luftbewegungen, über die nur wenig Sicheres bekannt ist, läßt sich um so mehr verantworten, als die Geschwindigkeiten, um die es sich hier handeln würde, klein gegen die des Satelliten selbst sind.

5. Unberücksichtigt bleiben ferner in den folgenden Überlegungen die Störungen durch Mond und Sonne, die für $h < 1000$ km klein gegen die Störungen durch den „drag" bleiben und die, ebenso wie die durch die Anomalien des Gravitationsfeldes, zusätzlich angebracht werden können, wenn dies erforderlich ist. Vernachlässigt werden auch der Strahlungsdruck (der nur bei Ballonsatelliten mit großem Verhältnis Querschnitt : Masse, wie „Echo I" und „Echo II", eine größere Rolle spielt) sowie der Anteil des elektromagnetischen am Gesamtwiderstand, der in verschiedenen Höhen und zu verschiedenen Zeiten verschieden ist und bewirkt, daß die Größe D genaugenommen nicht ganz konstant ist.

6. Die Änderungen der Bahnelemente während eines Umlaufs sollen hier als so klein angesehen werden, daß ihre Quadrate vernachlässigt werden können. Das ist im allgemeinen berechtigt, ausgenommen für die letzten Umläufe eines Satelliten, bevor er in dichte Luftschichten gerät und verglüht.

Ist nun $\mathfrak{p}(x, y, z)$ der Ortsvektor des Satelliten in einem rechtwinkligen, geozentrischen, äquatorealen Koordinatensystem, $\mathfrak{V}(x, y, z)$ der Geschwindigkeitsvektor, so ist, wenn w die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation bezeichnet, $\mathfrak{V}'(-w\,y, +w\,x, 0)$ der Geschwindigkeitsvektor der mit der Erde starr rotierenden Atmosphäre am Ort des Satelliten. Die Relativgeschwindigkeit des Satelliten bezüglich der Atmosphäre wird also durch den Vektor

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{V} - \mathfrak{V}' = \mathfrak{v}(\dot{x} + w\,y, \dot{y} - w\,x, \dot{z}) \qquad \text{(XXII; 31)}$$

dargestellt, und es ist, wenn die Beträge dieser drei Vektoren mit v, V, V' bezeichnet werden,

$$\begin{aligned} v^2 &= (\dot{x} + w\,y)^2 + (\dot{y} - w\,x)^2 + \dot{z}^2 = \\ &= V^2 - 2w(x\,\dot{y} - y\,\dot{x}) + w^2(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Hierin ist, entsprechend (V; 7),

$$x\,\dot{y} - y\,\dot{x} = \varkappa \sqrt{p} \cos i, \qquad (\varkappa = k\sqrt{M})$$

zu setzen [M = Erdmasse, $p = a(1 - e^2)$ Parameter der Satellitenbahn, i ihre Neigung gegen den Erdäquator], und es ist

$$V'^2 = w^2(x^2 + y^2) = (w\, r \cos\beta)^2,$$

da $x = r\cos\beta\cos\lambda$, $y = r\cos\beta\sin\lambda$ ist (β, λ = geozentrische Breite und Länge, $r = R + h$ = Erdhalbmesser + Höhe). Man kann also schreiben

$$v^2 = V^2 - 2w\,\varkappa\sqrt{p}\cos i + w^2 r^2 \cos^2\beta$$

oder

$$\text{(XXII; 32)} \qquad v^2 = V^2\left(1 - \frac{w}{V^2}\varkappa\sqrt{p}\cos i\right)^2 + V'^2\left(1 - \frac{\varkappa^2 p}{r^2 V^2}\,\frac{\cos^2 i}{\cos^2\beta}\right).$$

Das zweite Glied auf der rechten Seite von (XXII; 32) kann gegen das erste vernachlässigt werden. Bezeichnet man hier die wahre Anomalie des Satelliten in seiner Bahn mit ϑ (da der Buchstabe v ja schon verbraucht ist), so ist

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + e\cos\vartheta), \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{p}(1 - e^2),$$

$$V^2 = \varkappa^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) = \frac{\varkappa^2}{p}(1 + 2e\cos\vartheta + e^2),$$

also

$$\text{(XXII; 33)} \qquad \frac{\varkappa^2 p}{r^2 V^2} = \frac{p^2}{r^2}(1 + 2e\cos\vartheta + e^2)^{-1} = \frac{(1 + e\cos\vartheta)^2}{1 + 2e\cos\vartheta + e^2}.$$

Ist ferner in Abb. 80 P der sphärische Ort des Satelliten und KP die Spur seiner Bahn, γ der Winkel bei P im rechtwinkligen Dreieck $\triangle KPQ$, so ist (Kosinussatz für Winkel)

$$\cos i = \sin\gamma\cos\beta.$$

Das letzte Glied in (XXII; 32) läßt sich also auch

$$V'^2\left\{1 - \frac{(1 + e\cos\vartheta)^2}{1 + 2e\cos\vartheta + e^2}\sin^2\gamma\right\}$$

schreiben. Für sehr kleine Exzentrizitäten ist der Faktor von $\sin^2\gamma$ in dieser Formel gleich $1 - e^2\sin^2\vartheta + \cdots$, also sehr nahe gleich der Einheit. Das gilt aber auch für große Exzentrizitäten; denn dann wird eine Störung durch den Luftwiderstand nur in der unmittelbaren Umgebung des Perigäums eintreten, wo $\cos\vartheta = 1$ ist. Das zweite Glied auf der rechten Seite von (XXII; 32) wird also mit

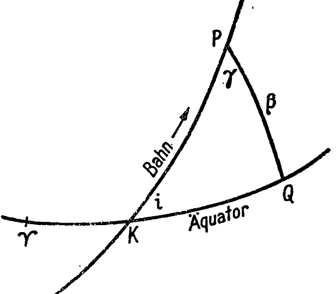


Abb. 80. Sphärischer Ort (P) eines Satelliten im Äquatorsystem

$$V'^2\cos^2\gamma = (r\,w\cos\beta\cos\gamma)^2 \leqq (r\,w)^2$$

hinreichend genau abgeschätzt. Da nun $r\,w$ wenig größer als die Rotationsgeschwindigkeit am Erdäquator, 0.465 km/s, aber $V \geqq 8$ km/s ist, folgt

$$\left(\frac{V'\cos\gamma}{V}\right)^2 \leqq \left(\frac{0.465}{8}\right)^2; \quad V'^2 \leqq 0.0033\, V^2.$$

Der Fehler, den man begeht, wenn man

$$v = V\left(1 - w\frac{\varkappa\sqrt{p}}{V^2}\cos i\right) \tag{XXII; 34}$$

setzt, beträgt also höchstens $^1/_6$% und fällt gegenüber der Unsicherheit der übrigen Faktoren von f (XXII; 30), insbesondere derjenigen der Luftdichte ϱ, kaum ins Gewicht.

Setzt man in (XXII; 34) gemäß (XXII; 33) $\varkappa\sqrt{p}/rV \approx 1$, so ergibt sich mit ausreichender Genauigkeit

$$w\frac{\varkappa\sqrt{p}}{V^2} = w\frac{r}{V}\,\frac{\varkappa\sqrt{p}}{rV} \approx w\frac{r_0}{V_0},$$

wo r_0, V_0 die Werte von r, V im Perigäum sind. Der Betrag der Geschwindigkeitsverzögerung durch den Luftwiderstand ist demnach

$$f = \frac{1}{2}D\varrho V^2\left(1 - w\frac{r_0}{V_0}\cos i\right)^2, \qquad \left(\varrho = \varrho_0 e^{-(r-r_0)/H_0}\right), \tag{XXII; 35}$$

wenn ϱ_0 die Luftdichte im Perigäum und H_0 die Skalenhöhe in der Schicht oberhalb des Perigäums bezeichnen.

Die Störbeschleunigung des Satelliten, die der Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ entgegengesetzt gerichtet ist, wird also durch den Vektor

$$\mathfrak{F} = -f\frac{\mathfrak{v}}{v} = -\frac{1}{2}D\varrho V\left(1 - w\frac{r_0}{V_0}\cos i\right)\mathfrak{v} = -F\,\mathfrak{v} \tag{XXII; 35a}$$

dargestellt. Zur Berechnung der Störungen der Bahnelemente durch den Luftwiderstand verwenden wir die Gleichungen (XVIII; 52a):

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{n\cos\varphi}\left\{S\sin\varphi\sin\vartheta + T\frac{p}{r}\right\},\\
\frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{na}\{S\sin\vartheta + T(\cos\vartheta + \cos E)\},\\
\frac{di}{dt} &= \frac{\cos\varphi}{na}W\frac{r}{p}\cos u,\\
\sin i\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\cos\varphi}{na}W\frac{r}{p}\sin u,\\
\sin\varphi\frac{d\tilde\omega}{dt} &= \frac{\cos\varphi}{na}\left\{-S\cos\vartheta + T\left(1 + \frac{r}{p}\right)\sin\vartheta + \right.\\
&\qquad\left. + W\frac{r}{p}\sin u\sin\varphi\tan\frac{i}{2}\right\},\\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\frac{d\tilde\omega}{dt} + 2\sin^2\frac{i}{2}\cos\varphi\frac{d\Omega}{dt} - 2\frac{r}{na^2}S.
\end{aligned}\right. \tag{XXII; 36}$$

In diesen Formeln ist $\sin\varphi = e$, $\cos\varphi = \sqrt{1 - e^2}$, $\tilde\omega = \Omega + \omega$, E die exzentrische Anomalie und ϑ, wie oben, die wahre Anomalie. Ferner sind S, T, W

die Koordinaten der Störbeschleunigung $\mathfrak{F}$ in einem rechtwinkligen System, dessen S-Richtung die des Ortsvektors ist (radiale Komponente), dessen T-Richtung (zirkulare Komponente) in der Bahnebene auf dem Ortsvektor im Sinne der Satellitenbewegung senkrecht steht, während die W-Richtung (normale Komponente) nach dem positiven Pol der Bahnebene zeigt. Zur Berechnung von S, T, W gehen wir von den äquatorealen Koordinaten v_x, v_y, v_z des Vektors $\mathfrak{v}$ aus, die nach (XXII; 31)

$$v_x = \dot{x} + w\,y; \quad v_y = \dot{y} - w\,x; \quad v_z = \dot{z}$$

lauten. Die entsprechenden Koordinaten im „begleitenden" STW-System erhält man dann vermittels der orthogonalen Transformation

$$\text{(XXII; 37)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \alpha_1(\dot{x} + w\,y) + \beta_1(\dot{y} - w\,x) + \gamma_1\,\dot{z}, \\ \eta &= \alpha_2(\dot{x} + w\,y) + \beta_2(\dot{y} - w\,x) + \gamma_2\,\dot{z}, \\ \zeta &= \alpha_3(\dot{x} + w\,y) + \beta_3(\dot{y} - w\,x) + \gamma_3\,\dot{z}, \end{aligned} \right.$$

in der die $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ die Richtungskosinus (XVIII; 39) sind, die den Orthogonalitätsbedingungen (XVIII; 40) genügen. Aus drei dieser Bedingungen, nämlich

$$\begin{aligned} \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 &= 0, \\ \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 &= 0, \\ \gamma_1\gamma_1 + \gamma_2\gamma_2 + \gamma_3\gamma_3 &= 0, \end{aligned}$$

die man als lineare Gleichungen für die γ_i ansehen kann, berechnet man diese Größen durch

$$\text{(XXII; 38)} \qquad \left\{ \begin{gathered} \Delta\gamma_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \quad \Delta\gamma_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \quad \Delta\gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, \\ (\Delta = |\alpha_i, \beta_i, \gamma_i| = 1). \end{gathered} \right.$$

Nach (IV; 20) und (IV; 17) ist nun im Äquatorsystem

$$\dot{x} = \frac{\varkappa}{\sqrt{p}}\,[q_x(\cos u + e\cos\omega) - p_x(\sin u + e\sin\omega)].$$

Setzt man hierin $\omega = u - \vartheta$ (u = Argument der Breite), so wird

$$\begin{aligned} \dot{x} = \frac{\varkappa}{\sqrt{p}}\,[q_x\{(1 + e\cos\vartheta)\cos u + e\sin\vartheta\sin u\} - \\ - p_x\{(1 + e\cos\vartheta)\sin u - e\sin\vartheta\cos u\}] \end{aligned}$$

oder, wenn für q_x, p_x die Größen (IV; 19) eingesetzt und die Beziehungen (XVIII; 39) benutzt werden,

$$\dot{x} = \frac{\varkappa}{\sqrt{p}}\,[\alpha_2(1 + e\cos\vartheta) + \alpha_1\,e\sin\vartheta], \quad \text{ebenso}$$

$$\dot{y} = \frac{\varkappa}{\sqrt{p}}\,[\beta_2(1 + e\cos\vartheta) + \beta_1\,e\sin\vartheta],$$

$$\dot{z} = \frac{\varkappa}{\sqrt{p}}\,[\gamma_2(1 + e\cos\vartheta) + \gamma_1\,e\sin\vartheta].$$

Führt man diese Ausdrücke in (XXII; 37) ein und berücksichtigt die Orthogonalitätsbedingungen, so folgt

$$\xi = \frac{\varkappa}{\sqrt{p}} e \sin\vartheta \qquad + w(\alpha_1 y - \beta_1 x),$$
$$\eta = \frac{\varkappa}{\sqrt{p}} (1 + e\cos\vartheta) + w(\alpha_2 y - \beta_2 x),$$
$$\zeta = \qquad w(\alpha_3 y - \beta_3 x).$$

Nun ist aber nach (IV; 13) $x = r\alpha_1$, $y = r\beta_1$, also

$$\alpha_i y - \beta_i x = r(\alpha_i \beta_1 - \alpha_1 \beta_i).$$

Da aber wegen (XXII; 38)

$$\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2 = -\gamma_3 = -\cos i; \quad \alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3 = \gamma_2 = \sin i \cos u$$

gilt, erhält man schließlich für die Koordinaten der Störbeschleunigung

$$S = -F\xi = -F \frac{\varkappa}{\sqrt{p}} e \sin\vartheta,$$
$$T = -F\eta = -F\left[\frac{\varkappa}{\sqrt{p}}(1 + e\cos\vartheta) - r w \cos i\right],$$
$$W = -F\zeta = -F r w \sin i \cos u.$$

Eine recht gute Näherungslösung unseres Problems ergibt sich schon, wenn man auf die kleinen von der Rotation der Atmosphäre herrührenden Terme verzichtet. Dann wird einfacher

$$S = -F\frac{\varkappa}{\sqrt{p}} e \sin\vartheta; \quad T = -F\frac{\varkappa}{\sqrt{p}}(1 + e\cos\vartheta); \quad W = 0,$$

wobei

$$F = \frac{1}{2} D \varrho V; \quad V = \frac{\varkappa}{\sqrt{p}} \sqrt{1 + 2e\cos\vartheta + e^2}; \quad \varrho = \varrho_0 e^{-(r - r_0)/H_0}$$

zu setzen ist. Wegen $W = 0$ folgt zunächst

$$\frac{di}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} = 0, \quad \text{also} \quad i = \text{const}, \quad \Omega = \text{const},$$

was übrigens auch ohne Rechnung klar ist; denn wenn man die Eigenbewegung der Luft vernachlässigt, so liegt der Störungsvektor in der Bahnebene, deren räumliche Lage also durch die Störung unbeeinflußt bleibt. Aber auch die Lage des Perigäums der Bahn bleibt, von kurzperiodischen Schwankungen abgesehen, konstant. Man findet

$$-S\cos\vartheta + T\left(1 + \frac{r}{p}\right)\sin\vartheta = -F\frac{\varkappa}{\sqrt{p}}\sin\vartheta\left\{1 + \frac{r}{p}(1 + e\cos\vartheta)\right\} =$$
$$= -2F\frac{\varkappa}{\sqrt{p}}\sin\vartheta.$$

Nun kann man aber schreiben

$$\sin\varphi \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \sin\varphi \frac{d\tilde{\omega}}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt} = \sin\varphi \frac{d\tilde{\omega}}{d\vartheta}\frac{\varkappa\sqrt{p}}{r^2} = -2F\frac{\cos\varphi}{n a}\frac{\varkappa}{\sqrt{p}}\sin\vartheta,$$

und es ist daher

$$\sin\varphi \frac{d\tilde{\omega}}{d\vartheta} = -2F\frac{\cos\varphi}{n a p} r^2 \sin\vartheta = -2\frac{\cos\varphi}{n a p}\sin\vartheta \cdot \Phi(\cos\vartheta),$$

da ϱ, V (somit auch F) und r Funktionen von $\cos\vartheta$ sind. Integriert man über einen vollen Umlauf, wobei wegen der kleinen Faktoren D und ϱ_0 alle vorkommenden Bahnelemente durch konstante Mittelwerte ersetzt werden dürfen, die sie während dieses Umlaufs zu irgendeinem Zeitpunkt annehmen, so erhält man

$$\sin\varphi\,\Delta\tilde{\omega} = -\frac{2\cos\varphi}{n a p}\int_0^{2\pi}\sin\vartheta\,\Phi(\cos\vartheta)\,d\vartheta = 0.$$

Die Perigäumslänge $\tilde{\omega}$ wird also zwar kleine kurzperiodische Störungen erleiden, die sich während des Umlaufs ausgleichen werden, aber keine säkularen Änderungen erfahren. Aus dem gleichen Grund darf auch $\Delta\varepsilon = 0$ gesetzt werden; denn aus der letzten Gleichung (XXII; 36) ergibt sich bei der Integration über einen vollen Umlauf $\Delta\tilde{\omega} = \Delta\Omega = 0$, und das Integral über rS verschwindet aus gleichen Ursachen wie das über $d\tilde{\omega}/dt$.

Somit verbleiben als säkular veränderliche Elemente nur a und φ bzw. $e = \sin\varphi$. Man erhält nach einfacher Reduktion

$$S\,e\sin\vartheta + T\frac{p}{r} = -F\frac{\varkappa}{\sqrt{p}}(1 + 2e\cos\vartheta + e^2)$$

und, da nach (II; 11) $\cos E = (r/a)\cos\vartheta + e$ ist,

$$S\sin\vartheta + T(\cos\vartheta + \cos E) = -2F\frac{\varkappa}{\sqrt{p}}(e + \cos\vartheta).$$

Somit folgt, wenn man wiederum

$$dt = \frac{r^2}{\varkappa\sqrt{p}}\,d\vartheta$$

setzt, nach Integration über einen Umlauf

$$\Delta a = -\frac{2}{n p\cos\varphi}\int_0^{2\pi} F\,r^2(1 + 2e\cos\vartheta + e^2)\,d\vartheta,$$

$$\Delta\varphi = -\frac{2}{n a p}\int_0^{2\pi} F\,r^2(e + \cos\vartheta)\,d\vartheta.$$

Es ist demnach Δa beständig negativ und $\Delta\varphi$ bzw. $\Delta e = \cos\varphi\,\Delta\varphi$ ebenfalls, solange $e > 0$ ist. Dagegen läßt sich zeigen, daß diese säkularen Störungen

sich auf die Perigäumsdistanz $a(1 - e)$ nur wenig auswirken. Es wird nämlich

$$\Delta[a(1-e)] = (1-e)\Delta a - a\cos\varphi\,\Delta\varphi =$$

$$= -\frac{2(1-e)}{n\,p\cos\varphi}\int_0^{2\pi} F\,r^2(1+2e\cos\vartheta+e^2)\,d\vartheta + \frac{2(1-e^2)}{n\,p\cos\varphi}\int_0^{2\pi} F\,r^2(e+\cos\vartheta)\,d\vartheta =$$

$$= -\frac{2}{n\,a\cos\varphi}\int_0^{2\pi} F\,r^2(1-\cos\vartheta)\,d\vartheta.$$

Da aber, solange noch $e > 0$ ist, die Störung hauptsächlich oder gar ausschließlich in der Umgebung des Perigäums wirkt, wo $\cos\vartheta \approx 1$ ist, wird das Integral nur schwach negativ ausfallen.

Eine ursprünglich exzentrische Bahn wird sich also, bei ständig abnehmendem a und e, d.h. auch bei sich mehr oder weniger rasch vermindernder Apogäumsdistanz $a(1 + e)$, aber fast gleichbleibender Perigäumshöhe, immer mehr der Kreisform nähern. Erst wenn diese erreicht ist und der Satellit sich während des ganzen Umlaufs im Bereich der Atmosphäre aufhält, wird die Bahn rasch zusammenbrechen. Auch diese Ergebnisse der Theorie kann man qualitativ ohne Rechnung einsehen: Ein Satellit, der sich auf einer exzentrischen Bahn bewegt, wird in einer mehr oder weniger breiten Umgebung des Perigäums in die Atmosphäre eintauchen. Da er sich während der größten Erdnähe parallel zur Erdoberfläche bewegt, wird seine Geschwindigkeit abgebremst, sein Erdabstand aber dabei kaum verändert werden. Er wird also den folgenden Umlauf mit verminderter Perigäumsgeschwindigkeit beginnen und nach Verlassen der dichteren Atmosphärenschichten eine im weiteren Verlauf kaum gestörte Bahn mit verminderter Energie, also kleinerer Halbachse, beschreiben, die ihn in ein merklich erdnäheres Apogäum, aber nach vollendetem Umlauf wiederum in ein kaum verändertes Perigäum führt. Bei jedem Eintauchen in die Atmosphäre werden daher die große Halbachse a und die lineare Exzentrizität $a\,e$ um nahezu den gleichen Betrag abnehmen, damit $a(1 - e)$ nahezu unverändert bleibt.

Die Berücksichtigung der Rotation der Atmosphäre gestaltet die Berechnung der Störungen komplizierter, ohne jedoch die obigen Ergebnisse wesentlich zu ändern. Diese zusätzlichen Störungen, die noch durch diejenigen zu ergänzen sind, die von der Abplattung der Schichten gleicher Luftdichte herrühren, verursachen unter anderem auch kleine säkulare Veränderungen derjenigen Elemente, die in der oben gegebenen vereinfachten Theorie als im Mittel konstant erscheinen. Diese säkularen Störungen, insbesondere der Neigung, der Knoten- und der Perigäumslänge, erscheinen als kleine Zusätze zu den entsprechenden Störungen durch die Abplattung des Erdkörpers und durch Sonne und Mond. Die Trennung dieser Effekte ist schwierig und läßt sich nur durchführen, wenn ein umfangreiches Material an Beobachtungen von Satellitenbewegungen mit möglichst verschiedenen Bahneigenschaften zur Verfügung steht.

Zur Illustration der oben ausgeführten provisorischen Theorie diene[1]) Abb. 81, in der für einen typischen Satelliten mit verhältnismäßig kurzer Lebensdauer die säkularen Änderungen der Perigäumsdistanz, der Exzentrizität und der Umlaufszeit (die proportional $a^{3/2}$ abnimmt) in Tagen nach dem Start aufgezeichnet sind. Man erkennt, daß die Perigäumshöhe während des größten Teiles der „Lebenszeit" des Satelliten fast konstant bleibt und erst kurz vor dem Verglühen rapide abnimmt, während Exzentrizität und Umlaufsperiode vom ersten Tage an ziemlich gleichmäßig kleiner werden.

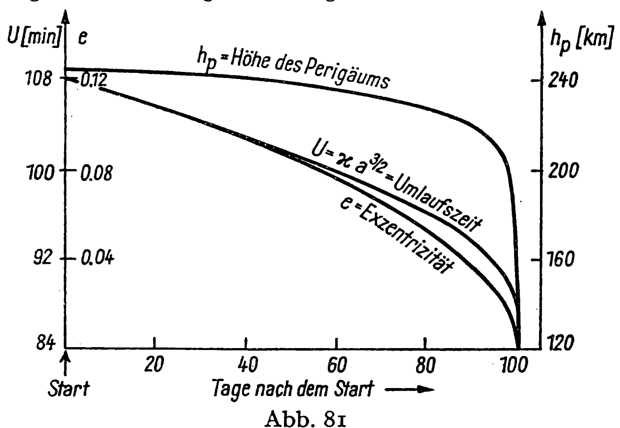


Abb. 81

Säkulare Bahnänderung eines typischen Satelliten von 100 Tagen Lebensdauer

Beim Start: $h_p = a(1-e) - R = 244$ km; $e = 0.12$; $U = 108$ min

191. *Der stationäre Satellit*

Es wurde bereits am Schluß des Abschnitts 187 darauf hingewiesen, daß die Störungen, die ein Satellit infolge einer Elliptizität des Erdäquators erleidet, am genauesten beobachtet werden könnten, wenn sich der Satellit auf einer Kreisbahn (oder einer schwach exzentrischen Ellipse) bewegt, deren Umlaufszeit gleich einem Sterntag ist. Vorausgesetzt, daß die Erde kugelförmig-symmetrisch aufgebaut ist und keine Störungen durch andere Himmelskörper stattfinden, würde ein solcher Satellit beständig im Zenit irgendeines Ortes der Erdoberfläche verweilen (bzw. sich niemals weit von ihm entfernen). Die geozentrische Distanz r_0 der stationären Kreisbahn ergibt sich aus der Bedingung, daß in diesem Abstand vom Erdmittelpunkt die Gravitationsbeschleunigung gleich- und entgegengesetztgerichtet der Zentrifugalbeschleunigung sein muß. Es gilt also, wenn M die Erdmasse, ω die siderische Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation bedeutet,

$$\frac{k^2 M}{r_0^2} = \omega^2 r_0; \quad r_0 = \sqrt[3]{\frac{k^2 M}{\omega^2}}.$$

[1]) Abb. 81 ist der in der Fußnote S. 618 zitierten Abhandlung von COOK, KING-HELE und WALKER entnommen, die auch eine explizite Theorie der Störungen durch den Luftwiderstand enthält.

Setzt man in den üblichen Einheiten (AE für die Länge, mittlerer Sonnentag für die Zeit, Sonne = 1 für die Masse)

$$k = 0.0172021; \quad M = 1:333434; \quad \omega = 1.002738 \cdot 2\pi,$$

so ergibt sich

$$r_0 = 0.00028817 \text{ AE} \approx 42140 \text{ km}.$$

Die vollständige Theorie der Bewegung eines solchen *stationären Satelliten* unter voller Berücksichtigung aller Anomalien des Erdpotentials ist recht kompliziert, selbst wenn man die recht erheblichen Störungen durch Mond und Sonne zunächst vernachlässigt. Versuche dazu sind verschiedentlich unternommen worden; insbesondere sei auf die Arbeit von P. Musen und Ann E. Bailie[1]) verwiesen, aus der unter anderem hervorgeht, daß eine stabile Position des stationären Satelliten nur zu erwarten ist, wenn sein mittlerer Ort auf der Verlängerung der kleinen Achse der Äquatorellipse der Erde liegt, sofern man der Erdfigur die Form eines dreiachsigen Ellipsoids zuschreibt.

Diese eingehende und mit erheblichem Aufwand an mathematischen Hilfsmitteln durchgeführte Stabilitätsuntersuchung bezieht sich, ebenso wie ähnliche Arbeiten anderer Autoren,[2]) auch auf stark exzentrische und gegen die Äquatorebene geneigte Bahnen. Begnügt man sich mit der einfacheren Annahme, daß die ungestörte Bahn des stationären Satelliten kreisförmig ist und in der Äquatorebene verläuft, so lassen sich die wesentlichsten Ergebnisse dieser Theorie bedeutend einfacher und durchsichtiger demonstrieren, wie nachfolgend gezeigt werden soll.

Für ein dreiachsiges Erdellipsoid erhält man nach Abschnitt 28 für die Potentialfunktion, wenn A, B, C die drei Hauptträgheitsmomente des Ellipsoids, r den Abstand des Aufpunktes vom Erdmittelpunkt,

$$x = r\cos\varphi\cos\lambda; \quad y = r\cos\varphi\sin\lambda; \quad z = r\sin\lambda$$

seine rechtwinkligen geozentrischen äquatorealen Koordinaten bedeuten und $\varkappa^2 = k^2 M$ (M = Erdmasse) gesetzt wird,

$$\begin{aligned} U &= \frac{\varkappa^2}{r}\left\{1 - \frac{1}{2M r^2}\left[(C-A)\left(1 - 3\frac{x^2}{r^2}\right) + (C-B)\left(1 - 3\frac{y^2}{r^2}\right)\right] + \cdots\right\} = \\ &= \frac{\varkappa^2}{r}\left\{1 - \frac{1}{2M r^2}\left[(C-A)\left(1 - 3\frac{r^2 - y^2 - z^2}{2r^2} - \frac{3}{2}\frac{x^2}{r^2}\right) + \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + (C-B)\left(1 - 3\frac{r^2 - x^2 - z^2}{2r^2} - \frac{3}{2}\frac{y^2}{r^2}\right)\right] + \cdots\right\} = \\ &= \frac{\varkappa^2}{r}\left\{1 + \frac{2C - A - B}{4M r^2}\left(1 - 3\frac{z^2}{r^2}\right) + \frac{3(B-A)}{4M r^4}(x^2 - y^2) + \cdots\right\} \end{aligned}$$

---

[1]) P. Musen und A. E. Bailie, J.G.R. *67*, 1123 (1962).

[2]) Siehe z. B. Morando, B.A. *24*, 47 (1963).

oder, wenn man die obigen Ausdrücke für die Koordinaten einsetzt,

$$U = \frac{\varkappa^2}{r} \left\{1 + \beta \frac{R^2}{r^2} (1 - 3\sin^2\varphi) + \gamma \frac{R^2}{r^2} \cos^2\varphi \cos 2\lambda + \cdots \right\}.$$

Hierbei sind

$$\beta = \frac{2C - A - B}{4MR^2}; \quad \gamma = \frac{3(B - A)}{4MR^2}, \quad (R = \text{mittlerer Äquatorradius})$$

kleine Konstante. Da hier nur die Abhängigkeit der Potentialfunktion von der Länge interessiert und die Bewegung in der Äquatorebene erfolgen soll, dürfen wir $\varphi = 0$ und ohne Einschränkung der Allgemeinheit auch $\beta = 0$ setzen. Es ist dann

$$U = \frac{\varkappa^2}{r} \left\{1 + \gamma \frac{R^2}{r^2} \cos 2\lambda + \cdots \right\}, \qquad (\varkappa^2 = k^2 M). \tag{XXII; 39}$$

Die Größenordnung der Konstante γ ist von derjenigen der Abplattung α des Erdäquators nicht sehr verschieden. Sind a, b, c die Halbachsen des Erdellipsoids und $R = (a + b)/2$ der mittlere Äquatorradius, so kann man die Abplattung des Äquators durch

$$\alpha = \frac{a - b}{R} = 2 \frac{a - b}{a + b}$$

ausdrücken, und es ist nach SUBBOTIN (S. 600) $\alpha = {}^1/_{30000}$. Nimmt man ferner an, daß die x-Achse des Koordinatensystems mit der großen Achse der Äquatorellipse zusammenfällt, so ist gemäß (III; 101) unter Voraussetzung homogener Massenverteilung im Erdkörper, was zur größenordnungsmäßigen Abschätzung von γ genügt,

$$A = \frac{1}{5} M (b^2 + c^2); \quad B = \frac{1}{5} M (a^2 + c^2); \quad B - A = \frac{1}{5} M (a^2 - b^2),$$

also

$$\gamma = \frac{3}{20} \frac{a^2 - b^2}{R^2} = \frac{3}{20} \frac{(a + b)(a - b)}{R^2} = \frac{3}{10} \alpha \approx 10^{-5}.$$

Nach diesen Festsetzungen ist es leicht, das Verhalten eines stationären Satelliten im Feld eines Erdpotentials von der Form (XXII; 39) zu untersuchen. Wir führen in der Äquatorebene ein $\xi\,\eta$-Koordinatensystem ein, in dessen Ursprung der Mittelpunkt der Erde steht und das sich mit der rotierenden Erde, d. h. mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi/\text{mittlerer Sterntag} = 1.002738$ dreht. Dann wird die Position eines stationären Satelliten in diesem System konstant sein. Die Differentialgleichungen der Bewegung irgendeines praktisch masselosen Satelliten lauten dann nach (XI; 51)

$$\left\{\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\omega \dot{\eta} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}, \\ \ddot{\eta} + 2\omega \dot{\xi} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \eta}, \end{aligned}\right. \tag{XXII; 40}$$

wo nun aber

$$\Omega = U + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 = \frac{\varkappa^2}{r}\left\{1 + \gamma\frac{R^2}{r^2}\cos 2\lambda\right\} + \frac{1}{2}\omega^2 r^2$$

mit

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2; \quad \cos 2\lambda = \frac{\xi^2 - \eta^2}{r^2}$$

die Potentialfunktion im rotierenden System bedeutet. Stationäre Positionen sind dann an die Bedingungen

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\xi} = 0; \quad \frac{\partial\Omega}{\partial\eta} = 0$$

gebunden. Aus

$$\Omega = \frac{\varkappa^2}{r} + \gamma\frac{\varkappa^2 R^2}{r^5}(\xi^2 - \eta^2) + \frac{1}{2}\omega^2 r^2$$

folgt aber

$$\text{(XXII; 41)} \quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\Omega}{\partial\xi} &= -\frac{\varkappa^2}{r^3}\xi - 5\gamma\frac{\varkappa^2 R^2}{r^7}\xi(2\xi^2 - r^2) + 2\gamma\frac{\varkappa^2 R^2}{r^5}\xi + \omega^2\xi, \\ \frac{\partial\Omega}{\partial\eta} &= -\frac{\varkappa^2}{r^3}\eta - 5\gamma\frac{\varkappa^2 R^2}{r^7}\eta(r^2 - 2\eta^2) - 2\gamma\frac{\varkappa^2 R^2}{r^5}\eta + \omega^2\eta. \end{aligned}\right.$$

Setzt man wieder $\xi = r\cos\lambda$, $\eta = r\sin\lambda$, so findet man, daß diese Ausdrücke verschwinden, wenn

$$\text{(XXII; 42)} \quad \left\{\begin{aligned} &\text{a)} \quad -\frac{\varkappa^2\xi}{r^3}\left\{1 + \gamma\frac{R^2}{r^2}(10\cos^2\lambda - 7) - \frac{\omega^2 r^3}{\varkappa^2}\right\} = 0, \\ &\text{b)} \quad -\frac{\varkappa^2\eta}{r^3}\left\{1 - \gamma\frac{R^2}{r^2}(10\sin^2\lambda - 7) - \frac{\omega^2 r^3}{\varkappa^2}\right\} = 0 \end{aligned}\right.$$

ist. Falls $\gamma \neq 0$ ist, sind diese beiden Gleichungen nur miteinander verträglich, wenn entweder $\xi = 0$ oder $\eta = 0$ ist; denn wären ξ und η beide von Null verschieden, so müßten die beiden Klammerausdrücke gleichzeitig verschwinden, was auf den Widerspruch

$$10(\cos^2\lambda + \sin^2\lambda) = 14$$

führt.

Daraus folgt, daß stationäre Punkte nur auf der ξ-Achse und der η-Achse liegen können. Im ersteren Fall ($\eta = 0$, $\cos^2\lambda = 1$) ist (XXII; 42b) eo ipso erfüllt, während (XXII; 42a) nur gilt, wenn

$$1 + 3\gamma\frac{R^2}{r^2} - \omega^2\frac{r^3}{\varkappa^2} = 0$$

ist. Der geozentrische Abstand r_1 dieses Punktes genügt also der Gleichung

$$\text{(XXII; 43a)} \quad r_1^5 - \frac{\varkappa^2}{\omega^2}r_1^2 = 3\gamma\frac{\varkappa^2 R^2}{\omega^2}.$$

Da $\gamma \approx 10^{-5}$ ist, ist r_1 von $r_0 = \sqrt[3]{\varkappa^2/\omega^2} = 42140$ km $\approx 6.6R$ nur wenig verschieden. Schreibt man also

$$r_1^3 - \frac{\varkappa^2}{\omega^2} = 3\gamma \frac{\varkappa^2}{\omega^2} \frac{R^2}{r_1^2},$$

so darf man rechts $r_1^2 = r_0^2$ setzen, so daß genau genug

$$r_1^3 = \frac{\varkappa^2}{\omega^2}\left(1 + 3\gamma \frac{R^2}{r_0^2}\right), \quad r_1 = r_0\left(1 + \gamma \frac{R^2}{r_0^2}\right)$$

ist, und es gibt daher auf der ξ-Achse die beiden stationären Punkte $S_1(\pm r_1, 0)$.

Für die stationären Punkte $S_2(0, \pm r_2)$, $\sin^2\lambda = 1$ auf der η-Achse gilt offenbar dasselbe, wenn man γ mit $-\gamma$ vertauscht, und es ist daher

(XXII; 43b) $$r_2^5 - \frac{\varkappa^2}{\omega^2} r_2^2 = -3\gamma \frac{\varkappa^2 R^2}{\omega^2}$$

und genähert

$$r_2 = r_0\left(1 - \gamma \frac{R^2}{r_0^2}\right).$$

Um Art und Stabilität von Satellitenbewegungen in unmittelbarer Nähe dieser stationären Punkte untersuchen zu können, bedient man sich derselben Methode, die CHARLIER zur Untersuchung von Librationsbewegungen in der Umgebung der Librationszentren $L_1, \ldots, L_5$ im „problème restreint" (s. Abschnitt 116 bis 118) benutzt hat. Betrachten wir zunächst Bewegungen in der Umgebung von $S_1(r_1, 0)$ und sind

$$u = \xi - r_1; \quad v = \eta$$

kleine Größen, deren Quadrate vernachlässigt werden dürfen, so kann man die Gleichungen (XXII; 40)

(XXII; 44) $$\ddot{u} - 2\omega\,\dot{v} = \frac{\partial\Omega}{\partial\xi}; \quad \ddot{v} + 2\omega\,\dot{u} = \frac{\partial\Omega}{\partial\eta}$$

schreiben, und es gilt, wenn der Index 0 bedeutet, daß die betreffende Größe für den Punkt S_1 genommen werden soll, und wenn zur Abkürzung

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\right)_0 = \Omega_\xi; \quad \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\eta}\right)_0 = \Omega_\eta; \quad \left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial\xi^2}\right)_0 = \Omega_{\xi\xi};$$

geschrieben wird,

(XXII; 45) $$\begin{cases} \dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi} = \Omega_\xi + u\Omega_{\xi\xi} + v\Omega_{\xi\eta} + \cdots, \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta} = \Omega_\eta + u\Omega_{\xi\eta} + v\Omega_{\eta\eta} + \cdots. \end{cases}$$

Hierbei ist $\Omega_\xi = \Omega_\eta = 0$, ferner nach (XXII; 41)

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} = \omega^2 - \frac{\varkappa^2}{r^3}\left\{1 - \frac{1}{r^2}(3\xi^2 + 2\gamma R^2) + 5\gamma\frac{R^2}{r^4}(5\xi^2 - \eta^2) - \right.$$

$$\left. - 35\gamma\frac{R^2}{r^6}\xi^2(\xi^2 - \eta^2)\right\},$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} = \omega^2 - \frac{\varkappa^2}{r^3}\left\{1 - \frac{1}{r^2}(3\eta^2 - 2\gamma R^2) + 5\gamma\frac{R^2}{r^4}(\xi^2 - 5\eta^2) - \right.$$

$$\left. - 35\gamma\frac{R^2}{r^6}\eta^2(\xi^2 - \eta^2)\right\}.$$

Für $\xi = r_1$, $\eta = 0$, $r = r_1$ ergibt sich also

$$\Omega_{\xi\xi} = \omega^2 + 2\frac{\varkappa^2}{r_1^3}\left(1 + 6\gamma\frac{R^2}{r_1^2}\right),$$

$$\Omega_{\eta\eta} = \omega^2 - \frac{\varkappa^2}{r_1^3}\left(1 + 7\gamma\frac{R^2}{r_1^2}\right),$$

während $\Omega_{\xi\eta} = 0$ ist, da man leicht zeigen kann, daß $\partial^2\Omega/\partial\xi\,\partial\eta$ den Faktor $\xi\,\eta$ enthält. Setzt man überdies nach (XXII; 43a)

$$\omega^2 = \frac{\varkappa^2}{r_0^3} \approx \frac{\varkappa^2}{r_1^3}\left(1 + 3\gamma\frac{R^2}{r_1^2}\right),$$

so erhält man schließlich

$$\Omega_{\xi\xi} = 3\omega^2 + 6\gamma\frac{\varkappa^2 R^2}{r_1^5} > 0; \quad \Omega_{\eta\eta} = -4\gamma\frac{\varkappa^2 R^2}{r_1^5} < 0.$$

Die Punkte $S_1(\pm r_1, 0)$ sind demnach *Sattelpunkte* der Potentialfunktion.

Ebenso zeigt man, daß für die stationären Lagen $S_2(0, \pm r_2)$ auf der η-Achse neben $\Omega_{\xi\eta} = 0$

$$\Omega_{\xi\xi} = \omega^2 - \frac{\varkappa^2}{r_2^3}\left(1 - 7\gamma\frac{R^2}{r_2^2}\right); \quad \Omega_{\eta\eta} = \omega^2 + 2\frac{\varkappa^2}{r_2^3}\left(1 - 6\gamma\frac{R^2}{r_2^2}\right)$$

oder, da nach (XXII; 43b)

$$\omega^2 = \frac{\varkappa^2}{r_2^3}\left(1 - 3\gamma\frac{R^2}{r_2^2}\right)$$

gesetzt werden darf,

$$\Omega_{\xi\xi} = +4\gamma\frac{\varkappa^2 R^2}{r_2^5} > 0; \quad \Omega_{\eta\eta} = 3\omega^2 - 6\gamma\frac{\varkappa^2 R^2}{r_2^5} > 0$$

ist; denn es ist ja

$$6\gamma\frac{\varkappa^2 R^2}{r_2^5} \approx 6\gamma\,\omega^2\frac{R^2}{r_2^2} \ll 3\omega^2.$$

Die Punkte S_2 sind demnach *echte Minima* der Potentialfunktion.

Daraus geht hervor, daß der stationäre Satellit auf der ξ-Achse in den Punkten S_1 eine instabile Lage hat, auf der η-Achse in den Punkten S_2 aber eine

stabile, d.h., daß er in der Umgebung von S_2 dauernd verweilen kann, sofern er nicht durch starke äußere Störungen aus ihr entfernt wird. In der Tat: Setzt man in einer infinitesimalen Umgebung eines der vier stationären Punkte

$$u = F e^{\lambda t}; \quad v = G e^{\lambda t},$$

so stellen diese Funktionen für geeignete Eigenwerte λ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichungen (XXII; 44) dar; denn setzen wir u, v und ihre Ableitungen in (XXII; 44) und (XXII; 45) ein und dividieren durch den gemeinsamen, stets positiven Faktor $e^{\lambda t}$, so ergibt sich, mit $\Omega_\xi = \Omega_\eta = \Omega_{\xi\eta} = 0$,

$$F(\lambda^2 - \Omega_{\xi\xi}) - 2G\omega\lambda = 0,$$
$$2F\omega\lambda + G(\lambda^2 - \Omega_{\eta\eta}) = 0.$$

Aus diesen homogenen linearen Gleichungen ist das Verhältnis $F : G$ bestimmbar, wenn die Determinante

$$(\lambda^2 - \Omega_{\xi\xi})(\lambda^2 - \Omega_{\eta\eta}) + 4\omega^2\lambda^2$$

verschwindet, also λ^2 der quadratischen Gleichung

$$\lambda^4 - (\Omega_{\xi\xi} + \Omega_{\eta\eta} - 4\omega^2)\lambda^2 = -\Omega_{\xi\xi}\Omega_{\eta\eta}$$

genügt. Für $S_1(r_1, 0)$ ist aber

$$\Omega_{\xi\xi} + \Omega_{\eta\eta} - 4\omega^2 = -\omega^2 + 2\gamma\frac{\varkappa^2 R^2}{r_1^5} = -\omega^2 + 2\varepsilon_1,$$

$$-\Omega_{\xi\xi}\Omega_{\eta\eta} = 12\gamma\,\omega^2\frac{\varkappa^2 R^2}{r_1^5} = 12\omega^2\varepsilon_1,$$

wobei

$$\varepsilon_1 = \gamma\frac{\varkappa^2 R^2}{r_1^5} \approx \gamma\,\omega^2\left(\frac{R}{r_1}\right)^2 \approx \gamma\left(\frac{2\pi}{6.6}\right)^2$$

ein von γ nur wenig verschiedener Faktor ist, dessen Quadrat man daher vernachlässigen darf. Es ist also

$$\lambda^2 = -\frac{1}{2}(\omega^2 - 2\varepsilon_1) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\omega^2 - 2\varepsilon_1)^2 + 12\omega^2\varepsilon_1} \approx$$
$$\approx -\frac{1}{2}(\omega^2 - 2\varepsilon_1)\left[1 \mp \left(1 + 24\frac{\varepsilon_1}{\omega^2}\right)\right].$$

Die beiden Lösungen sind also, bis zur Ordnung ε_1 genau,

$$\lambda_1^2 \approx \frac{1}{2}(\omega^2 - 2\varepsilon_1)\frac{24\varepsilon_1}{\omega^2} \approx 12\varepsilon_1 > 0,$$

$$\lambda_2^2 \approx -\frac{1}{2}(\omega^2 - 2\varepsilon_1)\left(2 + 24\frac{\varepsilon_1}{\omega^2}\right) \approx -(\omega^2 + 10\varepsilon_1) < 0.$$

Ähnlich wie in der Umgebung der Librationszentren L_1, L_2, L_3 des „problème restreint" gibt es also auch hier zwei Scharen von Lösungen, eine exponentielle und eine periodische. Die erstere besteht aus konzentrischen, koaxialen

und ähnlichen Hyperbeln, deren gemeinsame Asymptoten nur wenig gegen die v-Achse geneigt sind. Die zweite besteht aus konzentrischen, koaxialen und ähnlichen Ellipsen, die tautochron mit einer von ω nur wenig verschiedenen mittleren Winkelgeschwindigkeit durchlaufen werden, nämlich mit der mittleren Bewegung

$$\nu = \sqrt{-\lambda_2^2} = \omega \sqrt{1 + 10 \frac{\varepsilon_1}{\omega^2}}$$

und der Umlaufsperiode $2\pi/\nu$, die nur wenig größer als 1 Sterntag ist. Auf Grund der Formeln des Abschnitts 118, die auch hier gelten, ergibt sich das Achsenverhältnis der Ellipsen zu

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{\Omega_{\xi\xi} + \nu^2}{\Omega_{\eta\eta} + \nu^2}} = \sqrt{\frac{4\omega^2 + 16\varepsilon_1}{\omega^2 + 6\varepsilon_1}} \approx 2\left(1 - \frac{\varepsilon}{\omega^2}\right),$$

d.h., die großen Achsen der Ellipsen, die auf der u-Achse senkrecht stehen, sind nahezu doppelt so groß wie die kleinen. Der periodische Anteil der Lösungskurven geht also für $\varepsilon_1 \to 0$ in Bewegungen über, die im festen Koordinatensystem KEPLERschen Ellipsen mit kleiner Exzentrizität um die Erde entsprechen und deren Umlaufszeit gleich einem Sterntag ist. Diese partikulären Lösungen unseres Problems entsprechen also stationären Bewegungen auf schwach exzentrischen Bahnen mit geringer Apsidendrehung.

In der engeren Umgebung von $S_2(0, r_2)$ existieren zwei Scharen von periodischen Lösungen. Setzen wir

$$\varepsilon_2 = \gamma \frac{\varkappa^2 R^2}{r_2^5} \approx \gamma \omega^2 \left(\frac{R}{r_2}\right)^2,$$

so gilt dort

$$\Omega_{\xi\xi} + \Omega_{\eta\eta} - 4\omega^2 = -(\omega^2 + 2\varepsilon_2),$$

$$-\Omega_{\xi\xi}\Omega_{\eta\eta} = -12\omega^2\varepsilon_2$$

und daher

$$\lambda^2 = -\frac{1}{2}(\omega^2 + 2\varepsilon_2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\omega^2 + 2\varepsilon_2)^2 - 12\omega^2\varepsilon_2}.$$

Die beiden Lösungen lauten also, bis zur Ordnung ε_2 genau,

$$\lambda_1^2 \approx -12\varepsilon_2; \quad \lambda_2^2 \approx -(\omega^2 - 10\varepsilon_2)$$

und entsprechen zwei Ellipsenscharen, die harmonisch mit den mittleren Bewegungen $\nu_i = \sqrt{-\lambda_i^2}$ durchlaufen werden. Die zweite Schar mit dem Argument $\nu_2 \approx \omega - 5\varepsilon_2$ geht wieder für $\varepsilon \to 0$ in schwach exzentrische KEPLERsche Ellipsen über. Interessanter ist die erstere Schar mit der sehr kleinen mittleren Bewegung $\nu_1 = \sqrt{12\varepsilon_2}$ und dem Achsenverhältnis

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{\Omega_{\xi\xi} + \nu_1^2}{\Omega_{\eta\eta} + \nu_1^2}} = \sqrt{\frac{16\varepsilon_2}{3\omega^2 + 6\varepsilon_2}} \approx \frac{4}{\omega}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{3}}.$$

Diese Ellipsen, deren große Achsen tangential zur Bahn des Satelliten verlaufen, sind äußerst schmal. Die Resonanzbewegung des Satelliten in diesen Ellipsen

erscheint also hauptsächlich als ein sehr langsames Hin- und Herpendeln um den stationären Punkt (der in der Verlängerung der kleinen Achse der Äquatorellipse liegt) und senkrecht zum Radiusvektor des Satelliten. Die Periode ist äußerst lang: Mit $\omega \approx 2\pi$, $\gamma \approx 10^{-5}$ und $R/r_2 \approx 0.15$ würde man

$$T = \frac{2\pi}{\nu_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{12\varepsilon_2}} \approx \frac{2\pi}{\sqrt{12 \cdot 10^{-5}}}\,\frac{1}{2\pi \cdot 0.15} = 609 \text{ Tage}$$

erhalten.

Infolge der sehr geringfügigen Abplattung des Erdäquators ist die Stabilität dieser Resonanzbewegungen um S_2 nur schwach, und es ist sehr zweifelhaft, ob sich eine solche Bewegungsform gegen die starken, wenn auch kurzperiodisch wirksamen Störungskräfte durch Mond und Sonne auch nur über eine einzige Periode durchsetzen kann. Die praktische Verwendbarkeit stationärer Satelliten zur empirischen Bestimmung der Äquatorabplattung wird also durch eine genauere Theorie mit Einschluß sämtlicher Störungen und durch die Erfahrung entschieden werden müssen. Für den Theoretiker ist aber auch diese noch unvollkommene Lösung des Problems interessant genug, stellt sie doch ein Analogon zu der Theorie der Trojanerbahnen im „problème restreint" dar. Wie dort kann man auch hier die von Brown und Thüring (Abschnitt 120 und 163) benutzten Methoden zur Ausdehnung der Theorie auf nichtinfinitesimale Librations- bzw. Resonanzbahnen mutatis mutandis anwenden. Zweifellos würde eine solche Analyse ergeben, daß diese in endliche Bereiche ausgedehnten Bahnen um die Punkte S_2 sich der Kreisbahn anschmiegen und

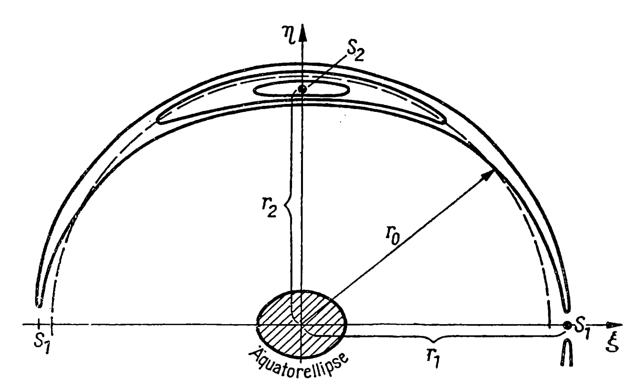


Abb. 82. Rückläufige Resonanzbewegungen eines stationären Satelliten in der Äquatorebene, schematisch

schließlich in die spitzen Hyperbeln in der Umgebung der Punkte S_1 einmünden und daß die Asymptoten dieser Hyperbelscharen Tangenten der Grenzbahnen sind, die das System der periodischen Librationsbahnen abschließen (siehe Abb. 82).

Die bisher in Umlauf gebrachten stationären Satelliten der „Syncom"-Klasse (Syncom III wurde am 19. August 1964 von Kap Kennedy aus gestartet) erfüllen die Bedingungen der hier entwickelten Theorie nur angenähert. Die

Beobachtung ihrer Bewegung wird aber, abgesehen von der erhofften Klärung geophysikalischer Fragen, auch der Theorie neuen Anreiz bieten. Noch interessanter würde vielleicht die Beobachtung von Satelliten sein, die in der Umgebung der Librationszentren L_4 und L_5 des Systems Erde–Mond verweilen. Librationsbahnen um diese Zentren wären sicher stabiler als die um die stationären Punkte S_2, werden aber beträchtlich durch die Sonne gestört werden, so daß auch hier zweifelhaft erscheint, ob sie auf die Dauer bestehen können. Wir wollen hier diese Frage nicht näher diskutieren. Eine Überschlagsrechnung, die von L. SEHNAL[1]) angestellt worden ist, hat in der Tat ergeben, daß die Störungen durch die Sonne ausreichen, um die Stabilität der Librationsbewegung in Frage zu stellen. Immerhin ist es hinreichend wahrscheinlich, daß es längere Zeit, unter Umständen mehrere Jahre, dauern wird, ehe ein Satellit aus einer solchen „Trojanerbahn" endgültig verdrängt wird.

192. *Bahnbestimmung künstlicher Erdsatelliten. Methode von* KUSTAANHEIMO

Die theoretische und numerische Berechnung der säkularen, lang- und kurzperiodischen Störungen der Bewegung von Erdsatelliten durch den Mond, die Sonne und die großen Planeten ist eine Aufgabe der allgemeinen Störungsrechnung, die als Sonderfall der Theorie der Satelliten des Planetensystems im dritten Band dieses Werkes Platz finden wird. Theoretische und numerische Untersuchungen über die Möglichkeiten, künstliche Himmelskörper (ohne zusätzliche Schubbeschleunigungen während des Fluges, d.h. auf reinen Gravitationsbahnen) zum Mond oder zu den Planeten zu entsenden oder diese Himmelskörper zeitweilig oder dauernd umkreisen zu lassen, gestatten zur Zeit noch keine abschließende Darstellung. Einige Bemerkungen zu diesem letztgenannten, äußerst aktuellen Problem sollen aber in den nächsten beiden Abschnitten, den letzten dieses Bandes, gemacht werden.

Ganz in den Kreis der Fragen, die in diesem Band noch kurz behandelt werden müssen, gehören jedoch die Methoden, aus den Beobachtungen künstlicher Satelliten von der Erdoberfläche aus deren Bahnbewegung zu bestimmen. Diese Verfahren bieten ja die Möglichkeit, die Theorien der Satellitenbewegung durch die Erfahrung zu überprüfen bzw. zu kontrollieren, ob ein Satellit nach dem Start die beabsichtigte Umlaufbahn erreicht hat.

Das Problem der Bahnbestimmung der Erdsatelliten unterscheidet sich in verschiedener Hinsicht stark von dem der Bahnbestimmung der Planeten und Kometen des Sonnensystems, das im ersten Band ausführlich behandelt worden ist. Die Gründe dafür lassen sich leicht übersehen:

1. Die oskulierenden Bahnen dieser Himmelskörper sind Kegelschnitte, deren Brennpunkte im Erdmittelpunkt liegen. Während die Bewegung eines Planetoiden um die Sonne von einem Punkt aus beobachtet wird, der (nahezu) eine elliptische Bahn um die Sonne ausführt, erfolgt die Beobachtung der Satellitenbewegung um den Erdmittelpunkt von einem Ort (dem Beobach-

---

[1]) L. SEHNAL, B.A.C. *11*, 130 (1960).

tungsort oder Topozentrum) aus, der sich infolge der Erdrotation auf einem Kreis um die Erdachse bewegt.

2. Satellit und Topozentrum sind zur Zeit der günstigsten Beobachtung im allgemeinen nur wenig voneinander entfernt. Unter Umständen beträgt der Abstand des Objekts vom Beobachter nur wenige hundert Kilometer, also nur einen geringen Bruchteil der Abstände beider Punkte vom Erdmittelpunkt. Mit anderen Worten: Während bei der Bahnbestimmung der Planetoiden und Kometen die tägliche Parallaxe eine untergeordnete Rolle spielt und mitunter (so bei ersten Kometenbahnbestimmungen) ganz vernachlässigt werden darf, ist sie hier von wesentlicher Bedeutung.

3. Die topozentrische Bewegung des Satelliten ist rasch, sein sphärischer Ort ändert sich schon in Bruchteilen der Sekunde merklich. Auch die oskulierenden Bahnelemente sind raschen Änderungen unterworfen. Die Aufgabe, die sechs Elemente der oskulierenden Bahn aus drei beobachteten sphärischen Örtern zu bestimmen, wird also nur dann auf die Methoden der klassischen Bahnbestimmung zurückzuführen sein, wenn die Beobachtungszeiten dicht aufeinanderfolgen und mit sehr großer Genauigkeit (etwa auf Zehntelsekunden) bestimmt werden. Die Zwischenzeiten werden im allgemeinen nur wenige Minuten betragen dürfen, wenn der Satellit in geringer Höhe über der Erdoberfläche beobachtet wird.

4. Die in der klassischen Bahnbestimmung benutzten Einheiten (Sonnenmasse gleich 1, mittlerer Abstand Erde–Sonne gleich 1, mittlerer Sonnentag gleich 1 oder auch siderisches Jahr gleich 2π) sind hier ungeeignet und müssen durch andere ersetzt werden, die dem Problem besser angepaßt sind.

Was den letztgenannten Punkt anbetrifft, so ist es nicht verwunderlich, wenn heute (erst wenige Jahre nach dem Start des ersten Satelliten) noch verschiedene Vorschläge zur Festsetzung der Einheiten diskutiert werden. Es scheint sich aber der von S. HERRICK[1]) und von BAKER und MAKEMSON[2]) stammende Vorschlag einzubürgern. Danach definiert man

$$\begin{aligned}
&\text{Einheit der Masse} = \text{Erdmasse} = {}^1/_{333434}\ \text{Sonnenmassen},\\
&\text{Einheit der Länge} = \text{Halbmesser des Erdäquators} = \sin\pi_\odot\ \text{AE},\\
&\text{Einheit der Zeit} \quad = 1\ \text{min Ephemeridenzeit}.
\end{aligned}$$

Da die Gravitationskonstante (s. Abschnitt 18) die Dimension $[l^{3/2}\, t^{-1}\, m^{-1/2}]$ hat, ändert sich ihr numerischer Wert nach Einführung der neuen Einheiten. Ist $k_0 = 0.01720210$ der in den alten Einheiten ausgedrückte Wert dieser Konstante, so wird nun

$$k = k_0 L^{3/2} T^{-1} M^{-1/2}$$

mit

$$L = (\sin\pi_\odot)^{-1}; \quad T = 1440; \quad M = 333434$$

---

[1]) S. HERRICK, Astrodynamics. New York 1961.

[2]) R. M. L. BAKER und M. W. MAKEMSON, An introduction to astrodynamics. New York und London 1960.

zu setzen sein. Benutzt man für die Sonnenparallaxe den heute (durch Radarecho von der Venus bestimmten) wahrscheinlichsten Wert $\pi_\odot = 8''794365 \pm$ $\pm\, 0''000011$, so findet man[1])

$$k = 0.0743096,$$

eine Zahl, die wohl in Zukunft nur noch geringfügig korrigiert werden dürfte.

P. KUSTAANHEIMO führt die Bahnbestimmung des Satelliten aus drei topozentrischen Örtern (α_i, δ_i) für die Zeitpunkte t_i $(i = 1, 2, 3)$ mittels eines Iterationsverfahrens durch, indem er weitgehend die in Kapitel V definierten *lokalen Invarianten* der Zweikörperbewegung und anstatt der Zeit die zuerst von SUNDMAN und später unabhängig von K. STUMPFF eingeführte regularisierende Variable

$$q = \int_0^\tau \frac{d\tau}{r}$$

benutzt, wobei $\tau = k(t - t_2)$ die auf den Beobachtungszeitpunkt t_2 bezogene und in Einheiten von $1/k$ [min] ausgedrückte Zwischenzeit bedeutet.

Es seien nun die scheinbaren Örter α_i, δ_i des Satelliten auf das wahre Äquinoktium zur Zeit der Beobachtung bezogen und von der Refraktion und der täglichen Aberration befreit. Die Einheitsvektoren $\mathfrak{r}_i$, die in die Richtung vom Topozentrum zum Satelliten zeigen, haben dann die äquatorealen Koordinaten

$$\mathfrak{r}_i(\cos\delta_i \cos\alpha_i,\ \cos\delta_i \sin\alpha_i,\ \sin\delta_i).$$

Wenn also ϱ_i die topozentrischen Distanzen des Satelliten bezeichnen, so sind $\varrho_i\,\mathfrak{r}_i$ dessen topozentrische Ortsvektoren. Sind ferner

$$\mathfrak{q}_i(\varrho'\cos\varphi'\cos\Theta_i,\ \varrho'\cos\varphi'\sin\Theta_i,\ \varrho'\sin\varphi')$$

die geozentrischen Koordinaten des Topozentrums, wobei ϱ', φ' geozentrische Distanz und geozentrische Breite des Beobachtungsortes, Θ_i die Ortssternzeiten der Beobachtungen sind, so haben die geozentrischen Ortsvektoren des Satelliten die Form

$$\text{(XXII; 46)} \qquad \mathfrak{p}_i = \varrho_i\,\mathfrak{r}_i + \mathfrak{q}_i.$$

Die Vektoren $\mathfrak{p}_i$, deren Beträge mit $|\mathfrak{p}_i| = r_i$ bezeichnet werden mögen, genügen (in der oskulierenden Bahn) den Differentialgleichungen

$$\ddot{\mathfrak{p}}_i = -\frac{\mathfrak{p}_i}{r_i^3},$$

[1]) Der in der nachstehenden Methode von P. KUSTAANHEIMO (Über die Bestimmung der oskulierenden Bahn eines künstlichen Erdsatelliten. S.S.F. *26*, Nr. 1, 1961) benutzte Wert $k = 0.07436 57$ ist mit der Sonnenparallaxe $\pi_\odot = 8''79$ berechnet worden, einem von H. SPENCER-JONES abgeleiteten und inzwischen überholten Wert dieser Konstante.

da die Gravitationskonstante $k = 1$ wird, wenn durch Punkte Ableitungen nach τ bezeichnet werden, und man darf nach (V; 61)

$$\text{(XXII; 47)} \quad \mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_2 F_i + \dot{\mathfrak{p}}_2 G_i, \qquad (i = 1, 3)$$

$$\text{(XXII; 48)} \quad \dot{\mathfrak{p}}_i = \mathfrak{p}_2 \dot{F}_i + \dot{\mathfrak{p}}_2 \dot{G}_i$$

schreiben. Dabei bedeuten F_i, G_i die in Abschnitt 40 und 42 eingeführten Funktionen der Zwischenzeiten τ_i und der für $t = t_2$ gültigen lokalen Invarianten des Problems. Ferner besteht zwischen den $\mathfrak{p}_i$ die Ebenenbedingung (IX; 4),

$$\text{(XXII; 49)} \quad \mathfrak{p}_2 = n_1 \mathfrak{p}_1 + n_3 \mathfrak{p}_3,$$

in der die Dreiecksverhältnisse n_i nach Abschnitt 80 durch

$$n_1 = \frac{G_3}{F_1 G_3 - F_3 G_1}; \quad n_3 = -\frac{G_1}{F_1 G_3 - F_3 G_1}$$

ausgedrückt werden können, so daß man statt (XXII; 49) und (XXII; 46) auch

$$\text{(XXII; 50)} \quad (\varrho_2 \mathfrak{r}_2 + \mathfrak{q}_2)(F_1 G_3 - F_3 G_1) - (\varrho_1 \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{q}_1) G_3 + (\varrho_3 \mathfrak{r}_3 + \mathfrak{q}_3) G_1 = 0$$

schreiben kann. Da die $\mathfrak{r}_i$, $\mathfrak{q}_i$ Vektoren mit bekannten Koordinaten sind, lassen sich aus den drei linearen Skalargleichungen, die der Vektorgleichung (XXII; 50) entsprechen, ϱ_1, ϱ_2 und ϱ_3 berechnen, falls die F_i, G_i bekannt sind. Dies geschieht, indem man (XXII; 50) nacheinander skalar mit $[\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3]$, $[\mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_1]$, $[\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2]$ multipliziert. Man erhält dann, wenn man das gemischte Produkt

$$D = (\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3) = |\cos\delta_i \cos\alpha_i, \cos\delta_i \sin\alpha_i, \sin\delta_i|$$

und den Vektor

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{q}_2(F_1 G_3 - F_3 G_1) + \mathfrak{q}_3 G_1 - \mathfrak{q}_1 G_3$$

einführt,

$$\text{(XXII; 51)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\varrho_1 D G_3 = (\mathfrak{Q} \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3), \\ &\varrho_2 D (F_1 G_3 - F_3 G_1) = -(\mathfrak{Q} \mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_1), \\ &\varrho_3 D G_1 = -(\mathfrak{Q} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2). \end{aligned} \right.$$

Kustaanheimo hat gezeigt und durch ein Rechenbeispiel gesichert, daß man bei erdnahen Satelliten mit der Anfangshypothese $F_i = 1$, $G_i = \tau_i$ auskommt. Im klassischen Bahnbestimmungsproblem wird diese Annahme (s. Abschnitt 79) im allgemeinen als unzureichend bezeichnet, da sie einer geradlinigen Bewegung des Himmelskörpers während des Beobachtungszeitraums entsprechen würde, also die dynamischen Beziehungen zwischen den drei Örtern ganz außer acht läßt. Allerdings hat H. Bucerius[1]) bewiesen, daß eine iterative Bahnbestimmung unter Umständen (die im Satellitenproblem weitgehend erfüllt sind) auch mit dieser rohen Ausgangsnäherung konvergiert, wenn man nur die dynamischen Beziehungen im nächsten Iterationsschritt einführt.

---

[1]) H. Bucerius, Bahnbestimmung als Randwertproblem I–V. A.N. *278*, 193 und 204 (1950); *280*, 73 (1953); *281*, 97 (1954); *282*, 107 (1955).

Der Iterationsprozeß, der zur Lösung des Problems führt, läuft dann etwa folgendermaßen ab:

1. Mit $F_i = 1$, $G_i = \tau_i$ $(i = 1, 3)$ ergeben die Gleichungen (XXII; 51) genäherte ϱ_i $(i = 1, 2, 3)$.

2. Aus (XXII; 46) bestimmt man die $\mathfrak{p}_i$, d.h. die Koordinaten und die Beträge r_i der geozentrischen Ortsvektoren. Insbesondere ergibt sich die lokale Invariante

$$\mu = \frac{1}{r_2^3},$$

die zur Beobachtungszeit t_2 gehört.

3. Aus einer der beiden Vektorgleichungen (XXII; 47) ergibt sich

$$\dot{\mathfrak{p}}_2 = \frac{\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_2 F_i}{G_i} \; (i = 1 \text{ oder } 3); \quad \dot{\mathfrak{p}}_2^2 = V_2^2,$$

also die Geschwindigkeit zur Zeit t_2. Man wird $i = 1$ oder $i = 3$ wählen, je nachdem τ_1 oder τ_3 dem Betrage nach größer ist. Bei sehr kleinen Zwischenzeiten empfiehlt es sich, die Numerierung der Zeitpunkte so zu wählen, daß $t_3 > t_1 > t_2$ ist, da dann $G_3 \approx \tau_3 = k(t_3 - t_2)$ möglichst groß wird.

4. Aus dem Energiesatz

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r_2} - V_2^2 = r_2^2 \varrho$$

erhält man $1/a$ bzw. die Invariante ϱ.

5. Aus

$$(\mathfrak{p}_2 \dot{\mathfrak{p}}_2) = r_2 \dot{r}_2 = r_2^2 \sigma$$

folgt die Invariante σ.

6. Mit den τ_i und den für t_2 gültigen Invarianten μ, ϱ, σ bzw. $\varepsilon = \mu - \varrho$ könnte man jetzt nach dem in den Abschnitten 41 und 42 beschriebenen Verfahren, nach Auflösung der Hauptgleichung (V; 51), die F_i, G_i für $i = 1, 3$ nach (V; 70) bestimmen und mit ihnen die Rechnung so oft wiederholen, bis sich ihre Werte nicht mehr ändern.

Man kann aber die Auflösung der Hauptgleichung umgehen, wenn man folgendermaßen vorgeht: Nach (V; 71) ist

$$\Delta \dot{F}_i = -c_{1i} \mu z_i \tau_i = \sigma(1 - F_i) - \mu G_i,$$

also

$$z_i = \frac{\mu G_i - \sigma(1 - F_i)}{c_{1i} \mu \tau_i},$$

wo

$$c_{1i} = \frac{\sin \lambda_i}{\lambda_i} = 1 - \frac{\lambda_i^2}{3!} + \frac{\lambda_i^4}{5!} - \cdots$$

im Laufe der ersten Iteration gleich 1 gesetzt werden darf. Ist damit z_i gefunden, so erhält man mit

$$\xi_i = \mu \tau_i^2; \quad \zeta_i = \varepsilon \tau_i^2; \quad \lambda_i^2 = \varrho \tau_i^2 z_i^2,$$

$$c_{2i} = \frac{1}{2!} - \frac{\lambda_i^2}{4!} + \frac{\lambda_i^4}{6!} - \cdots; \quad c_{3i} = \frac{1}{3!} - \frac{\lambda_i^2}{5!} + \frac{\lambda_i^4}{7!} - \cdots$$

nach (V; 70)
$$F_i = 1 - c_{2i}\,\xi_i\,z_i^2; \quad G_i = \tau_i(1 - c_{3i}\,\xi_i\,z_i^3)$$
und damit die Anfangswerte für die nächste Iteration.

Die Konvergenz der Iteration mit den Anfangswerten $F_i = 1$, $G_i = \tau_i$ führt im allgemeinen erst nach ziemlich vielen Schritten zum Ziel. Für Rechnungen mit schnellen elektronischen Anlagen (die in der Praxis der Satellitenüberwachung unentbehrlich sind) fällt dieser Nachteil kaum ins Gewicht; denn die Rechenzeit wird durch Vermehrung der Iterationsschritte nur unerheblich verlängert, wenn die einzelnen Schritte nach einem möglichst unkomplizierten Algorithmus erfolgen. Will man dennoch mit einer besseren Anfangshypothese beginnen, so bieten sich dafür mehrere Wege an:

Steht der Satellit während der Beobachtung in geringer Höhe über der Erdoberfläche, so ist es zweckmäßig, mit $\mu_i = r_i^{-3} = 1$ und daher mit
$$F_i \approx 1 - \frac{1}{2}\tau_i^2; \quad G_i = \tau_i\left(1 - \frac{1}{6}\tau_i^2\right)$$
in die Iteration einzugehen. Befindet er sich dagegen in größerem Erdabstand und womöglich in einer stark exzentrischen Bahn, so ist es unter Umständen besser, r_2 aus der LAGRANGEschen Schlüsselgleichung achten Grades (s. Abschnitt 68) zu berechnen, d.h., in der mittleren Gleichung (XXII; 51) genauer
$$F_i = 1 - \frac{1}{2}\tau_i^2\,r_2^{-3}; \quad G_i = \tau_i\left(1 - \frac{1}{6}\tau_i^2\,r_2^{-3}\right)$$
zu setzen. Man erhält dann wegen $|\mathfrak{r}_2| = 1$, $|\mathfrak{q}_2| = \varrho' \approx 1$ aus (XXII; 46)

(XXII; 52)
$$r_2^2 \approx \varrho_2^2 + 2\varrho_2(\mathfrak{r}_2\,\mathfrak{q}_2) + 1$$
und aus (XXII; 51)

(XXII; 53)
$$\varrho_2 = k_2 + s_2\,r_2^{-3},$$
wobei, bis zu Termen dritter Ordnung in den Zwischenzeiten,
$$k_2 D(\tau_3 - \tau_1) = -(\mathfrak{q}_2\{\tau_3 - \tau_1\} + \mathfrak{q}_3\tau_1 - \mathfrak{q}_1\tau_3,\ \mathfrak{r}_3,\ \mathfrak{r}_1),$$
$$s_2 D(\tau_3 - \tau_1) = \frac{1}{6}\tau_1\tau_3(\mathfrak{q}_3\{2\tau_1 - \tau_3\} - \mathfrak{q}_1\{2\tau_3 - \tau_1\},\ \mathfrak{r}_3,\ \mathfrak{r}_1)$$
ist. Da nun während der kurzen, nach Minuten zählenden Zwischenzeiten die Vektoren $\mathfrak{q}_i$ nur geringfügig voneinander abweichen, darf man genähert $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{q}_2$ setzen und erhält die Abschätzungen
$$k_2 \approx 0; \quad s_2 \approx -\frac{\tau_1\tau_3}{2D}(\mathfrak{q}_2\,\mathfrak{r}_3\,\mathfrak{r}_1).$$
Aus (XXII; 52) und (XXII; 53) ergibt sich dann durch Elimination von ϱ_2 die Schlüsselgleichung in der Form
$$r_2^8 - r_2^6 - 2s_2\,r_2^3(\mathfrak{r}_2\,\mathfrak{q}_2) - s_2^2 = 0.$$

Nun ist aber $s_2 \approx \varrho_2 r_2^3$ positiv und $(\mathfrak{r}_2\, \mathfrak{q}_2)$ ebenfalls; denn es ist ja $(\mathfrak{r}_2\, \mathfrak{q}_2) = \varrho' \cos\varDelta$, wenn $\varDelta$ den Winkel zwischen den geozentrischen Richtungen nach dem Beobachtungsort und dem Satelliten bezeichnet. Dieser ist aber sicher $< 90°$, wenn der Satellit über dem Horizont des Beobachters steht. Die LAGRANGEsche Gleichung hat also nach dem Satz von DESCARTES (s. Abschnitt 52 und 113) höchstens *eine* positive Wurzel, da nur ein einziger Vorzeichenwechsel stattfindet. Da aber eine solche Wurzel sicher vorhanden ist, ist die Lösung der Gleichung eindeutig. Eine „Erdlösung", wie in der klassischen Bahnbestimmung, gibt es hier nicht, da die Bewegung des Topozentrums der Differentialgleichung der Satellitenbewegung nicht genügt.

Die iterative Lösung der Gleichung achten Grades läßt sich in das Iterationsverfahren leicht einbauen. Da $r_2 > 1$ ist, ist es vorteilhaft, $u = r_2^{-1}$ als Unbekannte einzuführen. Die Schlüsselgleichung nimmt dann die Form

$$f(u) = s_2^2\, u^8 + 2 s_2 (\mathfrak{r}_2\, \mathfrak{q}_2)\, u^5 + u^2 - 1 = 0$$

an, und es ist

$$f'(u) = 8 s_2^2\, u^7 + 10 s_2 (\mathfrak{r}_2\, \mathfrak{q}_2)\, u^4 + 2u.$$

Nach dem NEWTONschen Näherungsverfahren schreibt man dann, wenn u_n das Ergebnis der n-ten Iteration bezeichnet,

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} = u_n + f(u_n)\, \varphi,$$

und es genügt, den Faktor φ nach der ersten oder zweiten Iteration konstant zu halten, ohne dadurch die Konvergenz des Verfahrens zu beeinträchtigen.

Nach Abschluß der Hypothesenrechnung sind dann nach (III; 13) und (III; 16) die Koordinaten der Vektoren

$$[\mathfrak{p}_2\, \dot{\mathfrak{p}}_2] = \mathfrak{g}\left(\sqrt{p}\, \sin i \sin \Omega,\ -\sqrt{p}\, \sin i \cos \Omega,\ \sqrt{p}\, \cos i\right)$$

und, da $\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{p}_2 / r_2$ ist,

$$[\dot{\mathfrak{p}}_2\, \mathfrak{g}] - \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{f}\,(h \cos\Omega - k \sin\Omega \cos i,\ h \sin\Omega + k \cos\Omega \cos i,\ k \sin i)$$

mit $h = e \cos\omega$, $k = e \sin\omega$ [siehe (V; 10)] bekannt. Aus ihnen folgen die oskulierenden Bahnelemente $p = a(1 - e^2)$ Ω, i, e, ω. An Stelle der Periheldurchgangszeit T (die bei kleinen Exzentrizitäten ungenau bestimmbar wird) als sechstem Element pflegt man bei Satellitenbahnen die Durchgangszeit durch den aufsteigenden (oder absteigenden) Knoten mit der Äquatorebene zu berechnen. Dieser Durchgang ist meist scharf ausgeprägt, da die Satellitenbahnen durchweg große Neigungen aufweisen. Der Knotendurchgang ist dadurch charakterisiert, daß die z-Koordinate des Ortsvektors $\mathfrak{p}$ verschwindet. Bezeichnet man also mit p_z und v_z die z-Koordinaten von $\mathfrak{p}_2$ und $\dot{\mathfrak{p}}_2$, so folgt

$$0 = p_z F_0 + v_z G_0,$$

wobei

$$F_0 = 1 - c_{20}\, \mu\, \tau_0^2\, z_0^2; \quad G_0 = \tau_0 (1 - c_{30}\, \mu\, \tau_0^2\, z_0^3)$$

ist und $\tau_0 = k(t_0 - t_2)$, z_0 Zwischenzeit und Lösung der Hauptgleichung für den Knotendurchgang bedeuten. Setzt man nun $\tau_0 z_0 = y$, so folgt

$$F_0 = 1 - c_{20}\,\mu\, y^2; \quad G_0 = \tau_0 - c_{30}\,\mu\, y^3$$

und nach (V; 54)

(XXII; 54)
$$\tau_0 = c_{10}\, y + c_{20}\,\sigma\, y^2 + c_{30}\,\mu\, y^3,$$

also

$$G_0 = c_{10}\, y + c_{20}\,\sigma\, y^2,$$

und es ist, mit $\lambda_0^2 = \varrho\, y^2$,

$$c_{10} = 1 - \frac{\lambda_0^2}{3!} + \frac{\lambda_0^4}{5!} - \cdots; \quad c_{20} = \frac{1}{2!} - \frac{\lambda_0^2}{4!} + \frac{\lambda_0^4}{6!} - \cdots;$$

$$c_{30} = \frac{1}{3!} - \frac{\lambda_0^2}{5!} + \frac{\lambda_0^4}{7!} - \cdots.$$

Man kann also y durch Iteration aus

$$0 = p_z(1 - c_{20}\,\mu\, y^2) + v_z(c_1\, y + c_2\,\sigma\, y^2)$$

bestimmen und erhält dann τ_0 aus (XXII; 54).

Als eine weitere Methode zur raschen Bestimmung von Satellitenbahnelementen kann auch das in Abschnitt 74 beschriebene Verfahren von VÄISÄLÄ dienen, das man unverändert anwenden kann, wenn man an Stelle der dort benutzten topozentrischen Sonnenkoordinaten X, Y, Z die topozentrischen Koordinaten des Erdmittelpunktes,

$$X = -\varrho' \cos\varphi' \cos\Theta; \quad Y' = -\varrho' \cos\varphi' \sin\Theta; \quad Z' = -\varrho' \sin\varphi',$$

einführt, außerdem natürlich die oben definierten neuen Einheiten. Mit geeigneten Ausgangsannahmen über die dort eingeführten σ und σ' wird man rasch zum Ziele kommen, bei erdnahen Satelliten etwa mit $\sigma = 0$, $\sigma' = 0.1$.

193. *Der Flug zum Mond*

Solange es gestattet ist, die Bahnbewegung eines künstlichen Himmelskörpers als Störungsproblem zu behandeln, haben – wie in verschiedenen Abschnitten dieses Kapitels gezeigt worden ist – die den hier vorliegenden Verhältnissen angepaßten Methoden der allgemeinen Störungsrechnung in der klassischen Himmelsmechanik immer Erfolg. Diese Methoden sind aber nicht mehr anwendbar, wenn es sich darum handelt, die Bewegung eines Raumgeschosses auf *beliebigen* Bahnen im Gravitationsfeld der großen Himmelskörper zu verfolgen, insbesondere auf Bahnen, die aus dem Einflußgebiet eines von ihnen in das eines anderen hinüberführen. Hier ist vor allem das Problem der Entsendung eines Geschosses zum Mond oder in dessen Nähe sehr aktuell, wobei man vorerst die Gravitationswirkung der Sonne und der Planeten (die nötigenfalls mit Hilfe der Störungsrechnung berücksichtigt werden können)

als zweitrangig außer acht lassen darf. Drei Sonderprobleme dieser Art verdienen spezielles Interesse:

1. das Problem des Auftreffens auf den Mond,
2. das Problem einer Rückkehrbahn nach Umfliegen des Mondes,
3. das Problem des Einfangs eines Satelliten durch den Mond.

Um sich einen ersten Überblick über die Beschaffenheit möglicher Lösungen dieser Aufgaben zu verschaffen, wird man sich der numerischen Integration der Differentialgleichungen der Bewegung eines Erdsatelliten unter dem Einfluß des Mondes bedienen. Dabei wird es im allgemeinen genügen, die Bahn des Mondes um die Erde als kreisförmig anzunehmen und die Bewegung des Satelliten auf die Ebene der Mondbahn zu beschränken. Dann läßt sich jede der obengenannten Fragen im Rahmen des eingeschränkten Dreikörperproblems beantworten, d.h., man wird ein rotierendes, ebenes $\xi\,\eta$-Koordinatensystem zugrunde legen, in dem die endlichen Massen das Verhältnis 1 : 81.4 haben und feste Plätze auf der ξ-Achse einnehmen.

Numerische Bahnrechnungen dieser Art, die mit schnellen elektronischen Maschinen rasch und mühelos durchführbar sind, liegen heute bei der Aktualität dieser Dinge schon in großer Zahl vor, werden aber mit wenigen Ausnahmen der Allgemeinheit noch nicht zugänglich sein. Über eine ziemlich umfassende numerische Untersuchung des Mondflugproblems hat V.E. Egorov[1]) berichtet. Die folgenden Ausführungen stützen sich im wesentlichen auf die Ergebnisse dieser im Mathematischen Institut der Akademie der Wissenschaften der UdSSR durchgeführten elektronischen Rechnungen. Neuere Untersuchungen, deren Ergebnisse beim Abschluß des Manuskripts noch nicht verfügbar waren, sind in den USA durchgeführt worden, insbesondere im Marshall Space Flight Center, Huntsville (Alabama).

Am einfachsten läßt sich die erste Aufgabe lösen: die Anfangsbedingungen für die Bahn eines Geschosses zu finden, das im Freiflug den Mond trifft. Hierzu ist nur notwendig, eine Kegelschnittbahn zu finden, die von einem erdnahen Punkt außerhalb der Erdatmosphäre aus mit einer gewissen, nach Größe und Richtung zu bestimmenden Geschwindigkeit startet und nach einer gewissen Zeit mit dem (vorerst als masselos anzunehmenden) Mond zusammentrifft. Ist dies nämlich der Fall, so ist auch ohne Rechnung einzusehen, daß der durch den Mond *gestörte* Satellit erst recht den Mond treffen wird. Der Satellit wird von seiner Kegelschnittbahn erst dann merklich abweichen, wenn er die Einflußsphäre des Mondes erreicht, dann aber infolge der vom Mond ausgeübten Beschleunigung noch rascher und sicherer auf ihn aufstürzen.

Zur Lösung dieses Problems bedienen wir uns eines festen ebenen $x\,y$-Systems mit dem Erdmittelpunkt als Ursprung, in dem der Mond eine Kreisbahn mit dem Halbmesser r_1 beschreiben möge. Zur Zeit t_0, der Startzeit des Satelliten, nehme der Mond die Stellung $M_0(-r_1, 0)$ ein (Abb. 83). Zur selben Zeit soll der Start des Satelliten (beim Brennschluß der letzten Beschleunigungs-

[1]) V. E. Egorov, Einige Probleme der Dynamik des Fluges zum Mond (russ.; dtsch. Übers. in: Künstliche Erdsatelliten, 2. Sonderband der „Fortschritte der Physik", Berlin 1959).

stufe) von einem Ort außerhalb der Erdatmosphäre (im Abstand $r_0 = R + h$, wo h die Höhe über der Erdoberfläche bedeutet) und in der Mondbahnebene mit einer nach Größe und Richtung noch festzusetzenden Geschwindigkeit erfolgen.

Die Form der ungestörten Satellitenbahn, die in der Mondbahnebene liegen soll, ist in ziemlich weiten Grenzen willkürlich wählbar, aber den Bedingungen

$$a(1 - e) \leqq r_0; \quad a(1 + e) \geqq r_1$$

unterworfen, da die Bahn sonst Punkte mit den Abständen r_0 (Start) und r_1 (Aufsturz) vom Erdmittelpunkt nicht enthalten würde. Diese Bedingungen kann man auch

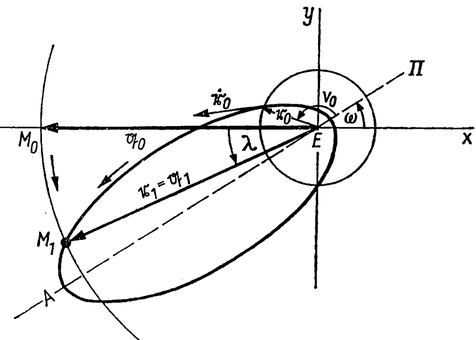


Abb. 83. Auftreffen eines Raumgeschosses auf den Mond

$$e \geqq \frac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0}; \quad a \geqq \frac{r_1}{1 + e}$$

schreiben. Da nun $r_0/r_1 \approx 1/60$ ist, folgt, daß etwa $e \geqq 59/61 \approx 1 - 1/30$ sein muß. Die Bahn wird also eine sehr parabelnahe Ellipse wie in Abb. 83 oder eine Parabel oder eine Hyperbel sein.

Sind nun e und a [bzw. $p = a(1 - e^2)$] unter den obigen Einschränkungen vorgegeben, so folgt aus der Bahngleichung

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}$$

die wahre Anomalie für die Zeitpunkte t_0 und t_1 aus

$$\cos v_0 = \frac{1}{e}\left(\frac{p}{r_0} - 1\right); \quad \cos v_1 = \frac{1}{e}\left(\frac{p}{r_1} - 1\right).$$

Die Lage der Auftreffbahn im xy-System ist dann durch den Winkel ω bestimmt, den die Apsidenlinie ΠA mit der Richtung EM_0 bildet. Dieser Winkel ergibt sich aber, wenn man mit Hilfe der aus Band I bekannten Beziehungen der Zweikörperbewegung die Zwischenzeit $t_1 - t_0$ berechnet, in der die wahre Anomalie des Satelliten von v_0 bis v_1 zunimmt. Ist diese Zeit bekannt, so liest man aus Abb. 83 ab, daß

$$\omega + v_1 - 180° = \lambda = n(t_1 - t_0)$$

ist, wo n die Winkelbewegung des Mondes in der Zeiteinheit bedeutet.

Damit ist die Aufgabe im Prinzip gelöst. Die praktische Ausführung der Lösung vereinfacht sich sehr, wenn man als Flugbahn eine Parabel annimmt. Legen wir dieselben Einheiten von Länge, Masse und Zeit zugrunde wie in Abschnitt 192 (Erdhalbmesser, Erdmasse, Minute), so nimmt die Gravitationskonstante, wie dort, den Wert $k = 0.0743096$ an. Will man die für $k = 1$

gültigen Formeln des Kapitels V benutzen, wird man die Zeiteinheit besser auf $k^{-1} = 13.45721$ min festsetzen. Ferner ist es vorteilhaft, die Form der Parabelbahn durch die Perigäumsdistanz $q = r_0/2$ festzulegen. Dann wird nämlich der Startpunkt durch $r_0 = 2q = p$ und $v_0 = 90°$ bestimmt. Ferner wird

$$r_1 = q \sec^2 \frac{v_1}{2}; \quad \cos^2 \frac{v_1}{2} = \frac{q}{r_1} = \frac{r_0}{2r_1},$$

woraus v_1 mit großer Genauigkeit abgeleitet werden kann.

Es sind ferner für den Startort $(t = t_0, v_0 = 90°)$

$$\mu = \frac{1}{r_0^3}; \quad \varrho = 0; \quad \varepsilon = \mu; \quad \sigma = \sqrt{\mu}$$

die lokalen Invarianten der Bahn, und es ist $\tau = k(t_1 - t_0)$ die zu bestimmende Zwischenzeit. Ist nun z die Lösung der Hauptgleichung für den Übergang $t_0 \to t_1$ und schreibt man $y = \sigma z \tau$, so folgt nach (V; 52) und (V; 53), da $c_1 = 1$, $c_2 = 1/2$, $c_3 = 1/6$ zu setzen ist,

$$r_1 = r_0\left(1 + \sigma z \tau + \frac{1}{2} \varepsilon z^2 \tau^2\right) = r_0\left(1 + y + \frac{1}{2} y^2\right),$$

woraus sich

$$y = -1 \pm \sqrt{2\frac{r_1}{r_0} - 1}$$

ergibt. Soll die Bewegung des Satelliten im selben Sinne wie die des Mondes erfolgen, so ist y positiv, also das positive Vorzeichen der Wurzel zu nehmen.

Die Zwischenzeit folgt dann aus der Hauptgleichung (V; 51), die nach Multiplikation mit $\tau \sqrt{\mu}$

$$\tau \sqrt{\mu} = y + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{6} y^3$$

liefert. EGOROV gibt für die Flugdauer zum Mond in einer parabolischen Auftreffbahn 2.07 Tage an. Wir können diesen Wert durch eine Überschlagsrechnung leicht nachprüfen. Setzt man genähert $r_0 = 1$, $r_1 = 60$, so folgt $\mu = 1$ und $y = \sqrt{119} - 1 = 9.91$, $\tau = 219.7$ [k^{-1} min] $\approx$ 2.05 Tage.

Eine noch einfachere Lösung erhält man, wenn der Satellit, während der Beobachtungsort durch die Mondbahnebene geht, in senkrechter Richtung startet. Dann ist die ungestörte Bahn geradlinig, und die Zwischenzeit τ kann nach den Formeln des Abschnitts 26 als die Zeit berechnet werden, in der der Flugkörper mit der parabolischen Anfangsgeschwindigkeit $V = \sqrt{2/r_0}$ die Flughöhe r_1 erreicht.

Zur Lösung der zweiten Aufgabe (Umfliegen oder Anfliegen des Mondes mit Rückkehr zur Erde) bietet sich eine große Mannigfaltigkeit von Möglichkeiten dar. Eine Klassifizierung der hierbei auftretenden Bahnformen hat EGOROV versucht, auf dessen obengenannte Abhandlung verwiesen sei. Wir müssen uns hier mit einigen Hinweisen und Beispielen begnügen.

Es liegt auf der Hand, zunächst nach *periodischen* Bahnen im rotierenden $\xi\,\eta$-System des „problème restreint" zu suchen, die nahe genug an Erde und Mond vorübergehen und daher dem hier gesetzten Zweck in vollkommener Weise dienen. Für das Massenverhältnis 1 : 1, das den in Kapitel XIX behandelten Kopenhagener Untersuchungen zugrunde gelegen hat, gibt es bestimmte Bahnklassen, die solche Annäherungsbahnen an beide endlichen Massen enthalten. Es fragt sich nur, ob dies auch noch gilt, wenn man die Bahnen auf das Massenverhältnis 1 : 81.45 umrechnet. Die einfachsten Bahnen dieser Art sind die der Klasse *m* (Abschnitt 168, Abb. 58, S. 475), die in ovalartigen Kurven beide Massen in rückläufigem Sinne umschließen. Bei Übergang auf das Massenverhältnis Mond–Erde wird diese Schar von Trajektorien so deformiert, wie Abb. 84 zeigt. Die Kurven sind in Mondnähe stärker gekrümmt als in Erdnähe; ihr kleinster Abstand vom Mondmittelpunkt ist bedeutend kleiner als ihre Perigäumsdistanz. Nach EGOROV ergeben sich für eine Auswahl von Bahnen dieser Schar die nachstehenden Daten, die sich auf die in Abb. 84 mit *I–IV* bezeichneten Kurven beziehen. Es bedeutet r_0 die Perigäumsdistanz, V_0 die Geschwindigkeit im Perigäum, s_0 den kleinsten Abstand vom Mittelpunkt des Mondes. Da der Halbmesser des Mondes 1738 km beträgt,

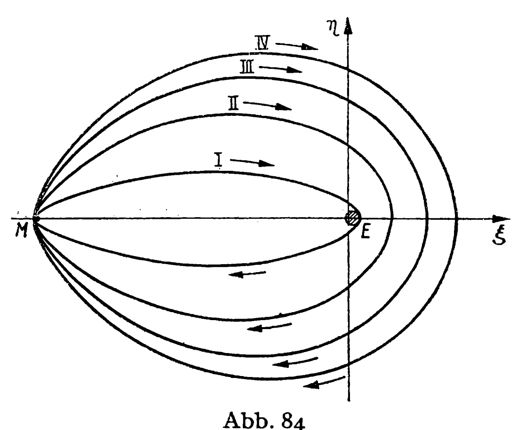


Abb. 84
Periodische Bahnen, die Erde und Mond umfliegen, maßstabgerecht (nach EGOROV)

Bahn	r_0 [km]	V_0 [km/s]	s_0 [km]
I	6571	11.1242	150
II	42203	4.4008	825
III	82824	3.1833	1500
IV	116371	2.7410	2000

wird nur die Bahn *IV* den Mond nicht treffen, sondern an seiner Rückseite vorbeigehen. Insbesondere ist auch die Bahn *I*, bei der das Raumgerät in rund 200 km über der Erdoberfläche und parallel zu ihr startet, eine Auftreffbahn. Andererseits erkennt man, daß der Start eines Satelliten, der Mond und Erde in einer Bahn dieser Klasse periodisch umfliegen soll, in rund 10^5 km Abstand vom Erdmittelpunkt (genauer $r_0 \geqq 94800$ km) erfolgen müßte. Abgesehen von diesem praktisch ungünstigen Ergebnis erweisen sich die Bahnen dieser Klasse als sehr instabil, so daß schon kleine Abweichungen der Anfangsgeschwindigkeit V_0 vom vorausberechneten Wert bewirken würden, daß die Bahn

nicht mehr periodisch ist, eventuell auch nach endlich vielen Umläufen in den interplanetaren Raum oder zum Aufsturz auf Mond oder Erde führt.

Bessere Möglichkeiten, Rückkehrbahnen aus der Fülle der periodischen Lösungen abzuleiten, bieten die Ejektionsbahnen gewisser STRÖMGRENschen Klassen, z. B. die der Klassen *r* und *s*, die (s. Abschnitt 169) gewissen asymptotischen Bahnen benachbart sind. Solche Bahnen, von denen Abb. 85 drei

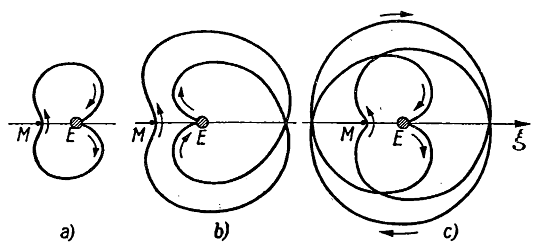


Abb. 85. Periodische Ejektionsbahnen, die den Mond anfliegen (nach EGOROV).
a) Umlaufszeit $^1/_2$ Monat; b) Umlaufszeit 1 Monat; c) Umlaufszeit $^3/_2$ Monate

Beispiele zeigt, haben Ejektionspunkte im Erdort. Der Satellit würde also von der Erdoberfläche aus fast senkrecht starten, und zwar entweder in Richtung auf den Mondort zu (Bahn *b*) oder in die entgegengesetzte Richtung (Bahnen *a* und *c*), und nach Vorüberflug an der erdzugewandten Seite des Mondes (Anflug) wieder auf die Erde zurückfallen.

Beträchtlich zahlreicher sind die Möglichkeiten, *nichtperiodische* Bahnen zu finden, die von irgendeinem Punkt außerhalb der Atmosphäre aus starten und nach Umfliegen oder Anfliegen des Mondes zur Erde zurückkehren. Abb. 86

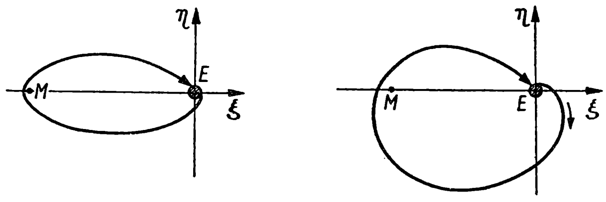


Abb. 86. Nichtperiodische Bahnen, die den Mond umfliegen, mit senkrechtem Aufsturz bei der Rückkehr (nach EGOROV)

zeigt zwei solcher Bahnen, die in verhältnismäßig geringer Höhe parallel zur Erdoberfläche beginnen, den Mond umfliegen und bei der Rückkehr senkrecht in die Atmosphäre einstürzen. Man erhält aber auch Bahnen, die beim Rückflug die obere Atmosphäre tangential treffen und dann gegebenenfalls unbeschädigt zurückgeholt werden können. Allerdings sind solche Bahnen, wie auch die meisten anderen dieser Art, sehr empfindlich gegen kleine Abweichungen der Anfangsgeschwindigkeit und gegen Störungseinflüsse. In der Praxis wird es daher kaum möglich sein, ohne Korrektionen während des Rückflugs auszukommen.

194. *Das Einfangproblem*

Die Lösung des dritten in Abschnitt 193 aufgestellten Problems bietet erhebliche Schwierigkeiten. Ist es möglich, so fragen wir, einen Raumkörper von der Erde aus in eine solche Umlaufbahn zu bringen, daß er *im Freiflug* früher oder später vom Mond eingefangen wird, ihn also dann ständig oder wenigstens längere Zeit hindurch als Satellit umkreisen wird? Daß dies erreicht werden kann, wenn dem Gerät beim Eintritt in die Anziehungssphäre des Mondes eine entsprechende Korrektion durch zusätzliche Impulse erteilt wird, bedarf keiner Erörterung und ist eine hier nicht besonders interessierende praktische Angelegenheit.

Wir betrachten das Einfangproblem wiederum im Rahmen des „problème restreint". In Abschnitt 115 wurde festgestellt, daß ein masseloser Körper (Satellit) im Felde der beiden endlichen Massen (hier m_1 = Erde, m_2 = Mond), die sich in Kreisbahnen um den gemeinsamen Massenmittelpunkt bewegen, unter gewissen Voraussetzungen aus der Nähe der einen endlichen Masse in die der anderen gelangen kann, sofern die JACOBIsche Konstante seiner Bahn gewisse Bedingungen erfüllt. Sind Ω_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ die Werte, die der Potentialfunktion Ω des rotierenden Systems in den fünf Librationszentren zukommen, so trennen für $C > C_1 = 2\Omega_1$ die Zweige der Nullgeschwindigkeitskurve $2\Omega = C$ geschlossene und sich nicht überschneidende Bereiche um beide Massen ab, und ein Satellit, der auf einer der durch C gekennzeichneten Bahnen die Erde umkreist, kann dann nicht in die Nähe des Mondes gelangen. Für $C_2 = 2\Omega_2 < C < C_1$ fließen diese Bereiche bei L_1 ineinander, und es entsteht ein mehr oder weniger breiter Kanal, durch den ein Projektil unter Umständen aus dem Bereich um m_1 in den um m_2 gelangen kann (Abb. 87 und 89). Ist dieser Kanal eng genug, so ist zu erwarten, daß der Satellit, nachdem er einmal durch diese Öffnung geschlüpft ist, für lange Zeit in dem verhältnismäßig kleinen Raum um den Mond eingeschlossen bleibt, also, falls er nicht auf den Mond abstürzt, diesen umkreist, bis er etwa unter günstigen Umständen den Ausgang „wiederfindet" und in den Erdbereich zurückkehrt. Daß dies früher oder später geschehen wird, ist sehr wahrscheinlich, solange die Bedingungen des „problème restreint" erfüllt bleiben. Da aber sowohl die Abweichungen der Mondbahn von der Kreisform als auch die vernachlässigten Störungen durch Sonne und Planeten dafür sorgen, daß diese Bedingungen fluktuieren, ist es immer möglich, daß infolge dieser Einflüsse die Öffnung zwischen den Bereichen geschlossen wird oder gar, daß sich bei L_2 ein neuer Kanal bildet, durch den der Satellit in den interplanetaren Raum entweichen könnte.

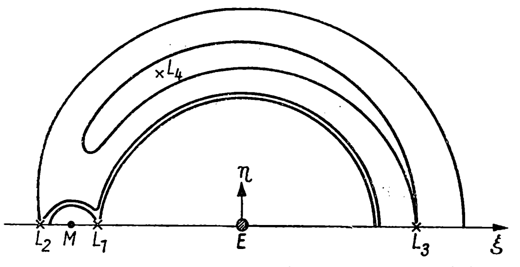


Abb. 87. Nullgeschwindigkeitskurven (obere Halbebene) im rotierenden System Erde–Mond, die in L_1, L_2 und L_3 einmünden, maßgetreu

Sehen wir von diesen Komplikationen ab, so ergibt sich folgendes Bild: Wir wählen die Einheiten so, daß der Halbmesser der Mondbahn, die Massensumme $m_1 + m_2$ von Erde und Mond sowie die Gravitationskonstante gleich 1 sind. Dann ist die siderische Umlaufszeit des Mondes $T = 2\pi$, und es ist die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Systems $n = 1$. Ferner seien in diesen Einheiten

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \text{ die Mondmasse,} \quad 1 - \mu \text{ die Erdmasse,}$$

und es ist, wenn $m_2/m_1 = 1/81.45$ gesetzt wird, $\mu = 1/82.45$. Das JACOBIsche Integral erhält dann, wenn noch der Koordinatenursprung in den Massenmittelpunkt Erde–Mond gelegt wird, so daß die Örter von Erde und Mond die Abszissen μ bzw. $-(1 - \mu)$ haben, nach (XI; 88) bis (XI; 89a) die Form

$$C = \varrho^2 + 2\left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}\right) - (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2),$$

wobei (siehe Abb. 88)

$$\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2; \quad r_1^2 = (\xi - \mu)^2 + \eta^2; \quad r_2^2 = (\xi - \mu + 1)^2 + \eta^2$$

zu setzen ist.

Für die fünf Librationszentren dieses Systems erhält man dann unter Verwendung der in Abschnitt 113 abgeleiteten Formeln die nachstehenden Daten:

L_i	r_{1i}	r_{2i}	C_i	V_{0i} [km/s]
L_1	0.8491539	0.1508461	3.188134	10.84890
L_2	0.1677237	0.1677237	3.171982	10.84968
L_3	0.9929263	1.9929263	3.012124	10.85738
L_4, L_5	1	1	2.988002	10.85854

Dabei bedeuten r_{1i}, r_{2i} die relativen Abstände der Librationszentren L_i von m_1 bzw. m_2, $C_i = 2\Omega_i$ die JACOBIschen Konstanten von Bahnen, die in L_i mit der Geschwindigkeit $V = 0$ einmünden würden, V_{0i} die Geschwindigkeit im rotierenden System, die auf solchen Bahnen laufende Satelliten im Abstand $r_0 = 6571$ km vom Erdmittelpunkt annehmen würden, also in 200 km Höhe über der Oberfläche der als kugelförmig angenommenen Erde. Diese Startgeschwindigkeiten von Satellitenbahnen mit den JACOBIschen Konstanten C_i sind fast unabhängig von der Startrichtung und dem Startort an der Sphäre mit dem Halbmesser r_0; ihre Abweichungen von dem hier angegebenen Mittelwert sind kleiner als 10^{-6} km/s.

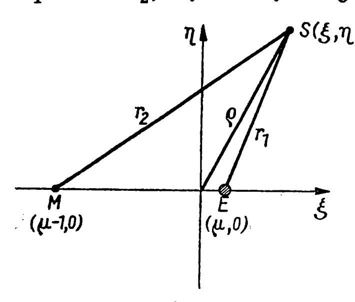


Abb. 88
Satellit (S) im rotierenden System Erde–Mond (schematisch)

Die Abstände der Punkte L_1 und L_2 vom Mondmittelpunkt betragen rund 58000 bzw. 65000 km, wenn die in der Tabelle benutzte Längeneinheit gleich

384700 km gesetzt wird. Der bis auf eine kleine Öffnung bei L_1 geschlossene Bereich um den Mond entspricht also der Größenordnung nach ungefähr dem Einflußbereich des Mondes im Erdfeld, dessen Halbmesser nach (XI; 109)

$$\sqrt[5]{\mu^2} = 0.172 \text{ Einheiten,}$$

d.h. rund 67000 km, betragen würde.

Numerische Untersuchungen haben (dem in Abschnitt 193 zitierten Bericht von EGOROV zufolge) ergeben, daß keine der Bahnen, die mit der Geschwindigkeit V_{01} von irgendeinem Punkt an der Atmosphärengrenze aus und in irgendeine Richtung starten, den Punkt L_1 oder irgendeinen Punkt mit gleicher Entfernung von der Erde *im ersten Anflug* erreicht. Diese Bahnen erweisen sich nämlich zunächst als langgestreckte Kurven von nahezu elliptischer Gestalt, deren Apogäumsdistanz weit kleiner ist als r_{11}. Erst im Verlauf vieler Umläufe wird die Apogäumsdistanz dieser Bahnkurven langsam größer, da die Störungen durch den Mond, die besonders große Beträge annehmen, wenn das Apogäum mit der Mondnähe zusammentrifft, die große Halbachse allmählich vergrößern. Der in der Planetentheorie mit großer Genauigkeit erfüllte Satz von der säkularen Unveränderlichkeit der großen Halbachsen gilt also hier nicht, da auch die Störungen höherer als zweiter Ordnung durch den Mond groß sind und nicht vernachlässigt werden dürfen. Immerhin werden sehr viele Umläufe vergehen, ehe der Satellit die zum Eintritt in den Kanal notwendige Apogäumsdistanz erreicht.

Es fällt überdies auf, daß die Anfangsgeschwindigkeiten V_{01} und V_{02} sich nur um 0.78 m/s unterscheiden. Zwischen diesen Grenzen müßte also die Startgeschwindigkeit eingeschlossen sein, damit die JACOBIsche Konstante, wie es für eine Einfangbahn erforderlich wäre, zwischen C_1 und C_2 liegt. Diese und die obigen Überlegungen machen klar, daß es kaum möglich sein wird, einen Satelliten (wenn auch erst nach zahlreichen Umläufen) in gezieltem Freiflug in eine Einfangbahn zu zwingen. Die in Abschnitt 193 erwähnten neueren Untersuchungen haben allerdings gezeigt, daß periodische Bahnen, die abwechselnd Mond und Erde vielfach umkreisen, in sehr viel größerer Mannigfaltigkeit existieren, als es nach den hier mitgeteilten Versuchen zu erwarten war.

Man könnte eine numerische Untersuchung über die Existenz von Einfangbahnen auch auf folgende Weise einleiten: Angenommen, eine zu $C = C_0$ gehörige HILLsche Grenzkurve (Nullgeschwindigkeitskurve) $2\Omega = C_0$ ist von dem sanduhrförmigen Typ (s. Abschnitt 115), der zwischen den für die Bewegung des masselosen Körpers freien Bereichen um m_1 und m_2 einen Durchgang offenläßt. Dann ist $C_2 < C_0 < C_1$, und man kann den numerischen Wert der Konstanten C_0 durch denjenigen festlegen, den 2Ω im Punkt $P_0(\xi_0, \eta_0)$ an der Einschnürungsstelle (Abb. 89) annimmt. An dieser Stelle ist

$$2\Omega_0 = C_0 = (\xi_0^2 + \eta_0^2) + 2\left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}\right)$$

mit

$$r_1^2 = r_{11}^2 + \eta_0^2; \quad r_2^2 = r_{21}^2 + \eta_0^2; \quad -\xi_0 = r_{11} - \mu,$$

wenn r_{11}, r_{21} die in der obigen Tabelle gegebenen Abstände zwischen L_1 einerseits und Mond und Erde andererseits bedeuten. Da η_0, die halbe Breite des Kanals, gegen r_{11} und r_{21}, also erst recht gegen die Längeneinheit $r_{11} + r_{21}$, klein ist, kann man C_0 als Funktion von η_0 durch eine nach Potenzen von η_0^2

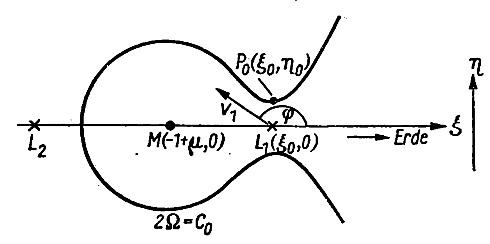


Abb. 89. Einfang eines Erdsatelliten durch den Mond (M), Hillsche Grenzkurve $2\Omega = C_0$ mit Kanal bei L_1, schematisch

fortschreitende Reihe darstellen. In den Punkten P_0 und L_1 ist dann für Bahnen mit der Jacobischen Konstante C_0

$$V_0^2 = 2\Omega_0 - C_0 = 0,$$

$$V_1^2 = 2\Omega_1 - C_0 < 2\Omega_1 - C_2 = C_1 - C_2 = 0.016152.$$

Es ist also einerseits

(XXII; 55) $$V_1^2 < 0.016152; \quad V_1 < 0.127,$$

andererseits

$$V_1^2 = 2(\Omega_1 - \Omega_0) = \xi_0^2 + 2\left(\frac{1-\mu}{r_{11}} + \frac{\mu}{r_{21}}\right) -$$

$$- (\xi_0^2 + \eta_0^2) - 2\left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}\right) =$$

$$= -\eta_0^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_{11}}\left\{1 - \frac{r_{11}}{r_1}\right\} + \frac{2\mu}{r_{21}}\left\{1 - \frac{r_{21}}{r_2}\right\},$$

und wegen

$$\frac{r_{11}}{r_1} = \left(1 + \frac{\eta_0^2}{r_{11}^2}\right)^{-1/2}; \quad \frac{r_{21}}{r_2} = \left(1 + \frac{\eta_0^2}{r_{21}^2}\right)^{-1/2}$$

erhält man, wenn Terme mit η_0^4 vernachlässigt werden dürfen,

$$V_1^2 = \eta_0^2\left\{\frac{1-\mu}{r_{11}^3} + \frac{\mu}{r_{21}^3} - 1\right\},$$

also mit $\mu = 1/82.45$, r_{11} und r_{21} wie oben,

$$V_1 = 2.036\eta_0$$

in den hier verwendeten Einheiten für Länge und Zeit. Beim Übergang auf Kilometer und Sekunde hat man diesen Wert mit

$$27.3217 \cdot 86400/2\pi \cdot 384700 \approx 0.977366$$

zu multiplizieren, so daß für hinreichend kleine Kanalöffnung

$$V_1 = 1.990 \eta_0 \approx 2\eta_0 \text{ km/s}$$

ist, wo η_0 in Bruchteilen des Abstandes Erde–Mond auszudrücken ist.

Als obere Grenze für V_1 ergibt sich, für $C_0 = C_2$, aus (XXII; 55)

$$V_1 \ll 0.124 \text{ km/s}.$$

Da die Geschwindigkeit eines Satelliten, der auf einer Bahn mit gegebener JACOBIscher Konstante einen vorgegebenen Punkt der $\xi\,\eta$-Ebene passiert, von der Richtung, in der dies erfolgt, unabhängig ist, bilden alle Einfangbahnen, die bei gegebener Kanalöffnung durch L_1 hindurchgehen, eine einparametrige Schar mit dem Winkel φ (Abb. 89) zwischen Bewegungsrichtung und ξ-Achse als Parameter. Die Aufgabe, alle möglichen Einfangbahnen bei gegebenem η_0 zu berechnen, läßt sich also durch numerische Integration der Bewegungsgleichungen des „problème restreint" lösen, wenn man von L_1 als Startort, der konstanten Startgeschwindigkeit $V_1(\eta_0)$ und beliebiger Startrichtung φ ausgeht.

ANHANG

I. Berichtigungen zu Band I

II. Ergänzung zu Abschnitt 35 (Band I, S. 174): Auflösung der KEPLERschen Gleichung

III. LAPLACEsche Koeffizienten

IV. Säkulare Störungen im System Sonne–Jupiter–Saturn

V. Umformung der Differentialgleichungen für die elliptischen Bahnelemente nach DE SITTER

VI. Beweis der Formeln (XXII; 10)

VII. ENCKEsche Reihe $3f = 3f(q)$ für $-0.03 \leqq q \leqq +0.03$

I. *Berichtigungen zu Band I*

S. 14, Zeile 13 von oben: „Jahrtausende" statt „Jh."

S. 41, Zeile 17 von unten: Das Komma hinter „höheren" ist zu streichen.

S. 70, Formel (II; 13), in beiden Zeilen rechts: $\cos E$ statt $e \cos E$.

S. 84, Zeile 14 von oben: $\frac{a_1^3}{U_1^2}$ statt $\frac{a_1^3}{U_1^3}$.

S. 84, Formel (II; 54): 0.01720210 statt 0.1720210.

S. 86, Zeile 8 von unten: „bestätigt worden" statt „meßbar geworden".

S. 95, Formel (III; 21): $\frac{\varkappa^2}{r}$ statt $\frac{\varkappa}{r}$.

S. 96, Zeile 3 von unten: (III; 11) statt (III; 10).

S. 109, Formel (III; 55), dritte Zeile: $r = a(1 - e \cos E)$ statt $r = a(1 - e \cos e)$.

S. 131, Zeile 11 von oben: „2. Diese" statt „Diese".

S. 165, Zeile 15 von unten: $\varkappa(t - T)$ statt $\varkappa^2(t - T)$.

S. 198, Formel (V; 22), zweite Zeile: $-\sin u \sin \Omega$ statt $-\sin u$ in Ω.

S. 202, Zeile 5 von unten: $\ddot{\varphi}$ statt $\dddot{\varphi}$.

S. 216, letzte Zeile: $c_2 \sigma_0 \tau z^2$ statt $c_2 \sigma_0 \tau$.

S. 248, vorletzte und letzte Zeile von unten, letztes Glied der Formel:
$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}$ statt $\frac{1 \cdot 3 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 5}$.

S. 295, Zeile 7 von oben und Formel (VII; 20): $\psi = \varphi - \xi[\ldots]$ statt $\psi = \varphi + \xi[\ldots]$.

S. 304, Zeile 11 von oben: „gebrauchte Funktion r^2" statt „gebrauchten Funktionen r^2 und r^{-3}".

S. 319, Zeile 8 von unten: $\frac{e^2}{2} \sin 2M$ statt $\frac{e^2}{4} \sin 2M$.

S. 329, Fußnote: (1947) statt (1949).

S. 343, Zeile 6 von unten: $k = 1$ statt $\varkappa = 1$.

S. 346, Zeile 2 von unten: „Theoria motus corporum ..." statt „Theoria corporum ...".

S. 382, vor Formel (VIII; 65): „so bleibt, wenn man rechts, wegen des kleinen Faktors ΔU_ν, x_ν statt x_ν^* setzt", statt „so bleibt".

S. 456: Die Zahlenwerte der Hilfstafel II sind durch Abrundung aus den von G. Stracke auf 2 Dezimalen gegebenen Werten erhalten worden. Die dadurch entstandenen Abrundungsfehler von ± 0.1 sind für den Gebrauch der Tafel zur Entnahme von Näherungslösungen der Keplerschen Gleichung belanglos.

S. 474, letzte Zeile: 0.166667 statt 6.166667.

II. *Ergänzung zu Abschnitt 35 (Band I, S. 174): Auflösung der Keplerschen Gleichung*

Als weiteres Beispiel einer Lösung der Keplerschen Gleichung möge noch das folgende rasch konvergierende und bisher unveröffentlichte Iterationsverfahren von J. Fredrich dienen:

Man setzt $E - M = \varkappa = \varkappa_1 + \Delta\varkappa$, wo $\varkappa_1$ eine Ausgangsnäherung bedeutet. Dann ist $E_1 = M + \varkappa_1$, $e \sin(E_1 + \Delta\varkappa) = \varkappa_1 + \Delta\varkappa$ und

$$e \sin E_1 \cos\Delta\varkappa - (1 - e\cos E_1)\sin\Delta\varkappa = \varkappa_1 + \Delta\varkappa - \sin\Delta\varkappa.$$

Berechnet man nun h_1 aus $\tan h_1 = e \sin E_1/(1 - e\cos E_1)$ und setzt $Q_1 = \varkappa_1/e \sin E_1$, so folgt

$$\tan h_1 \cos\Delta\varkappa - \sin\Delta\varkappa = \frac{\varkappa_1 + \Delta\varkappa - \sin\Delta\varkappa}{1 - e\cos E_1} = Q_1 \tan h_1\left(1 - \frac{\Delta\varkappa - \sin\Delta\varkappa}{\varkappa_1}\right),$$

also, bis auf einen kleinen Bruchteil, der bei der Iteration mit $\Delta\varkappa$ verschwindet,

$$(A) \qquad \sin(h_1 - \Delta\varkappa) = Q_1 \sin h_1.$$

Hieraus folgt $\Delta\varkappa$ und damit in zweiter Näherung, mit neuem $\Delta\varkappa$,

$$\varkappa_2 = \varkappa_1 + \Delta\varkappa; \quad E_2 = E_1 + \Delta\varkappa; \quad Q_2 = \frac{\varkappa_2}{e \sin E_2}.$$

Die Iteration ist beendet, wenn $Q \to 1$ geht, was gleichzeitig als Kontrolle dient.

Man kann auch die Berechnung von h vermeiden. Aus

$$Q_1'' = \frac{\varkappa_1''}{e \sin E_1}$$

folgt durch Logarithmieren

$$\log Q_1'' = \log\varkappa_1'' - \log e - \log\sin E_1,$$

während für die Endlösung $Q = 1$

$$0 = \log(\varkappa_1'' + \Delta\varkappa'') - \log e - \log\sin(E_1 + \Delta\varkappa'')$$

sein würde. Die Differenz ergibt $\Delta\varkappa''$ aus

$$(B) \qquad \log Q_1'' = \Delta\varkappa'' \cdot D(\log\sin E_1 - \log\varkappa_1''),$$

wenn der Operator D, angewandt auf eine Funktion $f(x'')$, deren Zuwachs (Tafelintervall) für die Schrittweite $1''$ bezeichnet. Dieses letztere Verfahren ist besonders für große Exzentrizitäten geeignet, da es praktisch von e unabhängig ist und immer gut konvergiert, wenn man etwa $\varkappa_1$ der Tafel II im Anhang von Band I entnimmt. Für kleine Exzentrizitäten ist das Iterationsverfahren nach (A) vorzuziehen.

III. *Laplacesche Koeffizienten*

α	$\frac{1}{2} b_0^{(1/2)}$	$b_1^{(1/2)}$	$\frac{1}{2} b_0^{(3/2)}$	$b_1^{(3/2)}$	$b_2^{(3/2)}$
0.1	1.0025	0.1004	1.0228	0.3057	0.0382
0.2	1.0102	0.2031	1.0954	0.6519	0.1611
0.3	1.0237	0.3107	1.2349	1.0745	0.3983
0.4	1.0440	0.4267	1.4745	1.6660	0.8154
0.5	1.0732	0.5559	1.8908	2.5805	1.5580
0.54543	1.0902	0.6208	2.1800	3.1873	2.0837
0.6	1.1146	0.7060	2.6666	4.1867	2.9799
0.7	1.1750	0.8923	4.3323	7.5430	6.1179
0.8	1.2702	1.1443	9.011	16.885	15.161

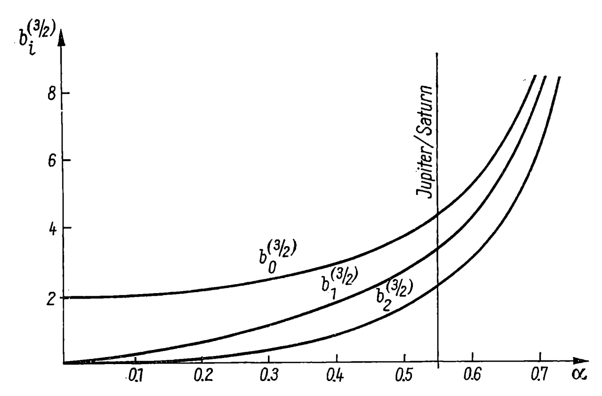


Abb. 90. Die Laplaceschen Koeffizienten $b_i^{(3/2)}$ für $i = 0, 1, 2$ als Funktionen von α

IV. *Säkulare Störungen im System Sonne–Jupiter–Saturn*

Beispiel zu Abschnitt 139: Berechnung der wechselseitigen säkularen Störungen von Jupiter und Saturn

Für 1950.0 gelten für die beiden Planeten folgende Elemente, bezogen auf Ekliptik und Frühlingspunkt zu dieser Epoche:

Jupiter:		Saturn:	
$a =$	5.20280,	$a' =$	9.53885,
$n =$	299.″128/Tag,	$n' =$	120.″455/Tag,
$e =$	0.048419,	$e' =$	0.055716,
$(\varphi =$	$2°\,46.'5)$,	$(\varphi' =$	$3°\,11.'6)$,
$\tilde{\omega} =$	$13°\,31.'02$,	$\tilde{\omega}' =$	$92°\,4.'11$,
$i =$	$1°\,18.'35$,	$i' =$	$2°\,29.'42$,
$\Omega =$	$99°\,56.'60$,	$\Omega' =$	$113°\,13.'21$,
$1/m =$	1047.35,	$1/m' =$	3501.6.

Für das Abstandsverhältnis $a/a' = 0.5454326$ ist nach Anhang III

$$b_1^{(3/2)} = \frac{a' B_1}{\alpha} = 3.1873; \quad b_2^{(3/2)} = \frac{a' B_2}{\alpha} = 2.0837$$

zu setzen, also nach (XVI; 65) in Bogensekunden/julianisches Jahr

$$\text{für Jupiter} \begin{cases} c = \frac{1}{4} m' n \, a B_1 = \frac{1}{4} m' n \, \alpha^2 \, b_1^{(3/2)} = 7.3963, \\ d = \frac{1}{4} m' n \, a B_2 = \frac{1}{4} m' n \, \alpha^2 \, b_2^{(3/2)} = 4.8354, \end{cases}$$

$$\text{für Saturn} \begin{cases} c' = \frac{1}{4} m \, n' a' B_1 = \frac{1}{4} m \, n' \alpha \, b_1^{(3/2)} = 18.084, \\ d' = \frac{1}{4} m \, n' a' B_2 = \frac{1}{4} m \, n' \alpha \, b_2^{(3/2)} = 11.823. \end{cases}$$

Auf Grund der Formeln (XVI; 66a) erhält man mit diesen Werten für die säkularen Änderungen der Elemente $\varphi, i, \varpi, \Omega$ in julianischen Jahren (ohne Berücksichtigung der Störungen durch andere Planeten und der Präzession):

$$\begin{array}{llll} \text{Jupiter:} & \Delta\varphi = +0''.264, & \text{Saturn:} & \Delta\varphi' = -0''.562, \\ & \Delta i = -0''.075, & & \Delta i' = +0''.096, \\ & \Delta\varpi = +6''.292, & & \Delta\varpi' = +16''.045, \\ & \Delta\Omega = +6''.330, & & \Delta\Omega' = -8''.853. \end{array}$$

Nach Abschnitt 140 beträgt die *mittlere* jährliche Bewegung der Knoten für beide Planeten gemeinsam

$$\overline{\Delta\varpi} = -(c + c') = -25''.48.$$

V. *Umformung der Differentialgleichungen für die elliptischen Bahnelemente nach* DE SITTER

W. DE SITTER (1903) gibt eine Variante der Formeln (XVIII; 52b) an, die sich besonders für kleine Exzentrizitäten und Neigungen eignet und überdies den Vorteil größerer Symmetrie hat.

Man führe den bei kleinen Neigungen stets sehr kleinen Hilfswinkel σ durch die Differentialgleichung

$$\text{(a)} \qquad \frac{d\sigma}{dt} = -2\sin^2\frac{i}{2}\,\frac{d\Omega}{dt} = -\tan\frac{i}{2}\sin i\,\frac{d\Omega}{dt}$$

ein und statt der Längenvariablen $\varpi, \varepsilon, l, \Omega$

$$\varpi' = \varpi + \sigma; \quad \varepsilon' = \varepsilon + \sigma; \quad l' = l + \sigma; \quad \Omega' = \Omega + \sigma.$$

Dann bleiben die Längendifferenzen, also auch die Anomalien v, E und u, ungeändert. Als neue Elemente wähle man sodann

$$\alpha = \sin i \sin\Omega'; \quad \xi = \sin\varphi \sin\varpi',$$

$$\beta = \sin i \cos\Omega'; \quad \eta = \sin\varphi \cos\varpi',$$

für die

$$
\text{(b)}\quad
\begin{cases}
\dfrac{d\alpha}{dt} = \cos i \sin \Omega' \dfrac{di}{dt} + \sin i \cos \Omega' \dfrac{d\Omega'}{dt}, \\[2mm]
\dfrac{d\beta}{dt} = \cos i \cos \Omega' \dfrac{di}{dt} - \sin i \sin \Omega' \dfrac{d\Omega'}{dt}, \\[2mm]
\dfrac{d\xi}{dt} = \cos \varphi \sin \varpi' \dfrac{d\varphi}{dt} + \sin \varphi \cos \varpi' \dfrac{d\varpi'}{dt}, \\[2mm]
\dfrac{d\eta}{dt} = \cos \varphi \cos \varpi' \dfrac{d\varphi}{dt} - \sin \varphi \sin \varpi' \dfrac{d\varpi'}{dt}
\end{cases}
$$

gilt, und es ist wegen (XVIII; 52b) und (a)

$$
\text{(c)}\quad
\begin{cases}
\sin i \dfrac{d\Omega'}{dt} = \sin i \left(\dfrac{d\Omega}{dt} + \dfrac{d\sigma}{dt}\right) = \sin i \dfrac{d\Omega}{dt}\left(1 - 2\sin^2 \dfrac{i}{2}\right) = \\[2mm]
\qquad = \sin i \cos i \dfrac{d\Omega}{dt} = (W)\dfrac{r}{p} \cos i \sin u, \\[2mm]
\sin \varphi \dfrac{d\varpi'}{dt} = \sin \varphi \left(\dfrac{d\varpi}{dt} + \dfrac{d\sigma}{dt}\right) = -(S)\cos v + (T)\left(\dfrac{r}{p} + 1\right)\sin v.
\end{cases}
$$

Eliminiert man aus (b) di/dt und $\cos\varphi\,(d\varphi/dt)$ nach (XVIII; 52b), $\sin i\,(d\Omega'/dt)$ und $\sin\varphi\,(d\varpi'/dt)$ nach (c), so erhält man wegen $l' = \Omega' + u = \varpi' + v$

$$
\text{(d)}\qquad \frac{d\alpha}{dt} = (W)\frac{r}{p}\cos i \cos l'; \quad \frac{d\beta}{dt} = (W)\frac{r}{p}\cos i \sin l',
$$

ferner

$$
\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dt} &= \sin\varpi'\{(S)\sin v + (T)(\cos v + \cos E)\} + \\
&\quad + \cos\varpi'\left\{-(S)\cos v + (T)\left(\frac{r}{p} + 1\right)\sin v\right\} = \\
&= -(S)\cos l' + \frac{1}{p}(T)\{p\sin\varpi'(\cos v + \cos E) + (r + p)\cos\varpi'\sin v\}, \\
\frac{d\eta}{dt} &= (S)\sin l' + \frac{1}{p}(T)\{p\cos\varpi'(\cos v + \cos E) - (r + p)\sin\varpi'\sin v\}.
\end{aligned}
$$

Nun ist aber

$$
\begin{aligned}
&p\sin\varpi'(\cos v + \cos E) + (r + p)\cos\varpi'\sin v = \\
&\quad = (r + p)\sin l' - (r + p)\sin\varpi'\cos v + p\sin\varpi'(\cos v + \cos E) = \\
&\quad = (r + p)\sin l' + \sin\varpi'(p\cos E - r\cos v) = (r + p)\sin l' + r\sin\varphi\sin\varpi',
\end{aligned}
$$

denn es ist ja

$$
p\cos E - r\cos v = a(1 - e^2)\cos E - a(\cos E - e) = a\,e(1 - e\cos E) = r\,e,
$$

daher

$$
\text{(e)}\quad
\begin{cases}
\dfrac{d\xi}{dt} = -(S)\cos l' + (T)\left\{\left(\dfrac{r}{p} + 1\right)\sin l' + \dfrac{r}{p}\xi\right\}, \quad \text{ebenso} \\[2mm]
\dfrac{d\eta}{dt} = (S)\sin l' + (T)\left\{\left(\dfrac{r}{p} + 1\right)\cos l' + \dfrac{r}{p}\eta\right\}
\end{cases}
$$

und schließlich

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} - 2\sin^2\frac{i}{2}\frac{d\Omega}{dt} = \tan\frac{\varphi}{2}\sin\varphi\left\{\frac{d\bar{\omega}'}{dt} + 2\sin^2\frac{i}{2}\frac{d\Omega}{dt}\right\} +$$

$$+ 2\sin^2\frac{i}{2}\cos\varphi\frac{d\Omega}{dt} - 2\frac{r}{p}(S)\cos\varphi - 2\sin^2\frac{i}{2}\frac{d\Omega}{dt}$$

oder, da $\tan(\varphi/2)\sin\varphi + \cos\varphi - 1 = 0$ ist,

$$\text{(f)} \qquad \frac{d\varepsilon'}{dt} = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\frac{d\bar{\omega}'}{dt} - 2(S)\frac{r}{p}\cos\varphi.$$

Die Gleichungen (d), (e), (f) und die erste Gleichung (XVIII; 52b) bilden dann zusammen mit (a) das zu integrierende Gleichungssystem. Ist i klein genug, so kann man für längere Zeit

$$\sigma = \Delta\omega' - \Delta\omega = \Delta\Omega' - \Delta\Omega = -2\sin^2\frac{i}{2}\Delta\Omega = -2\sin^2\frac{i}{2}\sec i\,\Delta\Omega'$$

setzen, wenn $\Delta\Omega'$ die durch numerische Integration erhaltene Störung von Ω' ist und wenn man für i einen mittleren Wert benutzt. Dadurch kann die Integration von (a) vermieden werden.

VI. *Beweis der Formeln* (XXII; 10)

Da $1/r$ eine gerade Funktion der wahren Anomalie v bzw. der mittleren Anomalie M ist, die für beide Variable periodisch mit der Periode 2π ist, gelten für ganze m, n die FOURIERschen Entwicklungen

$$f = \left(\frac{a}{r}\right)^m \cos n\,v = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \cos iM; \quad g = \left(\frac{a}{r}\right)^m \sin n\,v = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \sin iM$$

oder, wenn $f_0 = q_0$, $f_i = q_i + q_{-i}$, $g_i = q_i - q_{-i}$ für $i = 1, 2, \ldots$ gesetzt wird,

$$f = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} q_i \cos iM; \quad g = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} q_i \sin iM.$$

Daher ist, wenn $u = \omega + v$ das Argument der Breite bedeutet,

$$\left(\frac{a}{r}\right)^m \cos n(\omega + v) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} q_i \cos(n\,\omega + iM).$$

Speziell gilt für $n = 0$, $m = 3$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3 = p_0 + \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cos iM,$$

und es ist nach der Theorie der FOURIERschen Reihen

$$p_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{r}\right)^3 dM.$$

Da aber

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + e\cos v); \quad dM = \frac{dM}{dt}\frac{dt}{dv}dv = a^{-3/2}\,r^2\,p^{-1/2}\,dv$$

ist, folgt

$$p_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{a}{p}\right)^{3/2}\int\limits_0^{2\pi}(1 + e\cos v)\,dv = \left(\frac{a}{p}\right)^{3/2} = (1 - e^2)^{-3/2}.$$

Ferner erhält man für $n = 2$, $m = 3$

$$q_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2v\,dM = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{a}{p}\right)^{3/2}\int\limits_0^{2\pi}(1 + e\cos v)\cos 2v\,dv = 0.$$

VII. *Enckesche Reihe* $3f = 3f(q)$ *für* $-0.03 \leqq q \leqq +0.03$

q	$3f$	$\log 3f$	q	$3f$	$\log 3f$
−0.030	3.2419	0.51080	0.000	3.0000	0.47712
.029	.2332	.50964	+ .001	2.9925	.47604
.028	.2246	.50848	.002	.9851	.47495
.027	.2161	.50733	.003	.9777	.47387
.026	.2076	.50618	.004	.9703	.47280
−0.025	3.1991	0.50503	+0.005	2.9629	0.47172
.024	.1907	.50388	.006	.9556	.47065
.023	.1823	.50274	.007	.9483	.46958
.022	.1739	.50159	.008	.9411	.46851
.021	.1656	.50046	.009	.9339	.46744
−0.020	3.1573	0.49932	+0.010	2.9267	0.46638
.019	.1491	.49819	.011	.9196	.46532
.018	.1409	.49706	.012	.9125	.46426
.017	.1328	.49593	.013	.9054	.46320
.016	.1247	.49480	.014	.8983	.46215
−0.015	3.1166	0.49368	+0.015	2.8913	0.46109
.014	.1085	.49256	.016	.8843	.46004
.013	.1005	.49144	.017	.8774	.45900
.012	.0926	.49032	.018	.8705	.45795
.011	.0847	.48921	.019	.8636	.45691
−0.010	3.0768	0.48810	+0.020	2.8567	0.45586
.009	.0689	.48699	.021	.8499	.45482
.008	.0611	.48588	.022	.8431	.45379
.007	.0534	.48478	.023	.8363	.45275
.006	.0456	.48368	.024	.8296	.45172
−0.005	3.0379	0.48258	+0.025	2.8229	0.45069
.004	.0303	.48148	.026	.8162	.44966
.003	.0227	.48039	.027	.8095	.44863
.002	.0151	.47930	.028	.8029	.44761
.001	.0075	.47821	.029	.7963	.44659
0.000	3.0000	0.47712	+0.030	2.7897	0.44557

LITERATURVERZEICHNIS

A. Lehrbücher und Gesamtdarstellungen

ANDOYER, H.: Cours de mécanique céleste, Band I und II. Paris 1923 und 1926.

BAKER, R.M.L., und M.W. MAKEMSON: An introduction to astrodynamics. New York und London 1960.

BAUSCHINGER, J.: Die Bahnbestimmung der Himmelskörper. Leipzig 1906, 2. Aufl. 1928.

BOHRMANN, A.: Bahnen künstlicher Satelliten. Mannheim 1963.

BROUWER, D., und G.M. CLEMENCE: Methods of celestial mechanics. New York und London 1961.

CHARLIER, C.V.L.: Die Mechanik des Himmels, Band I und II. Leipzig 1902 und 1907, Neudruck 1928.

CHAZY, J.: Mécanique céleste (Equations canoniques et variation des constantes). Paris 1953.

COLLATZ, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Berlin, Göttingen und Heidelberg 1955.

DZIOBEK, O.: Die mathematischen Theorien der Planetenbewegung. Leipzig 1888.

FINLAY-FREUNDLICH, E.: Celestial mechanics. London, New York, Paris und Los Angeles 1958.

HERRICK, S.: Astrodynamics. New York 1961.

JACOBI, C.G.J.: Vorlesungen über Dynamik. Gesammelte Werke, Supplementband, Berlin 1884, Nachdruck 1943.

LAPLACE, P.S. DE: Traité de mécanique céleste, Band I–V. Paris 1799–1825.

MÖBIUS, A.F.: Die Elemente der Mechanik des Himmels. Leipzig 1843.

MOULTON, F.R.: An introduction to celestial mechanics. New York 1902 (dtsch. Übers. von W. FENDER: Einführung in die Himmelsmechanik. Leipzig 1927).

–: Periodic orbits. Washington 1920.

PLUMMER, H.C.: An introductory treatise on dynamical astronomy. Cambridge 1918, Neudruck Dover Publications, New York 1960.

POINCARÉ, H.: Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Band I–III. Paris 1889–1896, Neudruck Dover Publications, New York 1957.

–: Leçons de mécanique céleste, Band I–III. Paris 1905–1910.

SIEGEL, C.L.: Vorlesungen über Himmelsmechanik. Berlin, Göttingen und Heidelberg 1956.

SMART, W.M.: Celestial mechanics. London, New York und Toronto 1953.

STRACKE, G.: Bahnbestimmung der Planeten und Kometen. Berlin 1929.

STUMPFF, K.: Grundlagen und Methoden der Periodenforschung. Berlin 1937.

Субботин, М. Ф.: Справочник небесной механики (M. F. SUBBOTIN: Lehrbuch der Himmelsmechanik), Band I–III. Moskau und Leningrad 1933, 1937 und 1949.

TISSERAND, F.: Traité de mécanique céleste, Band I–IV. Paris 1889–1896.

WHITTAKER, E.T.: Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper. Berlin 1924.

WINTNER, A.: The analytical foundation of celestial mechanics. London 1941.

ZURMÜHL, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Berlin, Göttingen und Heidelberg 1957.

B. Abhandlungen und kleinere Veröffentlichungen

Abkürzungen:

A.J. = Astronomical Journal (New York)
A.N. = Astronomische Nachrichten (Berlin)
B.A. = Bulletin astronomique (Paris)
B.A.C. = Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia
B.I.A. = Бюллетинь Института теоретической астрономии (Bulletin des Instituts für theoretische Astronomie) (Leningrad)
D.S. = Dynamics of Satellites, Proceedings of the Symposium Paris 1962 (Berlin, Göttingen und Heidelberg 1963)
J.B.A.A. = Journal of the British Astronomical Association (Oxford)
J.G.R. = Journal of Geophysical Research, American Geophysical Union Publications
J.O. = Journal des Observateurs (Marseille)
K.E. = Künstliche Erdsatelliten, 2. Sonderband der „Fortschritte der Physik“ (Berlin 1959)
L.M. = Meddelanden från Lunds Observatorium
M.N. = Monthly Notices of the Royal Astronomical Society (London)
NASA Rep. = National Aeronautic and Space Administration, Technical Reports (Washington)
P.A.S.P. = Publications of the Astronomical Society of the Pacific (San Francisco)
P.o.m.M. = Publicationer og mindre Meddelelser, Observatorium Kopenhagen
R.A.S. = Royal Astronomical Society (London)
S.A.J. = Astronomiska Jakttagelser och Undersökningar anstälda på Stockholms Observatorium
S.A.O. = Smithsonian Institution, Astrophysical Observatory (Cambridge/Mass.)
S.S.F. = Societas Scientiarum Fennica, Commentationes Physico-Mathematicae (Helsinki)

AGOSTINELLI, C.: Sopra un caso del problema ristretto dei tre corpi più generale di quello di HILL. Bollettino Unione Mat. Italiana (3) *8*, 377 (1953).

ANDOYER, H.: Contribution à la théorie des petites planètes, dont le mouvement est sensiblement double de celui de Jupiter. B.A. *20*, 321 (1903).

–: Sur la théorie de la Lune. B.A. *18*, 177 (1901); B.A. *19*, 401 (1902); B.A. *24*, 395 (1907).

AOKI, S.: Contribution to the theory of critical inclination of close Earth satellites. A.J. *68*, 355 (1963); 2. Case of asymmetrical potential. A.J. *68*, 365 (1963).

AXENOW, E.P., E.A. BREBENIKOW und W.G. DEMIN: Die allgemeine Lösung der Bewegung eines künstlichen Satelliten im normalen Gravitationsfeld der Erde [russ.; engl. Übers. in: Planetary and Space Sciences 9, 491 (1961)].

BATRAKOV, Y.V.: Perturbations in the motion of a satellite due to the second zonal harmonic of the Earth's potential. D.S. 74, 1963.

BECKER, L.: Elimination of the known integrals from the n-body problem. M.N. *80*, 787 (1920).

BILIMOVITCH, A., und B. PETRONIEVITCH: Beitrag zur elementaren Lösung der zwei speziellen Fälle des Dreikörperproblems. A.N. *258*, 209 (1936).

BOHLIN, K.: Integralentwicklungen des Dreikörperproblems. S.A.J. *9*, 1907 und 1911.
–: Analytische Merkmale des Dreikörperproblems. S.A.J. *9*, 1908.
–: Note sur le problème des deux corps et une intégration nouvelle dans le problème des trois corps. B.A. *28*, 113 (1911).
BRENDEL, M.: Probleme der rechnenden Himmelsmechanik. Seeliger-Festschrift, 1924.
BROUWER, D.: The motion of a particle with negligible mass under the gravitational attraction of a spheroid. A.J. *51*, 223 (1946).
–: Solution of the problem of artificial satellite theory without drag. A.J. *64*, 378 (1959).
–, und G.-J. HORI: Theoretical evaluation of atmosphere drag effects in the motion of an artificial satellite. A.J. *66*, 193 (1961).
–, und A.J.J. VAN WOERKOM: The secular variations of the orbital elements of the principal planets. Washington Astronomical Papers *13*, 81 (1950).
BROWN, E.W.: On a new family of periodic orbits in the problem of three bodies. M.N. *71*, 438 (1911).
–: On the oscillating orbits around the triangular equilibrium points in the problem of three bodies. M.N. *71*, 492 (1911).
–: On the calculation of the principal parts of the motion of the lunar perigee and node. A.J. *45*, 84 (1936).
BRÜNNOW, F.: Über die Berechnung der speciellen Störungen. A.N. *34*, 249 (1852).
BRYANT, R.W.: The effect of solar radiation pressure on the motion of an artificial satellite. A.J. *66*, 430 (1961).
BUCERIUS, H.: Bahnbestimmung als Randwertproblem I–V. A.N. *278*, 193 und 204 (1950); *280*, 73 (1953); *281*, 97 (1954); *282*, 107 (1955).
BUCHANAN, D.: Asymptotic satellites near the straight-line equilibrium points in the problem of three bodies. American Journal of Math. *41*, 79 (1919).
–: Periodic orbits of the second genus near the straight-line equilibrium points in the problem of three bodies. Proceedings of the Royal Society (London) (A) *194*, 490 (1927).
BURRAU, C.: Recherches numériques concernant des solutions périodiques d'un cas spécial du problème des trois corps. A.N. *135*, 233 (1894); *136*, 161 (1894).
–, und E. STRÖMGREN: Über Librationen und Ejektionsbahnen. A.N. *197*, 271 (1914).
–, und E. STRÖMGREN: Numerische Untersuchungen über eine Klasse periodischer Bahnen im problème restreint. A.N. *200*, 313 (1915).
–, und E. STRÖMGREN: Numerische Untersuchungen über eine Klasse einfach-periodischer retrograder Bahnen im problème restreint, nebst der diese Klasse abschließenden periodischen Ejektionsbahn. A.N. *202*, 185 (1916).
–, und E. STRÖMGREN: Über ein System von Ejektionsbahnen im problème restreint. A.N. *202*, 305 (1916).
–, und E. STRÖMGREN: Über eine Klasse periodischer Bahnen um die beiden endlichen Massen im problème restreint. A.N. *203*, 277 (1916).
CAMPBELL, A.Y.G.: On the variation of uncanonical arbitrary constants with an application to the planetary theory. M.N. *57*, 118 (1897).
CHARLIER, C.V.L.: Über das reduzierte Dreikörperproblem. L.M. Nr. 6, 1899.
CLARKE, A.C.: Stationary orbits. J.B.A.A. *57*, 232 (1947).
COOK, A.H.: Resonant orbits of an artificial satellite and longitude terms in the Earth's gravitational potential. Geophysical Journal R.A.S. *4*, 53 (1961).
COOK, G.E.: Effect of an oblate rotating atmosphere on the orientation of a satellite orbit. Proceedings of the Royal Society (London) (A) *261*, 246 (1961).

COOK, G. E., D. G. KING-HELE und D. M. C. WALKER: The contraction of satellite orbits under the influence of air-drag, I. With spherically symmetrical atmosphere. Proceedings of the Royal Society (London) (A) *257*, 224 (1960); II. With oblate atmosphere. Proceedings of the Royal Society (London) (A) *264*, 88 (1961).

COWELL, R. H., und A. C. D. CROMMELIN: Essay on the return of HALLEY's comet. Publikationen der Astronomischen Gesellschaft Nr. 23, 1910.

DARWIN, G. H.: On periodic orbits. Acta math. *21*, 101 (1897).

–: On certain families of periodic orbits. M.N. *70*, 108 (1909).

–: On librating planets and on a new family of periodic orbits. M.N. *72*, 642 (1912).

DAVIES, M. J.: The determination of the small changes in the orbital elements of an Earth satellite to air drag. D.S. 111, 1963.

DUPORT, H.: Etude sur le problème des trois corps. B.A. *26*, 369 (1909).

EGOROV, V. A.: Einige Probleme der Dynamik des Fluges zum Mond. K.E. 80, 1959.

ESCH, M.: Eine neue Ejektionsbahn im System Sonne–Jupiter. A.N. *201*, 20 (1915).

FISCHER-PETERSEN, J.: Über unendlich kleine periodische Bahnen um die Massenpunkte im problème restreint. A.N. *200*, 385 (1915).

–: Über unendlich kleine retrograde periodische Bahnen um die Massenpunkte im problème restreint. A.N. *202*, 201 (1916).

–: Die auf der Kopenhagener Sternwarte ausgeführten numerischen Arbeiten über das Dreikörperproblem. Sirius *50*, 185 (1917).

GARFINKEL, B.: On the motion of a satellite of an oblate planet. A.J. *63*, 88 (1958).

–: On the motion of a satellite in the vicinity of the critical inclination. A.J. *65*, 624 (1960).

GINZBURG, V. L.: Verwendung künstlicher Erdsatelliten zur Prüfung der allgemeinen Relativitätstheorie. K.E. 132, 1959.

GRÖBNER, W., und F. CAP: The three-body problem Earth–Moon–Spaceship. Astronautica acta *5*, 287 (1959).

GROVES, G. V.: Motion of a satellite in the Earth's gravitational field. Proceedings of the Royal Society (London) (A) *254*, 48 (1960).

HAGIHARA, Y.: Libration of an Earth satellite with critical inclination. S.A.O. Contributions *5*, 39 (1961).

HALL, A.: The problem of three bodies. A.J. *21*, 113 (1901).

HANSEN, P. A.: Über die Berechnung der Störungen durch mechanische Quadratur. A. N. *34*, 101 (1852); *37*, 301 (1854).

HERGET, P.: On the variation of arbitrary vectorial constants. A.J. *64*, 16 (1962).

HERRICK, S.: A modification of the "variation of constants" method for special perturbations. P.A.S.P. *60*, 321 (1948).

–: Icarus and the variation of parameters. A.J. *58*, 156 (1953).

HILL, G. W.: Researches in the lunar theory. American Journal of Math. *1*, 5, 23, 129 und 245 (1878).

–: Illustrations of periodic solutions in the problem of three bodies. A.J. *22*, 93 (1902).

HÖLDER, E.: Die symmetrischen periodischen Bahnen des restringierten Dreikörperproblems in der Nachbarschaft eines kritischen KEPLER-Kreises. American Journal of Math. *60*, 801 (1938).

HORI, G.-J.: The critical inclination case of the motion of an artificial satellite. A.J. *65*, 53 (1960).

–: The motion of an artificial satellite in the vicinity of the critical inclination. A.J. *65*, 291 (1960).

HÜTTENHAIN, E.: Untersuchungen über die Stabilität infinitesimaler Bahnen um Librationspunkte. A.N. *254*, 281 (1935).
–: Stabile Librationslösungen und Nullgeschwindigkeitskurven. A.N. *259*, 149 (1936).
INNES, R.T.A.: On COWELL's method of applying the NEWTONian law. A.N. *228*, 265 (1926).
IZSAK, I.G.: A theory of satellite motion about an oblate planet. S.A.O. Special Report No. 52, 1960.
–: Periodic drag perturbations of artificial satellites. A.J. *65*, 355 (1960).
–: On satellite orbits with very small eccentricities. A.J. *66*, 129 (1961).
–: A determination of the ellipticity of the Earth's equator from the motion of two satellites. A.J. *66*, 226 (1961).
JACCHIA, L.G.: Corpuscular radiation and the acceleration of the artificial satellites. Nature (London) *183*, 526 und 1662 (1959).
–: The atmospheric drag of artificial satellites during the October 1960 and November 1960 events. S.A.O. Special Report No. 62, 1961.
JACUNSKIJ, J.M.: Über den Einfluß geophysikalischer Faktoren auf die Satellitenbewegungen. K.E. 65, 1959.
JEGOROWA, A.W.: The perturbations in the motion of an artificial Earth satellite due to the moon, the sun, and Earth's oblateness. B.I.A. *7*, 815 (1960) (russ., mit engl. Referat).
–: Einfluß der Mond- und Sonnenanziehung auf die Bewegung eines künstlichen Erdsatelliten [russ.; engl. Übers. in: Planetary Space Sciences *9*, 479 (1961)].
KÄHLER, E.: Transformation der Differentialgleichungen des Dreikörperproblems. Math. Zeitschrift *24*, 743 (1926).
KAULA, W.M.: Analysis of gravitational and geometric aspects of geodetic utilization of satellites. Geophysical Journal R.A.S. *5*, 104 (1961).
–: Analysis of satellite observations for longitudinal variations of the gravitational field. In: Proceedings of the Second International Space Sciences Symposium at Florence 1961. Amsterdam 1961, S. 360.
KLOSE, A.: Die JACOBIsche Konstante im System der Kleinen Planeten. Vierteljahresschrift der Astronomischen Gesellschaft *63*, 333 (1928).
KOVALEVSKY, J., und F. BARLIER: Détermination des éléments osculateurs d'un satellite artificiel. Comptes rendus *252*, 1273 (1961).
KOZAI, Y.: On the secular perturbations of asteroids. Publications of the Astronomical Society of Japan *6*, 41 (1954).
–: On the effects of the sun and the moon upon the motion of a close Earth satellite. S.A.O. Special Report No. 22, 1959.
–: The motion of a close Earth satellite. A.J. *64*, 367 (1959).
–: Tesseral harmonics of the gravitational potential of the Earth derived from satellite motions. A.J. *66*, 355 (1961).
KRASSOWSKIJ, W.J.: Results of scientific investigations made by Soviet sputnics and cosmic rockets. Astronautica acta *6*, 32 (1960).
KRISTIANSSON, K.: Untersuchungen einer Klasse in bezug auf die ξ-Achse unsymmetrischer periodischer Bahnen um beide Massen im problème restreint. A.N. *250*, 249 (1933).
KULIKOW, D.K.: Integration of equations of celestial mechanics by COWELL's method with variable intervals. D.S. 123, 1963.
KURTH, R.: Verallgemeinerung des JACOBIschen Knotensatzes. Elemente Math. *12*, 125 (1957).

KUSTAANHEIMO, P.: On the determination of orbits of comets and asteroids. S.S.F. *25*, Nr. 2 (1960).
–: Über die Bestimmung der oskulierenden Bahn eines künstlichen Erdsatelliten. S.S.F. *26*, Nr. 1 (1961).
– und R. LEHTI: A new astronomical effect of the general theory of relativity – The dilatation of the sidereal period of orbits with great eccentricity. A.J. *68*, 392 (1963).
LANCELIN, F.: Utilisation des variables canoniques de POINCARÉ, Contribution à l'étude des planètes troyennes. B.A. (2) *13*, 107 (1947).
LIDOW, M.L.: On the approximated analysis of the orbit evolution of artificial satellites. D.S. 168, 1963.
LOUS, K.: A certain class of periodic orbits around the two finite masses in the restricted problem of three bodies. A.N. *209*, 241 (1919).
LOVETT, E.O.: On the periodic solutions of the problem of three bodies. A.N. *159*, 282 (1902).
MACMILLAN, W.D.: An integrable case in the restricted problem of three bodies. A.J. *27*, 11 (1913).
MARCOLONGO, R.: Il problema dei tre corpi da NEWTON ai nostri giorni. Atti della Reale Accademia di Napoli (2) *16* (1915).
MASSEVITCH, A.G., und A.M. LOSINSKIJ: Optical tracking methods for the first artificial satellites. P.A.S.P. *70*, 79 (1958).
MERSON, R.H.: The motion of a satellite in an axi-symmetrical gravitational field. Geophysical Journal R.A.S. *4*, 17 (1961).
–, D.G. KING-HELE und R.N.A. PLIMMER: Changes in the inclination of satellite orbits to the equator. Nature (London) *183*, 239 (1959).
MEYER, G.: Solutions voisines des solutions de LAGRANGE dans le problème des trois corps. Annales de l'Observatoire Bordeaux *17*, 75 (1933).
MÖLLER, J.P.: Die einfach-periodischen retrograden Bahnen um die beiden endlichen Massen im problème restreint mit retrograder absoluter Bewegung. A.N. *221*, 81 (1924).
–: Vier Bahnklassen im problème restreint. A.N. *233*, 81 (1928).
–: Zwei Bahnklassen im problème restreint. P.o.m.M. Nr. 99, 1935.
MORANDO, B.: Orbites de résonance des satellites de 24 heurs. B.A. *24*, 47 (1963).
MOSER, J.: Periodische Lösungen des restringierten Dreikörperproblems, die sich erst nach vielen Umläufen schließen. Math. Annalen *126*, 325 (1953).
–: Über periodische Lösungen kanonischer Differentialgleichungssysteme. Nachrichten der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse (IIa) Nr. 3, 23 (1953).
MOULTON, F.R.: The spheres of activity of the planets. Popular Astronomy 7, 281 (1899).
–: Periodic oscillating satellites in the problem of three bodies. Math. Annalen *73*, 441 (1913).
MUSEN, P.: Special perturbations of the vectorial elements. A.J. *59*, 262 (1954).
–: Application of HANSEN's theory to the motion of an artificial satellite in the gravitational field of the Earth. J.G.R. *64*, 2271 (1959).
–: The influence of solar radiation pressure on the motion of an artificial satellite. J.G.R. *65*, 1391 (1960).
–: On the motion of a satellite in an asymmetrical gravitational field. J.G.R. *65*, 2783 (1960).
–: The theory of artificial satellites in terms of the orbital true longitude. J.G.R. *66*, 403 (1961).

MUSEN, P.: On the long period lunisolar effect in the motion of the artificial satellites. J.G.R. *66*, 1659 und 2797 (1961).
–, und ANN E. BAILIE: On the motion of a 24 hour satellite. J.G.R. *67*, 1123 (1962).
NUMEROV, B.: Méthode nouvelle de la détermination des orbites et le calcul des éphémerides en tenant compte des perturbations. Publications Observatoire Astrophysique Russie Nr. 2, 1923.
–: On the subject of numerical integration of the equations of perturbation in special coordinates. A.N. *234*, 1 (1928).
OCHOCIMSKIJ, D.E., und T.M. ENEEV: Einige mit der Entsendung künstlicher Erdsatelliten zusammenhängende Variationsprobleme. K.E. 1, 1959.
–, T.M. ENEEV und G.P. TARATYNOVA: Bestimmung der Lebensdauer eines künstlichen Erdsatelliten und Untersuchung der säkularen Störungen seiner Bahn. K.E. 34, 1959.
O'KEEFE, J.A.: An application of JACOBI's integral to the motion of an Earth satellite. A.J. *62*, 265 (1957).
–: Zonal harmonics of the Earth's gravitational field and the basic hypothesis of Geodesy. J.G.R. *64*, 2389 (1959).
–, und C.D. BATCHLOR: Perturbations of a close satellite by the equatorial ellipticity of the Earth. A.J. *62*, 183 (1957).
–, ANN ECKELS und R.K. SQUIRES: The gravitational field of the Earth. A.J. *64*, 245 (1959).
ÖPIK, E.J.: Perturbations of a satellite by an oblate planet. Irish Astronomical Journal *5*, 79 (1958).
ORLOW, A.A.: On the existence of periodic orbits of a material particle in the gravitational field of a spheroid in the critical case. B.I.A. *7*, 805 (1960).
PEDERSEN, P.: Periodische Bahnen in großer Entfernung von den beiden endlichen Massen im problème restreint. A.N. *207*, 297 (1918).
–: On the periodic orbits in the neighbourhood of the triangular equilibrium points in the restricted problem of three bodies. M.N. *94*, 167 (1934).
–: FOURIER series for the periodic orbits around the triangular libration points. M.N. *95*, 482 (1935).
–: Über eine Klasse infinitesimaler periodischer Bahnen um die Dreiecks-Librationspunkte im problème restreint. A.N. *269*, 31 (1939).
–: FOURIER expansions for periodic orbits around the triangular libration points. P.o.m.M. Nr. 120, 1939.
–: Die Librationsellipsen um die Dreiecks-Librationspunkte im allgemeinen Dreikörperproblem. P.o.m.M. Nr. 130, 1941.
PERRON, O.: Neuer Existenzbeweis für periodische Bahnen im eingeschränkten Dreikörperproblem. Monatshefte Math. Phys. *43*, 81 (1936).
PLUMMER, H.C.: On periodic orbits in the neighbourhood of centres of libration. M.N. *62*, 6 (1901).
–: On oscillating satellites. M.N. *63*, 436 (1903); *64*, 98 (1904).
POINCARÉ, H.: Sur une forme nouvelle des équations du problème des trois corps. B.A. *14*, 53 (1897).
–: Sur l'intégration des équations du problème des trois corps. B.A. *14*, 241 (1897).
–: Les solutions périodiques et les planètes du type d'Hécube. B.A. *19*, 177 (1902).
–: Sur les planètes du type d'Hécube. B.A. *19*, 289 (1902).
POPOFF, K.: Sur le problème des trois corps. Math. Annalen *101*, 579 (1929).
–: Sur les solutions périodiques et asymptotiques du problème restreint des trois corps. B.A. (2) *9*, 177 (1936).

PORITZKY, H.: Motions of a satellite around an oblate Earth. A.J. *67*, 212 (1962).
PREY, A.: Über die periodischen Bahnen in der Nähe der Librationszentren L_4 und L_5. A.N. *271*, 265 (1941).
PROSKURIN, W.F., und J.W. BATRAKOV: Perturbations in the motion of artificial satellites due to the Earth's flattening. B.I.A. 7, 537 (1960) (russ., mit engl. Referat).
RABE, E.: Bemerkungen über die oskulierenden Elemente in der speziellen Störungsrechnung. A.N. *272*, 208 (1942).
–: Determination and survey of periodic Trojan orbits in the restricted problem of three bodies. A.J. *66*, 500 (1961).
–: Additional periodic Trojan orbits and further studies of their stability features. A.J. *67*, 382 (1962).
–, und A. SCHANZLE: Periodic librations about the triangular solutions of the restricted Earth-Moon problem and their orbital stabilities. A.J. *67*, 732 (1962).
REISCH, P.: Periodische Lösungen des ebenen Dreikörperproblems in der Nähe der LAGRANGEschen Dreieckslösung. Math. Zeitschrift *45*, 289 (1939).
ROBE, H.: Effets de l'asymmétrie équatoriale de la Terre sur l'orbite d'un satellite artificiel. Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège *30*, 427 (1961).
ROTH, H.: Die Verteilung der JACOBIschen Konstanten in drei Dimensionen. Acta Physica Austriaca *2*, 23 (1948).
ROURE, H.: Formules nouvelles pour le calcul des perturbations spéciales. J.O. *16*, 173 (1933).
SCHMEIDLER, F.: Intermediäre Bahnen zur Annäherung an das Dreikörperproblem. A.N. *280*, 245 (1952).
SCHUBART, J.: Numerische Aufsuchung periodischer Lösungen im Dreikörperproblem. A.N. *283*, 17 (1956).
SCHWARZSCHILD, K.: Über die periodischen Bahnen vom Hecubatypus. A.N. *160*, 386 (1903).
SEHNAL, L.: The stability of the libration points L_4 and L_5 in the system Earth–Moon. B.A.C. *11*, 130 (1960).
–: The perturbations of the orbit of the stationary satellite of the Earth. B.A.C. *11*, 132 (1960).
–: The stability of the 24-hour satellite. Astronautica Acta 7, 445 (1961).
SHAPIRO, J.J.: The prediction of satellite orbits. D.S. 257, 1963.
SIEGEL, C.L.: Über die algebraischen Integrale des restringierten Dreikörperproblems. Transactions of the American Math. Society *39*, 225 (1936).
SITTER, W. DE: Über eine kleine Modifikation der Formeln zur Berechnung der speziellen Störungen der Elemente für kleine Exzentrizitäten und Neigungen. A.N. *163*, 106 (1903).
SLAVENAS, P.: The stellar case of the problem of three bodies. Transactions Yale Observatory *6*, 36 (1928).
SMART, W.M.: Libration of the Trojan planets. Memoirs R.A.S. *62*, 79 (1917).
–: On the fundamental equations of planetary motion. M.N. *87*, 76 (1926).
SOUDAN, A.: Sur les systèmes de variables canoniques. B.A. *19*, 225 (1955).
STÄCKEL, P.: Über die Integration der HAMILTON-JACOBIschen Differentialgleichung mittels Separation der Variablen. Halle 1891.
STOCKWELL, J.N.: Rigorous method for calculating the maximum lunation. A.N. *213*, 209 (1921).
STRÖMGREN, B.: Formeln zur genäherten Störungsrechnung in Bahnelementen. P.o.m.M. Nr. 65, 1929.

STRÖMGREN, E.: Über mechanische Integration und deren Verwendung für numerische Rechnungen auf dem Gebiete des Dreikörperproblems. L.M. Nr. 13, 1901.
–: Ein asymptotischer Fall im Dreikörperproblem. A.N. *168*, 106 (1905).
–: Über Spitzen und Schleifen im problème restreint. A.N. *174*, 33 (1907).
–: A new class of periodic solutions in the general problem of three bodies, viz. in the problem of three bodies with all masses and all distances of the same order of magnitude. M.N. *80*, 12 (1920).
–: Forms of periodic motion in the restricted problem and in the general problem of three bodies according to researches executed at the Observatory of Copenhagen. P.o.m.M. Nr. 39, 1922.
–: Zur Durchmusterung des problème restreint. Seeliger-Festschrift 1924.
–: Unsere Kenntnisse über die Bewegungsformen im Dreikörperproblem. Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften *4*, 233 (1925).
–: Asymptotische Lösungen im restringierten Dreikörperproblem. P.o.m.M. Nr. 61, 1929.
–: Fortsetzung und Abschluß der Librationen um L_2 und L_3 im restringierten Dreikörperproblem. P.o.m.M. Nr. 63, 1929.
–: Periodische Bahnen um L_4 (bzw. L_5) im problème restreint bei beliebigem Verhältnis der zwei endlichen Massen. P.o.m.M. Nr. 64, 1929.
–: Über die kritische Masse im problème restreint und über das problème restreint im allgemeinen. Vierteljahresschrift der Astronomischen Gesellschaft *65*, 265 (1930).
–: Fortgesetzte Untersuchungen über asymptotische Bahnen im problème restreint. P.o.m.M. Nr. 67, 1930.
–: Die retrograden periodischen Bahnen um die beiden endlichen Massen im problème restreint mit direkter absoluter Bewegung. P.o.m.M. Nr. 69, 1930.
–: Das kritische Massenverhältnis bei der Bewegung um L_4 und L_5 im problème restreint. P.o.m.M. Nr. 70, 1930.
–: Die direkten periodischen Bahnen um beide Massen im problème restreint (Klasse *k*). P.o.m.M. Nr. 80, 1931.
–: Eine Klasse unsymmetrischer librationsähnlicher periodischer Bahnen im problème restreint und ihre Entwicklungsgeschichte (Klasse *n*). P.o.m.M. Nr. 94, 1934.
–: Symmetrische und unsymmetrische librationsähnliche Bahnen im problème restreint mit asymptotisch-periodischen Bahnen als Grenzbahnen. P.o.m.M. Nr. 97, 1934.
–: Connaissance actuelle des orbites dans le problème des trois corps. B.A. (2) *9*, 87 (1935); P.o.m.M. Nr. 100, 1935.
–, und J. FISCHER-PETERSEN: Über eine neue Art Librationen im problème restreint. A.N. *203*, 411 (1917).
–, und J. FISCHER-PETERSEN: Über eine Klasse einfach-periodischer retrograder Bahnen um die beiden endlichen Massen im problème restreint. A.N. *207*, 389 (1918).
STUMPFF, K.: Untersuchungen über das Problem der speziellen Störungen in den rechtwinkligen Koordinaten. A.N. *273*, 105 (1942).
–: Calculation of ephemerides from initial values. NASA Rep. D-1415, 1962.
–: The long-period motion of the Trojans, with special attention to the theory of Thüring. NASA Rep. D-1416, 1963.
–: On LAGRANGE's theory of the three-body problem. NASA Rep. D-1417, 1963.
–: Remarks on HILL's lunar theory. NASA Rep. D-1540/41, 1963.

SU-SHU HUANG: Preliminary study of orbits of interest for moon-probes. A.J. *67*, 304 (1962); *68*, 388 (1963).

TALLQVIST, H.: Über die Bewegung eines Punktes, welcher von zwei festen Zentren nach dem NEWTONschen Gesetze angezogen wird. Acta S.S.F. *1*, Nr. 1 und 4 (1927); *2*, Nr. 5 (1928).

TARATYNOVA, G.P.: Über die Bewegung von künstlichen Satelliten im nichtzentralen Schwerefeld der Erde unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes. K.E. 55, 1959.

TAYLOR, S.W.: On periodic orbits in the restricted problem of three bodies. A.J. *55*, 33 (1950).

THIELE, T.N.: Recherches numériques concernant des solutions périodiques d'un cas spécial du problème des trois corps. A.N. *138*, 1 (1895).

THÜRING, B.: Über die Planeten vom Kommensurabilitätstypus 1 : 1. A.N. *238*, 197 (1930).

–: Die Librationsperiode der Trojaner in ihrer Abhängigkeit von der Librationsamplitude. A.N. *243*, 183 (1931).

–: Zwei spezielle Mondeinfangbahnen in der Raumfahrt um Erde und Mond. Astronautica Acta *5*, 241 (1959).

TIETJEN, F.: Specielle Störungen in bezug auf Polarkoordinaten. Berliner Astronomisches Jahrbuch 1877, Anhang.

UPTON, E., ANN BAILIE und P. MUSEN: Lunar and solar perturbations of satellite orbits. Science (Washington) *130*, 1710 (1959).

VINTI, J.P.: New method of solution for unretarded satellite orbits. Journal of Research of the National Bureau of Standards (B) *62*, 105 (1959).

WARREN, L.A.H.: A class of asymptotic orbits in the problem of three bodies. Amer. J. Math. *38*, 221 (1919).

WHITTAKER, E.T.: Report on the progress of the solution of the problem of three bodies. British Association Reports 121 (1899).

–: On periodic orbits. M.N. *62*, 186 und 346 (1902).

WILKENS, A.: Untersuchungen über POINCARÉsche periodische Lösungen des Problems der drei Körper. Astronomische Abhandlungen Nr. 8, 1905.

–: Über die praktische Verwendung der POINCARÉschen periodischen Bahnen im Sonnensystem. A.N. *195*, 385 (1913).

–: Über die Grenzkurven und ihre Einhüllende im asteroidischen Dreikörperproblem bei elliptischen Bahnen des störenden Körpers. Seeliger-Festschrift, 1924.

–: Zur Theorie der Librationen im Sonnensystem. A.N. *227*, 337 (1926).

–: Über einen speziellen Fall des Problems der drei Körper. A.N. *240*, 201 (1930).

–: Über eine allgemeine Methode der speziellen Störungstheorie mit besonderer Berücksichtigung der Jupitergruppe. Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Math.-Naturwiss. Klasse Nr. 1, 1932.

–: Untersuchungen zur Hecuba-Bewegung und analoger Bewegungsformen. Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Math.-Naturwiss. Klasse, Neue Folge H. 27, 1935.

–: Über die Integral-Invarianten der Störungstheorie. Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Math.-Naturwiss. Klasse Nr. 123, 1955.

WILLARD, H.R.: On a family of oscillating orbits of short period. M.N. *73*, 471 (1913).

WINTNER, A.: Librationstheorie des restringierten Dreikörperproblems. Math. Zeitschrift *32*, H. 5 (1930).

WINTNER, A.: Über die v. HAERDTL'sche Bahn. Math. Zeitschrift *32*, 668 (1931).
–: Grundlage einer Genealogie der periodischen Bahnen im restringierten Dreikörperproblem. Math. Zeitschrift *34*, 321 (1931); P.o.m.M. Nr. 75 und 79, 1931.
–: On HILL's periodic lunar orbit. American Journal of Math. *60*, 937 (1938).
–: On the almost periodic behaviour of the lunar node. American Journal of Math. *62*, 49 (1940).
ZAGAR, F.: Sulle perturbazioni orbitali di un satellite terrestre artificiale. Contribuzioni Astronomichi Milano-Merate Nr. 187, 1961.
–: Orbite astronautiche. Conferenze Osservatorio Astronomico Milano-Merate (I), Nr. 3, 1962.
–: Orbite speziali e navigazione interplanetaria. Conferenze Osservatorio Astronomico Milano-Merate (I), Nr. 4, 1962.

NAMEN- UND SACHREGISTER

Abplattung 18, 297, 589ff., 596
– des Äquators *siehe* Elliptizität des Äquators
Abrundungsfehler 327, 375
ADAMS, J. C. 339, 515, 547, 550
ADAMSsche Extrapolationsformel 339, 350, 357, 360, 362
– Interpolationsformel 339, 350, 360
AIRY, G. B. 547
D'ALEMBERT, J. LE ROND 515, 531
ANDOYER, H. 253
Anfangsbedingungen (Anfangswerte) 78f., 196, 204
–, Flug zum Mond 644
–, HILLsche Variationsbahnen 577
–, numerische Integration 298, 360f., 364, 372
–, periodische Bahnen 429, 440ff., 469, 484, 487
–, säkulare Störungen 288, 291
–, spezielle Störungen 379f., 382
Anfangswertproblem 364
Anflugbahn (zum Mond) 646ff.
Anisotropie des Gravitationsfeldes der Erde 24, 297, 589, 592ff., 602ff., 614ff., 628f.
Anlaufstück (Anlaufsfolge von Stützwerten) 299, 356ff., 364ff.
Anomalie, exzentrische 215, 405, 579, 622
–, mittlere 139, 194, 271, 401, 403, 410, 413, 622
–, wahre 194, 251, 271, 404, 432, 622
Anomalien der Mondbewegung *siehe* Ungleichheiten der Mondbewegung
Anziehung von zwei festen Zentren aus 69ff., 73ff., 459, 615f.
Apsidenbewegung des Mondes 10, 516, 524f., 531ff., 547, 572
– der Planeten 205, 255
–, relativistische 17, 424
– der Satelliten 609, 626
Argument der Breite 139, 194, 271, 386, 390, 397, 623, 661
asymptotische Lösungen 128, 463, 476ff., 648
asymptotisch-periodische Lösungen 480
Auftreffbahnen 644ff.

Bahnbestimmung künstlicher Satelliten 636ff.
–, Methode von LAPLACE-HARZER 331
–, Methode von VÄISÄLÄ 643
Bahnelemente 191ff., 204, 210ff., 246, 385, 419, *siehe auch* kanonische Bahnelemente, Kegelschnittselemente
–, Differentialgleichungen der gestörten 213, 238ff., 393f., 419, 622
–, vektorielle 407ff.
Bahnen, langgestreckte (parabelähnliche) 395, 645
Bahnneigung *siehe* Neigung
BAILEY, ANN E. 628
BAKER, R. M. L. 637
Ballonsatelliten 591, 620
BATRAKOV, Y. V. 613
BAUSCHINGER, J. 395, 408
BESSEL, F. W. 312
BESSELsche Funktionen 272, 602
– Interpolationsformel 320ff., 331ff., 344, 347, 353, 355
Bewegung, mittlere *siehe* mittlere Bewegung
Bewegungsgleichungen *siehe* Differentialgleichungen
BOHLIN, K. 102
BOHLINsches Integral 36
– Problem 101ff.
BRAHE, TYCHO 516, 519, 533, 544
Breitenstörungen des Mondes 10, 516, 541ff.
BROUWER, D. 604, 613, 615
BROWN, E. W. 9, 11, 156ff., 426, 430, 441, 448, 515f., 572, 635
BRÜNNOW, F. 395ff., 401f., 403, 407
BRUNS, H. 8, 96
BUCERIUS, H. 639
BURRAU, C. 451

CAMPBELL, A. Y. G. 213f.
CAUCHY-RIEMANNsche partielle Differentialgleichungen 453
c-Funktionen 575, 640
charakteristische Funktion *siehe* HAMILTONsche Funktion
– Kurven 469f.

CHARLIER, C. V. L. 9, 70, 115, 125, 138, 140, 148, 152, 156, 169, 426, 430, 448f., 462f., 476, 631
CLAIRAUT, A. C. 515, 531f.
CLEMENCE, G. M. 604, 613
COOK, G. E. 618, 627
COWELL, R. H. 372, 376
COWELLsche Integrationsmethode 372ff., 400, 407
CROMMELIN, A. C. D. 372

DAMOISEAU 515
DARWIN, G. H. 8, 473f., 548
DELAUNAY, CH. E. 11, 234, 515, 547f., 550, 604, 612
DELAUNAYsche kanonische Differentialgleichungen (Elemente) 230ff., 236, 247f., 257, 263, 266, 483, 499, 602f.
DESCARTESscher Satz 109, 552, 642
Dichteverteilung im Erdkörper 590
Differentialgleichung für den Radiusvektor 81, 100, 568ff., 573ff.
Differentialgleichungen für absolute Koordinaten 19, 30
– für die Dreiecksseiten 96ff.
– des eingeschränkten Dreikörperproblems 54, 116, 298, 451, 629
–, halbkanonische 30, 220, 227
–, kanonische *siehe* kanonische Differentialgleichungssysteme, *siehe auch* DELAUNAYsche kanonische Differentialgleichungen, LAGRANGEsche Bewegungsgleichungen, POINCARÉsche kanonische Elemente
– für kanonische Elemente 210
– für Kegelschnittselemente 213, 240, 242ff., 384, 393f.
– der Librationsbewegung 126ff., 138, 149f.
– 1. Ordnung, numerische Integration 356ff.
– 2. Ordnung, numerische Integration 363ff.
– für Polarkoordinaten 40, 189
– des reduzierten Dreikörperproblems 92ff., 96ff.
– für relative Koordinaten 25ff., 186, 203, 222, 369, 398, 512, 534
– im rotierenden System 41, *siehe auch* HILLsche Differentialgleichungen
Differentialgleichungen der säkularen Störungen 263, 266, 284f., 286, 290, 293
– der Störungen in rechtwinkligen Koordinaten 379ff.
– der vektoriellen Elemente 412ff., 416
– der Zylinderkoordinaten 402, 406
Differentialoperatoren 336, 555
Differentialquotienten, interpolatorische Bestimmung *siehe* numerische Differentiation
Differenzen als Funktionen der Differentialquotienten 335
–, zentrale 312ff., 318ff., 323, 326, 331, 342, 344, 352, 362, 372
Differenzenschema, ENCKEsches 303, 306, 310, 313, 326ff., 340, 357, 361f., 370
Differenzoperatoren 309f., 314, 324ff., 372
Divisoren, kleine 254
Doppelintegrale 350ff.
„drag" *siehe* Luftwiderstand
Drehimpulssatz (Flächensatz, Impulsmomentensatz) 20, 28, 32, 49, 60, 80, 82, 85f., 91, 96, 98, 100, 198, 200, 214f., 229, 257, 291, 404, 421, 494, 603
Dreieckspunkte, LAGRANGEsche 105, 112, 115, 118, 125ff., 138, 424, 426, 428, 469, 476
Dreiecksseiten 96ff.
Dreiecksverhältnisse 639
Dreikörperproblem, ebenes 32, 49
–, eingeschränktes 8, 49ff., 56, 61, 80, 116, 175f., 296, 298, 363, 424ff., 496, 566, 572, 649
–, planetares 245ff.
–, reduziertes 80ff., 92ff., 98, 363, 572f.
–, relatives 26ff.
–, spezielle Lösungen 73ff., 104ff., 423
–, stellares 25, 63, 229
DUNTHORNE 546

Echo-Satelliten *siehe* Ballonsatelliten
ECKELS, A. 598
EGOROV, V. E. 644ff., 651
Eichung der ersten Summenspalte eines Differenzenschemas 348f., 371
– der zweiten Summenspalte 355f., 371
einfache Integrale 337ff.

Einflußsphäre der Himmelskörper 64ff., 113, 383, 651
Einheiten 56f., 598, 637
EINSTEIN, A. 17
Ejektionsbahnen 448ff., 459ff., 464ff., 467f., 470ff., 648
elektronische Rechenanlagen 8, 10, 297, 300, 342, 363, 368, 408, 416, 506, 641, 644
Elementarintegrale, doppelte 353ff.
–, einfache 344ff.
Elimination der Knoten *siehe* JACOBIscher Knotensatz
elliptische Bewegung *siehe* KEPLERsche Bewegung
– Funktionen 70, 283
– Integrale 73, 76f.
Elliptizität des Äquators 599f., 629
ENCKE, F. 303, 378ff.
ENCKEsche Reihe 380, 399, 662
Energie, kinetische 21, 38, 71, 170, 176, 186, 218, 221, 229, 453
–, potentielle 21, *siehe auch* Potential
Energiekonstante *siehe* Energiesatz
Energiesatz (Energieintegral) 21f., 28, 49, 70, 80f., 85, 95, 97ff., 102, 172, 187, 190, 197, 257, 421, 494, 640
Entwicklung der Störungsfunktion 249ff., 267ff.
– nach trigonometrischen Funktionen 76ff., 233, 251f., 267, 271ff., 491f., 520, 523, 661
Entzerrung 579f.
Ephemeridenrechnung 210, 233, 397
Epizykelbewegung 289, 291
Epoche 61, 204, 242
Erdsatelliten, künstliche 8, 11, 69, 297, 383, 417, 589ff., 636ff.
erzeugende Funktion 183, 185, 605, 611
EULER, L. 70, 515, 531
Evektion 10, 516, 522ff., 529f., 531, 572
EVERETT, J. D. 322
EVERETTsche Interpolationsformel 323
Exosphäre 589, 619
Explorer-Satelliten 11
Extrapolation von Wertereihen 307, 311
Extrapolationsformeln *siehe* ADAMSsche, NEWTONsche, STÖRMERsche Extrapolationsformel
Extremalprinzip 171, 174
Exzentrizität 243, 267
Exzentrizität der Erdbahn 548
– der Mondbahn 523, 532
–, säkulare Störungen 259f., 285, 286ff., 289
Exzentrizitäten, kleine 49, 139, 237, 266, 269, 279, 285, 292, 384, 394, 417, 642, 659ff.
Exzentrizitätswinkel 212, 385

Fallbewegung 32ff., 259, 451, 471ff.
Fallzeit 471ff.
Fehler, isolierte 326
–, zufällige 327
Flächengeschwindigkeitsvektor 409
Flächenkonstante *siehe* Drehimpulssatz
Flächensatz (-integral) *siehe* Drehimpulssatz
„flare“ 591
Flug zum Mond 643ff.
FOURIERsche Reihen 76ff., 661, *siehe auch* Entwicklung nach trigonometrischen Funktionen
FREDRICH, J. 657

GAUSS, C. F. 312
GAUSSsche Interpolationsformeln 313ff., 320
Gegenschein 115
Gesamtenergie 21, 217
Geschwindigkeit 32, 122, 157ff., 224f., 229, 620ff., 640, 647, 650ff., *siehe auch* Impulse
Gezeitenreibung 548
Gleichung, jährliche *siehe* jährliche Gleichung
–, parallaktische *siehe* parallaktische Gleichung
Gravitationsbeschleunigung 26ff., 596f., 601f., 619
Gravitationsgesetz 17, 69, 589
Gravitationskonstante 19, 637, 639, 645
Gravitationspotential 116ff., *siehe auch* Potentialfunktion
– der Erde 24, 589f., 592ff., *siehe auch* Anisotropie
Grenzbahn der Trojaner 164, 443ff.
– der HILLschen Variationsbahnen 566
Grenzbahnen von Klassen periodischer Lösungen 440, 449, 461, *siehe auch* Ejektionsbahnen

Grenzkurven, HILLsche *siehe* HILLsche Grenzkurven
GYLDÉN, H. 111f., 205, 429

Halbachse, große 240, 253, 259, 385, 532f., 625
halbkanonische Differentialgleichungen *siehe* Differentialgleichungen, halbkanonische
Halbmesser (äquatorialer und polarer) der Erde 597, 629
Halbzeitbahn 464, 469f.
HALLEY, E. 546
HALLEYscher Komet 372
HAMILTON, W. R. 170, 172
HAMILTON-JACOBIsche partielle Differentialgleichung 183ff., 189, 207, 615
HAMILTON-JACOBIsche Theorie 7, 9, 170ff., 203, 213f., 216
HAMILTONsche Funktion 175f., 177f., 187, 189f., 197, 205, 207, 217, 219, 223, 230, 247, 432, 603, *siehe auch* Störungsfunktion
HAMILTONsches Prinzip 170ff., 180
HANSEN, P. A. 11, 397, 399, 403ff., 407, 515, 547
HANSEN-TIETJENsche Differentialgleichung für Zylinderkoordinaten 406
harmonische Bewegung 131, 139
HARZER, P. 331
Hauptgleichung 575f., 580, 588, 640, 643, 646
Hauptproblem der Mondtheorie 511
– der Theorie künstlicher Satelliten 601ff.
Hauptteil der Störungsfunktion 250, 265, 267
Hauptträgheitsmomente 596, 628
HAYFORD, J. F. 597
Hecuba-Lücke 508f.
– -Problem 497f., 504ff.
HEISKANEN, W. A. 599f.
HELMERT, F. R. 600
HERGET, P. 408, 417
HERRICK, S. 408, 410ff., 637
HESSE 80
Hestia, Hestia-Lücke 498
Hilda, Hilda-Gruppe 497f.
HILL, G. W. 8, 9, 56ff., 122, 515f., 551ff.
HILLsche Differentialgleichungen 58, 517, 551, 554f.
HILLsche Grenzflächen 141f.
– Grenzkurven (Nullgeschwindigkeitskurven) 122ff., 136, 157, 159f., 163ff., 430, 447ff., 649, 651f.
HILLsches Mondproblem 11, 56ff., 426, 519, 551ff.
Himmelskörper, künstliche, *siehe* Erdsatelliten, künstliche
HORI, G.-J. 614

Identitätsoperator 309
Impulse, Impulskoordinaten 21, 29, 216ff.
Impulsmomentensatz *siehe* Drehimpulssatz
Inertialsystem 18, 25, 64, 216
Integrale von Differentialgleichungssystemen 18ff., 196ff., 488
Integralinvarianten 417, 419ff.
Integration, numerische 10, 61, 296ff., 369ff., 372ff., 379ff., 383ff., 395ff.
– –, der Differentialgleichungen 1. Ordnung 356ff.
– –, der Differentialgleichungen 2. Ordnung 363ff.
– –, Doppelintegrale 350ff.
– –, einfache Integrale 337ff.
Integrationsformeln nach zentralen Differenzen 342ff., 371ff.
Integrationsintervall *siehe* Schrittweite
Integrationskonstanten 20, 53, 73, 196, 205ff., 224, 288, 291, 337, 340f., 436, 484, 488, 494f., *siehe auch* Energiesatz, Flächensatz, JACOBIsche Konstante
intermediäre Bahnen (Integrale, Lösungen) 185, 194, 205, 221ff., 245, 251, 397, 403, 417, 429ff., 440ff., 511, 515
Interpolation auf Intervallmitte 322, 326
– von Wertereihen 299ff.
Interpolationsformeln *siehe* ADAMSsche, BESSELsche, EVERETTsche, GAUSSsche, NEWTONsche, STIRLINGsche, STÖRMERsche Interpolationsformel
Invariante ϱ 88ff., 93, 100
Invarianten, abgeleitete 88, 98ff.
–, lokale 80, 83f., 89, 92ff., 96, 410, 572, 638, 646
–, symmetrische 89ff.
Ionosphäre 589, 619

Iterationsgleichungen für Differentialgleichungen 1. Ordnung 359
– – – 2. Ordnung 366f.
IZSAK, I. G. 600, 615

JACCHIA, L. G. 591, 598
JACOBI, C. G. J. 80, 170, 200
JACOBIsche Konstante 53, 55, 122, 136, 141, 147, 430, 449, 469f., 472, 509, 561, 564, 579, 581, 585, 649ff.
– Koordinaten 43f., 45ff., 221, 225, 229, 231f., 236, 246f., 257, 265, 291, 482, 492f., 512
JACOBIscher Knotensatz 42ff., 229, 258, 292
– Satz 23, 50, 58, 84
JACOBIsches Integral 50ff., 55, 116, 122, 151ff., 157f., 160
jährliche Gleichung 10, 516, 533, 537ff., 549
JEFFREYS, H. 597, 600
JÖRGENS, K. 358
Jupiter–Saturn, gegenseitige Störungen 24, 253f., 285, 658f.

Kanonische Bahnelemente 184, 189ff., 210, 231
– Differentialgleichungssysteme 22, 29, 174ff., 177ff., 183ff., 187ff., 203, 205ff., 210, 217ff., 220f., 224, 228, 232, 247f., 257, 261, 263, 266, 432, 482, 499ff., 602, 604ff.
– Transformation *siehe* Transformation, kanonische
– Variable 177, 183, 207, 209ff., 231, 234, 236f.
KANT, I. 548
KAULA, W. M. 600
Kegelschnittbahn (Kegelschnittsbewegung) *siehe* KEPLERsche Bewegung
Kegelschnittselemente 193ff., 210ff., 233, 238ff., 246, 383ff., *siehe auch* Bahnelemente
Kegelschnittsgleichung 251, 387, 404, 621
KEPLERsche Bewegung (Gesetze) 25, 40, 50, 60ff., 80ff., 100, 102f., 105, 115, 139f., 145, 186ff., 203, 224, 236, 238ff., 245f., 271ff., 369, 425f., 577f., 579, 636ff., 645f.
– Gleichung 36, 102ff., 193, 215, 404f., 407, 413, 579, 657
KEPLERsches Gesetz, drittes 102, 257, 295, 521, 533, 554, 564
kinetische Energie *siehe* Energie, kinetische
KING-HELE, D. G. 598, 618, 627
Klammerausdrücke, LAGRANGEsche 179ff., 198, 201ff., 207, 209, 211ff., 235
–, POISSONsche 198, 200ff., 208, 209ff., 212, 233, 238
Klassen periodischer Lösungen 462ff., 647f.
Knotenbewegung 10, 205, 264, 285f., 290ff., 516, 543, 545f., 609, 659
Knotendurchgang 642
Knotenlänge 42, 82, 139, 193, 237, 278, 291, 385, 397, 539, 547, 609
Knotensatz, JACOBIscher *siehe* JACOBIscher Knotensatz
Kommensurabilität der mittleren Bewegungen 131, 253f., 425, 497, 504
Konjunktion, symmetrische 492, 501
konservative Kräfte 39
Konvergenz der Interpolationsformeln 328ff.
– der Reihen 245
Koordinaten, absolute 25, 37, 64, 217
–, baryzentrische 64, 512
–, begleitende 388, 623
–, elliptische 70, 72
–, geozentrische 56, 62, 534, 539, 620, 638
–, heliozentrische 27, 53, 55, 61, 66, 139, 214, 217, 227, 231f., 250, 369, 376, 385
–, JACOBIsche *siehe* JACOBIsche Koordinaten
–, planetozentrische 55, 66, 217
–, relative 25ff., 37, 64, 84, 186, 203, 217, 228f., 247, 268
Kopenhagener Durchmusterung der periodischen Lösungen des „problème restreint“ 296, 427, 449, 458, 461ff., 464ff., 467ff., 476ff.
Korpuskularstrahlung, solare 591
KOZAI, Y. 598
Kraft, Kräfte 19, 39
Kräftefunktion 29
Kräftezentrum 30, 33, 105
Krümmung (der Mondbahn) 65
Kugelfunktionen, tesserale 599
–, zonale 593

künstliche Himmelskörper *siehe* Erdsatelliten, künstliche
kurtierte Distanz 195, 396
KUSTAANHEIMO, P. 636ff.

LAGRANGE, J. L. 9, 34, 37, 80, 82, 86, 88, 101, 111, 115, 203, 234, 423, 547
LAGRANGEsche Bewegungsgleichungen 39, 71, 170ff., 174f., 177, 187, 452f.
– Funktion 34, 47, 97, 103, 229
– Schlüsselgleichung 641f.
LAGRANGEscher Satz 80, 82, 86ff.
LALANDE, J. J. LE FRANÇOIS DE 546
Länge, mittlere 211, 237, 241f., 293ff., 385, 394, 491, 493
–, mittlere mittlere 295
–, wahre 491
LAPLACE, P. S. 7, 234, 253, 267f., 312, 322, 331, 515, 547ff.
LAPLACEsche Koeffizienten 268ff., 279ff., 658
LAPLACEscher Vektor 409
Lebensdauer künstlicher Satelliten 591, 627
LEGENDRE, A. M. 70, 76
LEGENDREsche Polynome 593ff.
LEVI-CIVITÀ, T. 35
Librationen 112, 115, 125ff., 142ff., 148ff., 295
–, nichtperiodische 146ff.
–, periodische 128ff., 137, 144, 148ff., 449, 460, 463ff., 631ff.
–, räumliche 138ff.
Librationsperioden 130ff., 144f., 153, 155f., 166ff., 447, 635
Librationszentren, LAGRANGEsche 9, 111ff., 115, 117ff., 142ff., 296, 553, 631, 636, 650
Lichtdruck 297, 591
lokale Elemente 129, 384
– Invarianten *siehe* Invarianten, lokale
Lösungen von Differentialgleichungssystemen 196
Luftdichte 297, 617ff.
Luftwiderstand („drag“) 297, 591, 617ff.
Lunation, letzte 566

MACMILLAN, W. D. 73ff., 423, 426
MAKEMSON, M. W. 637
Maschenweite *siehe* Schrittweite
Massendreieck 26, 96
Massenmittelpunkt *siehe* Schwerpunkt
Massenverhältnis, kritisches 127, 130, 476
Maßstabhöhe *siehe* Skalenhöhe
MAUPERTUIS, P. DE 172
MAYER, T. 546
mechanische Quadratur, Doppelintegrale 350ff.
– –, einfache Integrale 337ff.
Mehrdeutigkeit der Interpolation 300, 330
Mittelpunktsgleichung 432, 491, 608
Mittelwert des Abstandes (in der Variationsbahn) 563f., 579
mittlere Bahnelemente 257
– Bewegung 211, 234f., 241, 253f., 257, 385, 394f., 414, 425, 490, 493, 497, 506, 508f., 520, 546, 580, 609
MÖBIUS, A. 516
Molekulargewicht (der Gase) 619
Mond, Abweichung von der Kugelgestalt 617
–, mittlerer Abstand 518, 521, 532, 546
–, mittlere Exzentrizität 532
–, säkulare Störungen 286, 546ff.
–, Ungleichheiten der Bewegung *siehe* Ungleichheiten der Mondbewegung
Mondbewegung (Mondtheorie) 10, 24, 56ff., 61f., 65, 69, 113, 145, 205, 264, 269, 286, 516ff., 522ff., 531f., 533ff., 537ff., 546ff., 576, 601
MORANDO, B. 628
MOULTON, F. R. 115
MUSEN, P. 407f., 412ff., 600, 628

Nebenteil der Störungsfunktion 250f., 265
Neigung der Bahnebenen 49, 82, 192, 397
– der Mondbahn 56, 538ff.
–, säkulare Störungen 260, 285, 290ff.
Neigungen, kleine 49, 139, 237, 265, 269, 276, 285, 292, 384, 394, 659ff.
NEWCOMB, S. 547f.
NEWTON, I. 7, 17, 69, 515, 531
NEWTONsche Extrapolationsformel 307, 311
– Interpolationsformel 305ff., 310f., 323, 336, 358
– Näherungsmethode 642
Nullgeschwindigkeitskurven *siehe* HILLsche Grenzkurven

numerische Differentiation 331ff., 336, 384
– Integration *siehe* Integration, numerische
Numerov, B. 376ff.

O'Keefe, J. A. 598, 600
Operatoren 308ff., 314ff., 324ff., 336, 340, 342, 378, 411, 555
Örter, scheinbare 638
orthogonale Transformationen *siehe* Transformationen, orthogonale
Orthogonalitätsbedingungen 389, 391, 623f.
Oskulationsepoche (-ort) 204, 383, 388, 397, 408
oskulierende Bahnen 204, 221ff., 240ff., 257f., 296, 379, 385, 390, 396ff., 636f.
– Elemente 204, 240ff., 245, 263, 296, 381, 385, 395, 407ff., 419, 610

Parallaktische Gleichung 10, 533ff.
Parallaxe, tägliche 637
partikuläre Lösungen 104ff., 196
Perigäumsbewegung des Mondes 547, 609
Perigäumsdistanz 626
Perigäumshöhe 619
Perigäumslänge 625
Perihelabstand vom Knoten 82, 139, 194, 211, 215, 398, 609
Perihelbewegung 17, 140, 251, 264, 285ff., *siehe auch* Apsidenbewegung
–, relativistische 17, 424
Perihellänge 237, 278, 289f., 385
Perihelzeit 193, 211, 410
Periodenmodul 579
periodische Bahnen *siehe* periodische Lösungen, *siehe auch* Librationen, periodische
– Lösungen 10, 76, 135, 296, 423, 481ff., 518, 651
– – erster Gattung 481, 489ff.
– – zweiter Gattung 481, 498ff.
– – dritter Gattung 481
– – in der Nähe der Hecuba-Lücke 507ff.
Periodizitätsbedingungen 485, 488, 493
Plana 547
Plummer, H. C. 148, 156
Poincaré, H. 7, 8, 80, 217, 224, 229, 236f., 255, 419ff., 426, 429, 481, 495, 499, 505, 557, 566
Poincarésche kanonische Elemente 236ff., 266, 293, 432
– Koordinaten 217ff., 228f.
Poisson, S. D. 253, 515
Polarkoordinaten 40, 195
Pontécoulant 515
Potential, Potentialfunktion 21, 55ff., 70f., 115ff., 126, 138, 145, 149, 161, 176, 186, 221, 452
– abgeplatteter Planeten 593, 599, 602, 628ff.
potentielle Energie *siehe* Energie, potentielle
Präzession 539
Prinzip der kleinsten Wirkung *siehe* Hamiltonsches Prinzip
„problème restreint" *siehe* Dreikörperproblem, eingeschränktes
Pseudoperioden 330f.
Pseudozeit 454
Ptolemäus, C. 522, 547

Quadraturstellung des Mondes 62, 66f., 519, 522, 567, 579
Quellpunkte 440, 449

Rabe, E. 10, 440ff., 476
Radiusvektor, Differentialgleichungen für den 568ff., 573ff.
Randwertproblem 364, 366ff.
Raumsonden *siehe* Erdsatelliten, künstliche
Rechenanlagen, elektronische *siehe* elektronische Rechenanlagen
Reduktion auf die Ekliptik 545
– der Ordnung von Differentialgleichungssystemen 81, 222, 261f.
Regularisierung 451, 638
Relativbewegung 25ff., 41, 47, 92, 186ff., 203, 217ff., 221ff., 230ff., 511
relativistische Mechanik 424
Relativitätstheorie 17
Relativkoordinaten *siehe* Koordinaten, relative
–, kanonische 217ff., 224
Resonanzbewegung 112, 634ff., *siehe auch* Librationen
Restglieder 301f., 312, 329f., 343, 358, 365, 528ff.
Rotation der Atmosphäre 620, 626

rotierendes Koordinatensystem 40, 54, 116, 175, 517, 551, 649
RUNGE-KUTTA (Methode der numerischen Integration) 360
RUNGE-KUTTA-FEHLBERG 361

Säkulare Beschleunigung des Mondes 10, 546ff., 550
– Gleichung 293
Satelliten 246, *siehe auch* Erdsatelliten, künstliche, Saturnsatelliten
Satellitenbahnen 450, 473
Sattelpunkte 121, 632
Saturnsatelliten 254, 498
Schleifen 464ff., 467f., 474f., 566
Schrittweite 298, 304, 308, 314, 323, 326, 336, 341, 358, 364, 367f., 376, 378, 383, 395
SCHUBART, J. 10, 352, 506f.
Schwerebeschleunigung *siehe* Gravitationsbeschleunigung
Schwerpunkt 18f., 26, 105, 217
Schwerpunktssatz 18f., 27, 37, 46, 51, 80, 218, 222
SEHNAL, L. 636
semikonvergente Reihen 329
siderische Umlaufszeit *siehe* Umlaufszeit, siderische
SIEGEL, C. L. 179
SIMPSONsche Formel 347
Singularitäten 328ff., 455, 461, 475, 614, 617
SITTER, W. DE 395, 659
Skalenfaktor 557, 561ff.
Skalenhöhe 618f., 622
SMART, W. M. 213
Sonnenparallaxe 638
SPENCER-JONES, H. 638
Sputnik 11
SQUIRES, R. K. 598
Stabilität (Instabilität) mechanischer Systeme 34f., 253, 259f., 288
– – periodischer Librationen 113, 130, 144, 448, 546, 601, 631, 635f.
STÄCKEL, P. 190, 615
stationärer Satellit 601, 627ff.
STIRLINGsche Interpolationsformel 312ff., 317f., 320, 323, 331ff., 344, 346, 352
STÖRMERsche Extrapolationsformel 352, 368
STÖRMERsche Interpolationsformel 351
Störungen 26, 60f., 64, 66f., 203f., 341, 355
–, allgemeine 9, 61, 245ff., 250ff., 643
– der DELAUNAYschen Elemente 252, 603ff.
– der Erdsatellitenbahnen 589ff.
– – – durch Anisotropie des Erdpotentials 589ff., 599ff.
– – – durch atmosphärischen Widerstand 617ff.
– – – durch Mond und Sonne 590, 592, 601f., 626, 628, 635f., 644
– – – durch Strahlungsdruck 620
– der Exzentrizität 259f., 285, 286ff., 517f., 625
– der großen Halbachse 253, 528, 625
– der Kegelschnittselemente 213, 238ff., 250, 383ff., 393f., 407f., 622, 659ff.
– der Knotenlänge *siehe* Knotenbewegung
–, kurzperiodische 230, 608, 610f.
–, langperiodische 9, 205, 254, 256, 600, 610ff.
– der mittleren Anomalie 255f., 413ff.
– der mittleren Länge 293ff., 394, 493
– der Mondbahn 62, 205, 264, 286ff., 511ff., 516ff., 522ff., 531ff., 538ff., 546ff., 572, *siehe auch* Ungleichheiten der Mondbewegung
– der Neigung 260, 285f., 290ff., 545
– der Perihellänge (Perigäumslänge) *siehe* Perihelbewegung, Apsidenbewegung
–, periodische 253, 256, 534
–, säkulare 9, 61, 205, 253, 255f., 263ff., 279ff., 286, 293ff., 546ff., 609, 625, 627, 658f.
–, spezielle 10, 61, 238, 245, 296, 342, 369ff., 378ff., 395ff.
– der vektoriellen Bahnelemente 407ff., 416
– der Zylinderkoordinaten 395ff., 403ff.
Störungsfunktion 224, 226ff., 236, 238, 240, 247f., 249ff., 263, 385, 407f., 528, 622, 659ff.
–, säkulare 263, 267ff., 279
Störungsgleichung 207ff., 211, 232, 236, 238ff., 247ff., 257, 402, 406, 412, 416, 432, 499ff., 512f., 517, 551, 602, 622

Störungsglied, direktes und indirektes 379f.
Störungskoordinaten *siehe* Störungsvektor
Störungsoperator 411
Störungsvektor 61ff., 203f., 379ff., 387, 411, 514, 624
Strahlungsdruck *siehe* Lichtdruck
Stratosphäre 619
STRÖMGREN, B. 408
–, E. 296, 426, 461, 464, 476, 648
Strömung, stationäre 620
STUMPFF, K. 331, 381, 638
Stützwerte 300f., 307, 312, 322, 326, 328, 331ff., 337, 341, 370f., 372f., 381
SUBBOTIN, M. F. 600, 629
SUNDMAN, K. 8, 35, 102, 423
SYLVESTERsche Determinante 571
Syncom-Satelliten 601, 635f.
synodische Umlaufszeit *siehe* Umlaufszeit, synodische
Syzygien 62, 66f., 113, 519, 522, 567, 579

Tafelintervall *siehe* Schrittweite
Tautochrone Bewegung 130, 153, 155, 157, 166, 487
TAYLORsche Reihe 32, 299, 301, 330, 360, 485, 584, 606
Temperatur, absolute 619
THIELE, T. N. 451
THÜRING, B. 9, 10, 169, 426, 430ff., 441, 635
TIETJEN, F. 397, 403
TISSERAND, F. 11, 417, 515, 550
TISSERANDsches Kriterium 417ff.
Topozentrum 637f.
Trägheitsmoment 36, 47, 592
Transformation, identische 186, 605
– auf JACOBIsche Koordinaten 43
–, kanonische 177ff., 182ff., 189, 216, 234, 237f., 604ff., 611
–, lineare 182, 184, 217, 237
–, orthogonale 183, 214, 388, 391, 623
– auf Polarkoordinaten 40, 187ff.
–, THIELEsche 451ff., 456, 459ff., 473
Transtrojaner 440ff., 445ff., 463, 476
Trojaner 8, 115, 125, 155, 156ff., 254, 256, 426, 428, 430ff., 440ff.
TYCHO BRAHE *siehe* BRAHE, TYCHO

Umfliegen des Mondes 646ff.
Umlaufszeit der Apsiden der Mondbahn 532
– der Knoten der Mondbahn 543
–, mittlere 295
–, siderische 425, 501, 520
–, synodische 425, 501, 518, 520
– der Trojaner 131, 155, 168f., 446f.
Ungleichheit, große (elliptische), der Mondbahn 533
Ungleichheiten (Anomalien) der Mondbewegung 10, 61, 515f., *siehe auch* Evektion, Variation, jährliche Gleichung, parallaktische Gleichung
Unveränderliche Ebene (UVE) 20, 49, 83, 86f., 106, 257, 265, 291
UOTILA 599

VÄISÄLÄ, Y. 643
VAN-ALLEN-Gürtel 589, 592
VANDERMONDEsche Determinante 303
Vanguard-Satelliten 11, 598ff.
Variable, kanonische *siehe* kanonische Variable
–, konjugierte 174, 187, 216f., 219, 237
–, regularisierende 638
Variation (Variationsbahn des Mondes) 10f., 426, 516ff., 522, 529, 553, 565ff., 578ff.
– der geozentrischen Distanzen 441
– der Konstanten 201, 203ff., 384, 431
verbotene Bereiche 123, 148, 157, 430
Verschiebungsoperator 308
VINTI, J. P. 614ff.
Viskosität, elektromagnetische 591, *siehe auch* Luftwiderstand

WALKER, D. M. G. 618, 637
WHITTAKER, E. T. 213f.
WILKENS, A. 419, 421
WILLARD, H. R. 149
Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation 627
–, mittlere *siehe* mittlere Bewegung
WINTNER, A. 473
Wirkungsfunktion 187
WOLF, M. 115

Zentrifugalbeschleunigung 117, 597
Zusammenstöße 18
Zweikörperbewegung *siehe* KEPLERsche Bewegung
Zylinderkoordinaten 395ff., 403ff.